Tema 67

Inferencia estadística. Test de hipótesis

67.1 Teoría de estimadores puntuales. Distribución en el muestreo

67.1.1 Introducción

Como ya indicamos en el capítulo 57, el objetivo de la Inferencia Estadística es el obtener conclusiones sobre una población objeto de estudio mediante la observación de una parte de la misma denominada muestra.

Concretamente, si estamos interesados en una característica o parámetro poblacional asociado a una variable aleatoria observable X como por ejemplo su media, $\theta = E[X]$, cuya distribución F es en parte conocida, por ejemplo $\mathcal{N}(\theta, 1)$, el propósito de la Inferencia Estadística es el de obtener conclusiones sobre θ en base a una muestra aleatoria simple de X, es decir, en base a n observaciones de X, $X_1, ..., X_n$, entendiéndose cada X_i, $i = 1, ..., n$ como el valor de la variable X en el individuo seleccionado al azar en el lugar i-ésimo (por ejemplo la talla del individuo i-ésimo).

El proceso de selección en una muestra aleatoria simple - piensese por ejemplo en una selección con reemplazamiento de bolas de una urna - conlleva el que las X_i sean variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con una distribución común F.

Así pues, formalmente una muestra aleatoria simple de una variable aleatoria X es una variable aleatoria n - dimensional $(X_1, ..., X_n)$ cuyas variables aleatorias unidimensionales que la componen -realizaciones de X- son independientes y con la misma distribución (la de X).

Por tanto, si X es continua con función de densidad f, la función de densidad conjunta de $(X_1, ..., X_n)$ será

$$f(x_1, ..., x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i) = f(x_1) ... f(x_n)$$

y si X es discreta con función de masa p, la función de masa conjunta será

$$p(x_1, ..., x_n) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i)$$

Esta distribución de $(X_1, ..., X_n)$ se denomina distribución muestral, y dado que la situación habitual que se plantea en Inferencia es la de que la distribución de X no es totalmente conocida, sino que depende de algún parámetro θ desconocido (el cual puede ser multivariante), la distribución muestral también dependerá de θ, haciéndose referencia explícita de éste en su expresión, $f(x_1, ..., x_n; \theta)$ ó $p(x_1, ..., x_n; \theta)$.

Otra cuestión que también iniciamos en el capítulo 57 es la de la estimación. Como allí dijimos, estaremos interesados bien en asignar -o mejor dicho inferir- un valor numérico al parámetro θ (estimación por punto), o bien en inferir un conjunto de valores plausibles para θ (estimación por intervalos de confianza y contraste de hipótesis). En este proceso será imprescindible contar más que con la muestra, con una función suya $T(X_1, ..., X_n)$ denominada estimador.

Así, si θ es la media de la población, parece razonable utilizar la media muestral

$$T(X_1, ..., X_n) = \overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} X_i$$

en su estimación, entendida como función -media aritmética- de los valores que observemos.

De hecho, los estimadores muestrales construidos por analogía de las medidas descriptivas estudiadas en el capítulo 60, son, en general, buenos estimadores de los correspondientes parámetros poblacionales.

Así, la varianza muestral

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} (X_i - \overline{x})^2$$

es un buen estimador de la varianza poblacional $\sigma^2 = V(X)$. El coeficiente de correlación muestral

$$r = \frac{n \sum\limits_{i=1}^{k} x_i y_i - \left(\sum\limits_{i=1}^{k} x_i \right) \left(\sum\limits_{i=1}^{k} y_i \right)}{\sqrt{n \sum\limits_{i=1}^{k} x_i^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{k} x_i \right)^2} \sqrt{n \sum\limits_{i=1}^{k} y_i^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{k} y_i \right)^2}}$$

lo es del coeficiente de correlación poblacional ϱ, etc.

Observemos, no obstante, que los estimadores $T(X_1, ..., X_n)$ son variables aleatorias, ya que son funciones -T- de la muestra que es aleatoria (no se sabe que valores se van a obtener, luego no se sabe, por ejemplo, cual será su media aritmética).

Por tanto, al ser $T(X_1, ..., X_n)$ una variable aleatoria, tendrá una distribución de probabilidad, la cual denominaremos distribución en el muestreo de T, la cual es de vital importancia en Inferencia, ya que nos dará la "distribución" de los valores de T. Es decir, cuales son los más probables, o cual es su dispersión, etc.

Así, un estimador cuya media sea el parámetro a estimar $E[T] = \theta$ -denominado centrado- es deseable puesto que esta propiedad nos expresa una "cancelación" entre los valores mayores y menores que toma, respecto al parámetro.

Un estimador con poca varianza nos indicará una mayor probabilidad de obtención de muestras "cercanas" al parámetro.

La elección del estimador adecuado a cada problema que se esté estudiando es una cuestión delicada además de no existir en general solución única, saliéndose, en todo caso, de los límites de este tema.

En la siguiente sección estudiaremos un método general para determinarlos, el cual suele conducir a estimadores con buenas propiedades, al menos para muestras grandes.

Además, desde la sección cuarta, veremos para cada una de las situaciones habituales que se suelen plantear, el estimador que razonablemente debe de utilizarse, así como su distribución en el muestreo.

Advertimos, no obstante, que estas secciones no son mas que indicativas, ya que en ellas no se han tenido en cuenta otras consideraciones como la existencia de datos anómalos o debilidad en la suposición del modelo poblacional o de la independencia, etc.

Un análisis profundo del problema concreto que se esté estudiando es siempre necesario, así como recomendable la consulta a un estadístico profesional, de la misma manera que una enciclopedia médica, por muy buena que ésta sea, nunca podrá sustituir al médico en el análisis de una dolencia.

67.1.2 Método de la máxima verosimilitud

Supongamos una urna compuesta por bolas blancas y negras de la que sólo sabemos que la proporción de blancas es $p = \frac{1}{2}$ ó $p = \frac{1}{3}$.

De ella extraemos dos bolas con reemplazamiento resultando una blanca y otra negra.

La idea del método de la máxima verosimilitud consiste en dar como estimación del parámetro aquel valor -de entre los posibles- que haga maxima la probabilidad del suceso observado, es decir, de la muestra obtenida.

Así, en nuestro ejemplo, si fuera $p = \frac{1}{2}$, la probabilidad de obtener una bola blanca y otra negra sería 0.5, mientras que si fuera $p = \frac{1}{3}$, dicho suceso tendría probabilidad igual a $\frac{4}{9} = 0.\widehat{4} < 0.5$. Por tanto, el método de la máxima verosimilitud propone dar como estimación de p, $\widehat{p} = \frac{1}{2}$.

Como hemos dicho, el método de la máxima verosimilitud propone como estimador del parámetro aquel que maximice la probabilidad del suceso observado, es decir, de la muestra observada. Es decir, aquel que maximice la función de masa o densidad de la muestra observada, $p(x_1,...,x_n;\theta)$ ó $f(x_1,...,x_n;\theta)$.

Pero al decir de la muestra observada estamos diciendo que en esa función, $x_1,...,x_n$, están fijas y lo que en realidad hacemos variar es θ con objeto de maximizar la función.

Para resaltar este hecho, a la función de probabilidad de la muestra -función de masa o de densidad- la representaremos por $L(\theta)$, y la denominaremos función de verosimilitud de la muestra,

$$L(\theta)=\begin{cases} p(x_1,...,x_n;\theta) & \text{si es discreta la variable} \\ \\ f(x_1,...,x_n;\theta) & \text{si es continua la variable}\end{cases}$$

El método de la máxima verosimilitud propone como estimador de θ aquel $\widehat{\theta}$ que maximice la función de verosimilitud,

$$L\left(\widehat{\theta}\right)=\max\{L(\theta):\forall\theta\}$$

Como el máximo de una función y el de su logaritmo se alcanzan en el mismo punto, habitualmente determinaremos el $\widehat{\theta}$ tal que

$$\ln L\left(\widehat{\theta}\right)=\max\{\ln L(\theta):\forall\theta\}$$

El cálculo de este máximo se determina de la forma habitual en la que se determinan los máximos de una función. Por tanto, de forma habitual, aunque no siempre, este máximo se hallará derivando respecto al parámetro o parámetros, igualando a cero y despejando.

Example 1 *Sea $(X_1,...,X_n)$ una muestra aleatoria simple de una distribución $\mathcal{P}(\lambda)$, siendo λ un parámetro desconocido. La función de verosimilitud será*

$$L(\lambda)=p(x_1,...,x_n;\lambda)=\frac{e^{-n\lambda}\lambda^{x_1+...+x_n}}{x_1!...x_n!}$$

y su logaritmo

$$\ln L(\lambda)=-n\lambda+\ln\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i-\ln\prod_{i=1}^{n}x_i!$$

La derivada respecto a λ igualada a cero -denominada ecuación de verosimilitud,

$$\frac{d}{d\lambda}\ln L(\lambda)=0$$

será

$$-n+\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}x_i=0$$

de donde despejando se obtiene como estimador de máxima verosimilitud para λ

$$\widehat{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

es decir, la media muestral $\overline{x}$.

67.1.3 Estimación de la media de una población normal

En esta sección estudiaremos cual debe ser el estimador a utilizar para estimar la media μ, cuando para la variable en estudio X se supone como modelo una $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$.

Además veremos cual es la distribución en el muestreo de ese estimador, de gran interés más adelante cuando determinemos los intervalos de confianza y los contrastes de hipótesis óptimos, correspondientes a μ.

Antes de empezar a obtener resultados, damos a continuación un teorema clave en dicha obtención.

Teorema 2 ***(de FISHER):*** *Sea $(X_1, ..., X_n)$ una muestra aleatoria simple de una población $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$. Entonces, si $\overline{x}$ y S^2 son respectivamente la media y cuasivarianza muestrales se tiene que*

(a) $\overline{x} \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

(b) $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \rightsquigarrow \chi^2_{n-1}$

(c) $\overline{x}$ *y* $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ *son independientes*

A partir de este teorema obtenemos los siguientes resultados:

σ conocida

Para estimar μ cuando la varianza es conocida es razonable utilizar como estimador la media muestral $\overline{x}$, siendo su distribución en el muestreo, normal de media μ y desviación típica $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Es decir,

$$\boxed{\frac{\overline{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)}$$

σ desconocida

Si σ es desconocida el resultado anterior acabado de obtener sigue siendo válido, pero de poco nos va a servir al depender la distribución en el muestreo de $\overline{x}$ de un parámetro desconocido.

Precisamente para esta situación fue para la que Student construyó su distribución.

Como una t de Student es el cociente entre una $\mathcal{N}(0,1)$ y la raiz cuadrada de una χ^2 dividida por sus grados de libertad, siendo ambas independientes, del teorema de Fisher obtenemos que

$$\frac{\frac{\overline{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}{\sqrt{\frac{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}}{n-1}}} \rightsquigarrow t_{n-1}$$

de donde simplificando se obtiene que

$$\boxed{\frac{\overline{x}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \rightsquigarrow \mathrm{t}_{n-1}}$$

Obsérvese que como para muestras grandes -digamos $n > 30$- la distribución t de Studeut se aproxima por una $\mathcal{N}(0,1)$, las probabilidades del cociente anterior se buscarán en las tablas de la normal en esos casos. De ahí que en ocasiones se hagan comentarios en el sentido de que la distribución t se utiliza en el caso de muestras pequeñas.

67.1.4 Estimación de la varianza de una población normal

Al igual que en las secciones anteriores, habrá que distinguir la situación en la que la media es conocida de la que no lo es.

μ desconocida

Si la media μ es desconocida, el teorema de Fisher ya nos indicaba que el estimador de la varianza en este supuesto debía de ser la cuasivarianza muestral S^2, ya que entre otras razones, al ser

$$\frac{(n-1)\,S^2}{\sigma^2} \rightsquigarrow \chi^2_{n-1}$$

será

$$E\left[\frac{(n-1)\,S^2}{\sigma^2}\right] = n-1$$

es decir, $E\left[S^2\right] = \sigma^2$, lo cual supone que S^2 posee una propiedad deseable en los estimadores.

Por tanto, si μ es desconocida el estimador a utilizar para estimar la varianza σ^2 es S^2 con distribución en el muestreo

$$\boxed{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \rightsquigarrow \chi^2_{n-1}}$$

μ conocida

Si μ es conocida, el caso anterior nos sugiere que el estimador a considerar sea similar al allí considerado pero utilizando, en lugar de la media muestral, la media poblacional μ ya que es conocida. Es decir, parece razonable utilizar el estimador

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$$

Además, como las X_i siguen distribución $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$, será $\frac{X_i-\mu}{\sigma}$ una $\mathcal{N}(0,1)$, con lo que será

$$\boxed{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2} \rightsquigarrow \chi_n^2}$$

por definición de la distribución χ^2.

67.2 Intervalos de confianza

67.2.1 Introducción

En la sección anterior estudiamos los principales estimadores que razonablemente deberíamos utilizar en cada una de las situaciones que allí se planteaban, las cuales se corresponden con las que habitualmente suelen suponerse como modelos probabilísticos.

Así, si queremos estimar la talla media, θ, de los individuos de una determinada población, supuesto que ésta sigue una distribución normal $\mathcal{N}(\theta,1)$, vimos en la sección anterior que razonablemente deberemos utilizar la media muestral $\overline{x}$ para estimar θ.

Los estimadores allí estudiados, estimaban parámetros poblacionales puntualmente, es decir, eran funciones de la muestra que hacían corresponder a cada valor de ésta un único número, de entre los posibles valores que puede tomar el parámetro, el cual razonablemente será una buena estimación de éste.

No obstante, rara vez coincidirá esta estimación puntual con el desconocido valor del parámetro. Es decir, rara vez la media de la muestra seleccionada al azar será tal que $\overline{x}=\theta$.

Es, sin duda, mucho más interesante concluir la inferencia con un intervalo de posibles valores del parámetro -al que denominaremos intervalo de confianza-, de forma que el desconocido valor de éste se encuentre en dicho intervalo con una probabilidad todo lo alta que deseemos.

Así por ejemplo, es mucho más deseable concluir afirmando que la media poblacional θ está entre $\overline{x}-0.1$ y $\overline{x}+0.1$, con probabilidad 0.99, que diciendo que la media muestral $\overline{x}$ es un buen estimador de θ.

Con objeto de aumentar la precisión de la inferencia, serán deseables intervalos de confianza lo más cortos posibles.

No obstante, la longitud del intervalo de confianza dependerá de lo alta que queramos que sea la probabilidad con la que dicho intervalo -cuyos extremos son aleatorios- cubra a θ.

Así, si queremos determinar dos puntos a y b tales que

$$P(\overline{x}-a<\theta<\overline{x}+b)=1-\alpha$$

al suponer $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\theta, 1)$, será

$$\frac{\overline{x} - \theta}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$$

Como puede demostrarse que entre todos los a y b que cumplen la ecuación anterior, el intervalo más corto es el que $a = -b$, escribiremos la ecuación anterior de la forma

$$P(-c < \overline{x} - \theta < c) = 1 - \alpha$$

o lo que es lo mismo, tipificando

$$P\left(|Z| < \frac{c}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) = 1 - \alpha$$

con $Z \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$. Por tanto, deberá ser

$$c = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}$$

en donde $z_{\alpha/2}$ es el valor de la abscisa de una $\mathcal{N}(0, 1)$ que deja a su derecha bajo la función de densidad un área de probabilidad $\alpha/2$.

El intervalo buscado es

$$\left]\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right[$$

Como se ve, su longitud

$$2z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

depende de la probabilidad $1 - \alpha$ elegida en su construcción, a la que denominaremos coeficiente de confianza.

Cuanto mayor sea esta probabilidad, más grande será $z_{\alpha/2}$ y por tanto, mayor su longitud. Así pues, antes de construir un intervalo de confianza, habrá que prefijar cuidadosamente el valor del coeficiente de confianza de forma que la "probabilidad con la que confiamos" el intervalo cubra al desconocido valor del parámetro sea alta, pero conservando inferencias válidas.

Así, de poco interés resulta concluir que hay probabilidad 0.999 de que el intervalo (en metros) $]\overline{x} - 2, \overline{x} + 2[$, cubra la estatura media de la población.

Los coeficientes de confianza que de forma estándar se toman son 0.90, 0.95 y 0.99, aunque esto dependerá del investigador, el cual deberá tener siempre en cuenta las observaciones anteriores. Así, en este caso, por ejemplo, una varianza poblacional σ^2 pequeña o un tamaño muestral grande pueden permitir un mayor coeficiente de confianza sin un aumento excesivo de la longitud del intervalo.

Formalmente definimos el intervalo de confianza para un parámetro θ de la siguiente manera.

Definición 3 *Sea X una variable aleatoria cuya distribución depende de un parámetro desconocido θ, $X_1, ..., X_n$ una muestra aleatoria simple de dicha población y sean $T_1(X_1, ..., X_n)$ y $T_2(X_1, ..., X_n)$ dos estimadores tales que*

$$P\{T_1(X_1, ..., X_n) < \theta < T_2(X_1, ..., X_n)\} = 1 - \alpha$$

El intervalo

$$]T_1(X_1, ..., X_n), T_2(X_1, ..., X_n)[$$

recibe el nombre de intervalo de confianza para θ de coeficiente de confianza $1 - \alpha$.

Obsérvese que tiene sentido hablar de que, antes de tomar la muestra, el intervalo aleatorio

$$]T_1(X_1, ..., X_n), T_2(X_1, ..., X_n)[$$

cubra al verdadero y desconocido valor del parámetro θ con probabilidad $1 - \alpha$, pero una vez elegida una muestra particular $x_1, ..., x_n$, el intervalo no aleatorio

$$]T_1(x_1, ..., x_n), T_2(x_1, ..., x_n)[$$

cubrirá o no a θ, pero ya no tiene sentido hablar de la probabilidad con que lo cubre.

Es decir, podemos hacer afirmaciones del tipo de que en un $100(1 - \alpha)\%$ de las veces, el intervalo que obtengamos cubrirá al parámetro, pero nunca de que, por ejemplo, hay probabilidad $1 - \alpha$ de que el intervalo de confianza $]1.65, 1.83[$ cubra al parámetro, ya que los extremos de este último intervalo y como siempre el parámetro son números y no variables aleatorias.

Obsérvese también que el intervalo de confianza es un subconjunto de los posibles valores del parámetro precisamente por ser no aleatorio.

Por último, mencionemos que cualquier par de estimadores T_1 y T_2 que cumplan la condición impuesta en la definición anterior dará lugar a un intervalo de confianza.

Habitualmente éstos serán dos funciones del estimador natural obtenido para cada caso en la sección anterior.

De hecho, en las siguientes secciones indicaremos cual es el intervalo de confianza que razonablemente debe usarse en cada situación concreta, omitiendo su obtención en la mayoría de los casos, la cual parte siempre de la correspondiente distribución en el muestreo obtenida en las secciones anteriores. La determinación del intervalo de confianza en las situaciones omitidas, constituye un buen ejercicio para el lector.

Advertimos, finalmente, que las situaciones que aquí analizaremos se corresponden con las que aparecen de forma habitual en los problemas prácticos de inferencia, aunque, claro está, no son las únicas posibles.

Existen métodos generales de obtención de intervalos de confianza -como el método de Neyman o el de la cantidad pivotal- los cuales permitirían determinar el intervalo de confianza en modelos poblacionales aquí no considerados.

No obstante, su análisis, especialmente para variables discretas, no es tan sencillo como el del método de la máxima verosimilitud estudiado en la sección anterior para la obtención de estimadores puntuales, por lo que serán omitidos.

Respecto a la notación que utilizaremos, tanto en los intervalos de confianza como en el resto de las secciones, digamos que denotaremos por z_p, $t_{n;p}$, $\chi^2_{n;p}$ y $F_{n_1,n_2,p}$, respectivamente el valor de la abscisa de una $\mathcal{N}(0,1)$, t_n, χ^2_n y F_{n_1,n_2} que deja a su derecha -bajo la correspondiente función de densidad- un área de probabilidad p.

67.2.2 Intervalo de confianza para la media de una población normal

Tanto en esta sección como en las siguientes, determinaremos intervalos de confianza de colas iguales. Es decir, aquellos tales que dejan en cada uno de los extremos la mitad de la probabilidad, $\alpha/2$.

Aquí suponemos que los n datos provienen de una población $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$, y lo que pretendemos determinar es el intervalo de confianza para la media μ.

Como vimos en la sección correspondiente, en esta situación, tanto si la varianza poblacional σ^2 es conocida como si no lo es, el estimador natural de μ es la media muestral $\overline{x}$, por lo que determinar un intervalo de confianza para μ significa buscar un número c tal que

$$P\{\overline{x}-c<\mu<\overline{x}+c\}=1-\alpha$$

es decir, tal que

$$P\{-c<\overline{x}-\mu<c\}=1-\alpha$$

o bien

$$P\{|\overline{x}-\mu|<c\}=1-\alpha$$

σ conocida

La distribución en el muestreo de $\overline{x}$ es en este caso,

$$\overline{x}\rightsquigarrow\mathcal{N}\left(\mu,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

con lo que tipificando será

$$P\left\{|Z|<\frac{c}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right\}=1-\alpha$$

es decir,

$$c=z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

El intervalo buscado será, por tanto,

$$\boxed{\left]\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right[}$$

σ desconocida

En este caso la media muestral tiene por distribución

$$\frac{\overline{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \rightsquigarrow t_{n-1}$$

con lo que

$$P\left\{|\overline{x} - \mu| < c\right\} = 1 - \alpha$$

será equivalente a

$$P\left\{|t_{n-1}| < \frac{c}{\frac{S}{\sqrt{n}}}\right\} = 1 - \alpha$$

de donde se obtiene

$$c = t_{n-1;\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}$$

Así pues, en el caso de que la varianza poblacional sea desconocida, el intervalo de confianza para la media será

$$\boxed{\left]\overline{x} - t_{n-1;\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}, \overline{x} + t_{n-1;\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}\right[}$$

siendo S^2 la cuasivarianza muestral.

67.2.3 Intervalo de confianza para la varianza de una población normal

Dada una muestra aleatoria simple $X_1, ..., X_n$ de una población $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$, vamos a determinar el intervalo de confianza para σ^2, distinguiendo dos casos según sea desconocida o no la media de la población μ.

μ desconocida

Como antes dijimos, queremos determinar el intervalo de colas iguales. Como es

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \rightsquigarrow \chi^2_{n-1}$$

podemos encontrar en las tablas de la χ^2 dos abscisas tales que

$$P\left\{\chi^2_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}} < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{n-1;\frac{\alpha}{2}}\right\} = 1 - \alpha$$

de donde, despejando, se obtiene que

$$P\left\{\frac{(n-1)\,S^2}{\chi^2_{n-1;\frac{\alpha}{2}}}<\sigma^2<\frac{(n-1)\,S^2}{\chi^2_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}}\right\}=1-\alpha$$

es decir, el intervalo de confianza buscado será

$$\boxed{\mathrm{I}=\left]\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1;\frac{\alpha}{2}}},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}}\right[}$$

con S^2 la cuasivarianza muestral.

μ **conocida**

En este caso, el intervalo de confianza será

$$\boxed{\mathrm{I}=\left]\frac{\sum_{i=1}^{k}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{n;\frac{\alpha}{2}}},\frac{\sum_{i=1}^{k}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{n;1-\frac{\alpha}{2}}}\right[}$$

67.3 Contraste de hipótesis

67.3.1 Introducción y conceptos fundamentales

En este tema trataremos el contraste de hipótesis que es, sin duda alguna, la técnica estadística más utilizada desde un punto de vista práctico.

Como ilustración de los conceptos que aquí se irán definiendo, supongamos que estamos interesados en averiguar si el consumo habitual de un determinado producto modifica el nivel estándar de colesterol en las personas aparentemente sanas, el cual está fijado en $200mg/dl$[1].

El primer punto a considerar en un contraste de hipótesis es precisamente ese; el establecer las hipótesis que se quieren contrastar, es decir, comparar.

Así, si en el ejemplo representamos por μ el nivel medio de colesterol en la sangre de las personas que consumen habitualmente el producto en cuestión, el problema qne tenemos planteado consiste en decidir si μ puede considerarse igual a 200 (el producto no modifica el nivel de colesterol) o distinto de 200 (el producto modifica el contenido de colesterol).

Una de las dos hipótesis, generalmente la que corresponde a la situación estándar recibe el nombre de hipótesis nula H_0, mientras que la otra recibe el nombre de hipótesis alternativa H_1, siendo el contraste de hipótesis el proceso de decisión basado en técnicas estadísticas mediante las cuales decidimos -inferimos- cual de las dos hipótesis creemos correcta, aceptándola y rechazando en consecuencia la otra, midiendo en dicho proceso los dos posibles errores que

[1] Actualmente se sabe que un nivel alto de colesterol es perjudicial en enfermedades cardiovasculares, pero que, sin embargo, éste es necesario en la creación de defensas por parte del organismo, por lo que también se consideran perjudiciales niveles bajos de colesterol.

podemos cometer -aceptar H_0 cuando es falsa o rechazar H_0 cuando es cierta- en términos de probabilidades.

Así, nuestro problema se puede plantear diciendo que lo que queremos es realizar el contraste de la hipótesis nula $H_0 : \mu = 200$, frente a la alternativa $H_1 : \mu \neq 200$.

Como todas las técnicas estadísticas, las utilizadas en el contraste de hipótesis se basan en la observación de una muestra, la cual aportará la información necesaria para poder decidir, es decir, para poder contrastar las hipótesis.

Es decir, si X representa la variable en observación -nivel de colesterol en la sangre-, el contraste de hipótesis concluirá formulando una regla de actuación denominada también contraste de hipótesis o por no ser excesivamente redundante, test de hipótesis utilizando la terminología anglosajona la cual estará basada en una muestra de X de tamaño n, o más en concreto en una función suya denominada estadistico del contraste T, y que habitualmente será una función del estimador natural asociado al parámetro del que se quieren contrastar las hipótesis.

En la realización de un contraste de hipótesis suele ser habitual suponer un modelo probabilístico para la variable X, en cuyo caso hablaremos de contrastes paramétricos, en contraposición con los denominados contrastes no pararamétricos que no estudiaremos, en los que sólo serán necesarias suposiciones generales sobre el modelo probabilístico, tales como la simetría o continuidad de éste.

En todo caso, será imprescindible determinar la distribución en el muestreo del estadístico del test T, ya que la filosofía del contraste de hipótesis depende de su distribución en el muestreo, pudiendo formularse de la siguiente manera: Si fuera cierta la hipótesis nula H_0, la muestra, o mejor T, debería de comportarse de una determinada manera -tener una determinada distribución de probabilidad-. Si extraída una muestra al azar, acontece un suceso para T que tenía poca probabilidad de ocurrir si fuera cierta H_0, es decir, bajo H_0 o bien es que hemos tenido tan mala suerte de haber elegido una muestra “muy rara” , o, lo que es más probable, la hipótesis nula era falsa. La filosofía del contraste de hipótesis consiste en admitir la segunda posibilidad, rechazando en ese caso H_0, aunque acotando la probabilidad de la primera posibilidad, mediante lo que más adelante denominaremos nivel de significación.

Así en nuestro ejemplo, parece razonable elegir al azar n personas aparentemente sanas, a las que tras haber consumido el producto en cuestión midiéramos su nivel de colesterol en sangre, razonando de la siguiente forma: si la hipótesis nula $H_0 : \mu = 200$ fuera cierta, el estimador natural de μ -la media de la muestra obtenida $\overline{x}$- tomaría un valor “cercano” a 200; si tomada una muestra este estimador está “lejos” de 200 deberemos rechazar H_0.

No obstante, los términos “cercano” y “lejano” deben ser entendidos en el sentido de algo con gran probabilidad de ocurrir o poca probabilidad de ocurrir, para lo cual necesitaremos conocer la distribución en el muestreo de T.

Además, estos términos dependen de la magnitud de los errores que estemos dispuestos a admitir, medidos éstos en términos de probabilidades. Puntualicemos estas ideas un poco más.

Errores de tipo I y de tipo II

Para determinar con precisión la regla de actuación en cada caso concreto, debemos considerar los dos errores posibles que podemos cometer al realizar un contraste de hipótesis, los cuales, como antes dijimos, son el de rechazar la hipótesis nula H_0 cuando es cierta, denominado error de tipo I o el de aceptar H_0 cuando es falsa, denominado error de tipo II.

Ambos errores son de naturaleza bien distinta; así en el ejemplo considerado, si rechazamos H_0 cuando es cierta, tendremos un coste económico derivado de prohibir un producto no perjudicial, pero si aceptamos H_0 cuando es falsa y permitimos el consumo del producto, pueden producirse graves perjuicios en la salud de los consumidores.

La Estadística Matemática ha deducido tests de hipótesis, es decir reglas de actuación, siguiendo el criterio de fijar una cota superior para la probabilidad de error de tipo I, denominada nivel de significación, que mazimizan $1-P\{$error de tipo II$\}$, expresión ésta última denominada potencia del contraste.

Así, los tests que estudiemos serán tests de máxima potencia para un determinado nivel de significación α.

Región crítica y región de aceptación

Los tests de hipótesis, expresados siempre en función de un estadístico T adecuado al problema en cuestión, son de la forma

$$\begin{cases} \text{Aceptar } H_0 & \text{si } T \in C^* \\ \text{Rechazar } H_0 & \text{si } T \in C \end{cases}$$

en donde C y C^* son dos conjuntos disjuntos en los que se ha dividido el conjunto de valores posibles de T. C recibe el nombre de región crítica del test, y se corresponde con el conjunto de valores de T en donde se rechaza la hipótesis nula H_0.

El conjunto complementario, C^*, se denomina región de aceptación y se corresponde, como su nombre indica, con el conjunto de valores del estadístico para los cuales se acepta H_0.

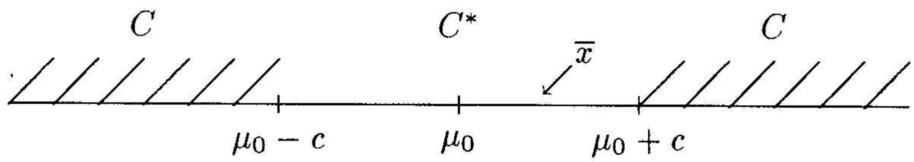
Por completar la terminología propia de los contrastes de hipótesis, diremos que un test es bilateral cuando C esté formada por dos intervalos disjuntos y unilateral cuando la región crítica sea un intervalo.

Por último, se dice que una hipótesis nula o alternativa es simple cuando esté formada por un sólo valor. Si está formada por más de uno, se denomina compuesta. Así, el ejemplo considerado se trata de un contraste de hipótesis nula simple -en H_0 está solo el 200- frente a alternativa compuesta -en H_1 están todos los valores menos el 200-.

Siguiendo con el mencionado ejemplo, y denotanto $\mu_0 = 200$, hemos dicho que razonablemente deberemos aceptar H_0 cuando $\overline{x}$ esté “cerca” de μ_0, ver figura, es decir, cuando sea

$$\mu_0 - c < \overline{x} < \mu_0 + c$$

para un c relativamente pequeño



o bien, haciendo operaciones, cuando

$$|\overline{x} - \mu_0| < c$$

Es decir, si $H_0 : \mu = 200$ fuera cierta, cabría esperar que $\overline{x}$ tomara un valor cercano a μ_0 -en concreto del intervalo $]\mu_0 - c, \mu_0 + c[$- con gran probabilidad, $1 - \alpha$, dependiendo el valor de c de esta probabilidad.

Si observada una muestra concreta, $\overline{x}$ no cae en el intervalo anterior, siguiendo la filosofía del contraste de hipótesis, rechazaremos H_0, siendo, en consecuencia, el mencionado intervalo la región de aceptación del test.

Determinemos el valor de la constante c : Si queremos que la probabilidad de cometer un error de tipo I, es decir, el nivel de significación sea α, deberá ser

$$P\{\overline{x} \in C\} = P\{|\overline{x} - \mu_0| > c\} = \alpha$$

es decir,

$$P\{|\overline{x} - \mu_0| < c\} = 1 - \alpha$$

cuando H_0 es cierta, es decir, cuando $\mu = \mu_0$.

Ahora debemos distinguir diversas situaciones. Si, por ejemplo, admitimos un modelo poblacional normal, es decir, que $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma)$, sabemos por las secciones anteriores, que al no conocer la varianza poblacional, la distribución de $\overline{x}$ es

$$\frac{\overline{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \rightsquigarrow t_{n-1}$$

con lo que, en la expresión anterior, c deberá ser tal que

$$P\left\{|t_{n-1}| < \frac{c\sqrt{n}}{S}\right\} = 1 - \alpha$$

es decir,

$$c = t_{n-1;\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}$$

con lo que, en definitiva, nuestros razonamientos intuitivos nos han llevado a considerar como test de hipótesis para contrastar a nivel α, $H_0 : \mu = \mu_0$ frente a $H_1 : \mu \neq \mu_0$ el siguiente,

$$\begin{cases} \text{Se acepta } H_0 \text{ si} & \frac{|\overline{x}-\mu_0|}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \leq t_{n-1;\frac{\alpha}{2}} \\ \text{Se rechaza } H_0 \text{ si} & \frac{|\overline{x}-\mu_0|}{\frac{S}{\sqrt{n}}} > t_{n-1;\frac{\alpha}{2}} \end{cases}$$

La Estadística Matemática nos dice que este test es óptimo en el sentido que mencionábamos más arriba.

En concreto, si elegida una muestra aleatoria simple de tamaño $n = 10$ se obtuvo una media muestral $\overline{x} = 202$ y una cuasivarianza muestral de $S^2 = 289$, el contraste $H_0 : \mu = \mu_0$ frente a $H_1 : \mu \neq \mu_0$ lleva a aceptar H_0 a nivel $\alpha = 0.05$ por ser

$$\frac{|202 - 200|}{\sqrt{\frac{289}{10}}} = 0.372 < 2.262 = t_{9;0.025}$$

es decir, a concluir que no hay diferencia significativa a ese nivel.

La deducción exacta de cada contraste óptimo depende de la situación concreta que se tenga: hipótesis de normalidad, muestras grandes, etc., ya que cada una de estas situaciones implica una distribución en el muestreo del estadístico a considerar.

De hecho, la determinación del estadístico a considerar en cada caso, es decir, la forma del contraste -es mucho más compleja que la determinación del estimador natural- método de la máxima verosimilitud- o la del intervalo de confianza correspondiente, ya omitida en el capítulo anterior, y depende de sofisticados métodos de la Estadística Matemática, los cuales están fuera del alcance de este tema.

Relación entre intervalos de confianza y tests de hipótesis

En el ejemplo anterior, aceptábamos $H_0 : \mu = \mu_0$ cuando

$$\frac{|\overline{x} - \mu_0|}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \leq t_{n-1;\frac{\alpha}{2}}$$

o bien, haciendo operaciones, cuando

$$\mu_0 \in \left]\overline{x} - t_{n-1;\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}, \overline{x} + t_{n-1;\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}\right[$$

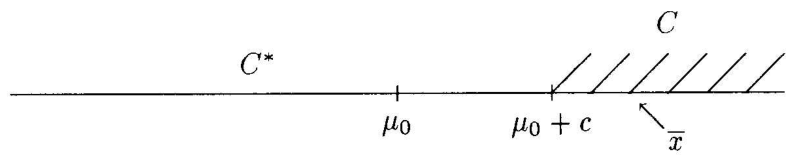
es decir, cuando la hipótesis nula pertenece al intervalo de confianza correspondiente.

Este es un hecho bastante frecuente, aunque no una propiedad general, de los contrastes del tipo $H_0 : \theta = \theta_0$ frente a $H_0 : \theta \neq \theta_0$. El intervalo de confianza, de coeficiente de confianza uno menos el nivel de significación, constituye la región de aceptación del test.

Tests de hipótesis unilaterales

Supongamos en el ejemplo antes considerado, que el producto en cuestión es un "snack" elaborado con un determinado aceite. El interés estará entonces centrado en saber si este producto aumenta el nivel medio de colesterol o no. Es decir, en contrastar las hipótesis $H_0 : \mu \leq 200$ frente a $H_1 : \mu > 200$.

Ahora parece claro que la región crítica sea unilateral, ver figura, del tipo $\mu_0 + c$.



Si la probabilidad de error de tipo I es de nuevo α, deberá ser

$$P_{\mu=\mu_0}\{\overline{x} > \mu_0 + c\} = \alpha$$

Si admitimos la misma situación poblacional anterior, será de nuevo

$$\frac{\overline{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \rightsquigarrow t_{n-1}$$

con lo que en la expresión anterior, c deberá ser tal que

$$P\left\{t_{n-1} > \frac{c\sqrt{n}}{S}\right\} = \alpha$$

es decir,

$$c = t_{n-1;\alpha}\frac{S}{\sqrt{n}}$$

con lo que se llegaría en definitiva a considerar como test de nivel α para contrastar $H_0 : \mu \leq \mu_0$ frente a $H_1 : \mu > \mu_0$ el siguiente,

$$\begin{cases} \text{Se acepta } H_0 \text{ si} & \frac{\overline{x}-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \leq t_{n-1;\alpha} \\ & \\ \text{Se rechaza } H_0 \text{ si} & \frac{\overline{x}-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} > t_{n-1;\alpha} \end{cases}$$

En el ejemplo considerado, al ser

$$\frac{202 - 200}{\sqrt{\frac{289}{10}}} = 0.372 < 1.833 = t_{9;0.05}$$

se acepta $H_0 : \mu \leq 200$ al contrastarla frente a $H_1 : \mu > 200$, a nivel $\alpha = 0.05$.

P-valor

Una crítica que puede plantearse respecto a la técnica de los tests de hipótesis, es la dependencia de nuestros resultados del nivel de significación elegido antes de efectuar el contraste.

Así surge de forma natural la pregunta: ¿Qué hubiera pasado en el ejemplo anterior si hubiéramos elegido otro α mucho mayor?. ¿Se seguiría aceptando H_0?.

La respuesta evidente es que depende de lo grande que sea α. Si para fijar ideas nos centramos en el contraste unilateral, al ser

$$\frac{\overline{x}-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \rightsquigarrow t_9$$

y haber resultado un valor para el estadístico del contraste

$$\frac{\overline{x}-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{202-200}{\sqrt{\frac{289}{10}}} = 0.372$$

si hubiéramos elegido por ejemplo $\alpha = 0.4$, hubiéramos rechazado H_0, ya que $t_{9;0.4} = = 0.261 < 0.372$, aunque obsérvese que en este caso la probabilidad de equivocarnos -rechazar H_0 siendo cierta- sería muy grande, $\alpha = 0.4$.

Parece razonable, por tanto, que independientemente del nivel de significación que hubiéramos elegido, debamos aceptar H_0, puesto que el nivel de significación más pequeño que hubiéramos tenido que elegir para rechazar H_0 es demasiado grande como para admitir tal probabilidad de error de tipo I.

Este nivel de significación observado recibe el nombre de p-valor y se define con más precisón como el mínimo nivel de significación necesario para rechazar H_0.

Obsérvese que al realizar un contraste de hipótesis debemos fijar un nivel de significación antes de tomar la muestra, que habitualmente suele ser 0.1, 0.05 ó 0.01 , y para ese nivel de significación elegido, aceptar o rechazar H_0. Siempre se llega, por tanto, a una conclusión.

El cálculo del p-valor permite valorar la decisión ya tomada de rechazar o aceptar H_0, de forma que un p-valor grande -digamos 0.2 ó mayor- confirma una decisión de aceptación de H_0. Tanto más nos lo confirma cuanto mayor sea el p-valor.

Por contra, un p-valor pequeño -digamos 0.01 ó menor- confirma una decisión de rechazo de H_0. Tanto más se nos confirmará esta decisión de rechazo cuanto menor sea el p-valor.

En situaciones intermedias, el p-valor no nos indica nada concreto salvo que quizas sería recomendable elegir otra muestra y volver a realizar el contraste.

Si una persona ha tomado una decisión que el p-valor contradice, confirmando éste precisamente la decisión contraria a la adoptada, el individuo lógicamente cambiará su decision.

Por esta razón muchos de los usuarios de las técnicas estadísticas aplicadas no fijan ya el nivel de significación; simplemente hacen aparecer al final de sus trabajos el p-valor (el cual en muchos paquetes estadísticos se denomina tail probability), sacando conclusiones si éste se lo permite o simplemente indicándolo de forma que el lector las saque.

Esta postura, criticable en principio, no lo es más que la de otros investigadores que consideran -por definición- significativo un contraste para un p-valor menor que 0.05, o la de aquellos otros que sólo contrastan hipótesis a "una estrella", "dos estrellas" o "tres estrellas", entendiendo[2] estos "niveles de significación" respectivamente como 0.1, 0.05 *y* 0.01.

En nuestro ejemplo, el p-valor del contraste unilateral será

$$p-\text{ valor } = P\left\{t_9 > 0.372\right\} = 0.35925$$

y en el bilateral

$$p-\text{ valor } = P\left\{|t_9| > 0.372\right\} = 2P\left\{t_9 > 0.372\right\} = 0.7185$$

En su determinación hemos empleado unas tablas muy precisas de la t de Student. Por el significado del p-valor no es necesario llegar a tal precisión, ya que basta con dejarlo acotado, pudiendo haber concluido estos ejemplos, diciendo que en el primer caso es

$$0.3 < p-\text{ valor } < 0.4$$

y en el segundo

$$0.6 < p-\text{ valor } < 0.8$$

de interpretación suficientemente clara en ambos casos -aceptar H_0-, especialmente en el segundo.

Contrastes óptimos

Ante una situación concreta que se nos plantee, la determinaaón del contraste óptimo, al igual que ocurría con los intervalos de confianza, dependerá, fundamentalmente, de las suposiciones que se hagan en el modelo: normalidad, varianza (o varianzas) conocidas o desconocidas, muestras pequeñas o grandes, ..., y, fundamentalmente, de las hipótesis que se deseen contrastar.

En las siguientes secciones de este capítulo, veremos los tests que la Estadística Matemática propone como óptimos en cada una de las situaciones que se consideran.

Las que veremos son las que más frecuentemente suelen plantearse desde un punto de vista práctico, aunque no las únicas.

Las reglas tests expuestos en éste, son las consideradas como óptimas en las situaciones que se enuncian, pero su correcta utilización, o mejor dicho, el correcto planteamiento de la situación óptima ante un problema concreto que se nos presente, requiere de mucha experiencia y con frecuencia del consejo de un profesional.

Hemos ilustrado estas situaciones con ejemplos, con el propósito no sólo de que el lector pueda irse convirtiendo en profesional, sino también -y quizás fundamentalmente- para que adquiera el suficiente conocimiento y lenguaje que le permita entenderse de forma eficaz con alguno que ya lo sea.

Como hemos advertido, no deduciremos el test óptimo, sino que simplemente lo enunciaremos.

[2] admitamos la presunción de conocimiento de dichos individuos

67.3.2 Contraste de hipótesis relativas a la media de una población normal

Supongamos que tenemos una muestra aleatoria simple $X_1, ..., X_n$ procedente de una población $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ y que queremos contrastar hipótesis relativas a la media de la población, μ.

Consideraremos el caso de "igual" frente a "distinta", es decir, el caso en que queremos contrastar si puede admitirse para la media poblacional un determinado valor μ_0 o no.

$$\boxed{\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{cases}}$$

En este caso, al igual que ocurre con todos los de "igual" frente a "distinta" la región de aceptación se corresponde con el intervalo de confianza determinado en la sección anterior, aceptándose H_0 cuando y sólo cuando ésta pertenezca al intervalo de confianza.

Así, si suponemos σ **conocida**, fijado un nivel de significación α, aceptaremos $H_0 : \mu = \mu_0$ cuando y sólo cuando

$$\mu_0 \in \left]\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right[$$

o equivalentemente, haciendo operaciones, cuando

$$\frac{|\overline{x} - \mu_0|}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq z_{\frac{\alpha}{2}}$$

con lo que podemos concluir diciendo que el test óptimo en esta situación es

$$\boxed{\begin{cases} \text{Se acepta } H_0 \text{ si} & \frac{|\overline{x}-\mu_0|}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq z_{\frac{\alpha}{2}} \\ \\ \text{Se rechaza } H_0 \text{ si} & \frac{|\overline{x}-\mu_0|}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > z_{\frac{\alpha}{2}} \end{cases}}$$

Si se supone σ **desconocida**, la distribución en el muestreo de la media muestral determinada anteriormente, lleva a considerar que el test óptimo en este caso es

$$\boxed{\begin{cases} \text{Se acepta } H_0 \text{ si} & \frac{|\overline{x}-\mu_0|}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \leq t_{n-1;\frac{\alpha}{2}} \\ \\ \text{Se rechaza } H_0 \text{ si} & \frac{|\overline{x}-\mu_0|}{\frac{S}{\sqrt{n}}} > t_{n-1;\frac{\alpha}{2}} \end{cases}}$$

a nivel de significación α.

Consideremos ahora el siguiente contraste de hipótesis:

$$\boxed{\begin{cases} H_0 : \mu \leq \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{cases}}$$

El estudio de los contrastes unilaterales es de suma importancia en el análisis de la efectividad de nuevos productos, donde el aumento de su efectividad -$H_1 : \mu > \mu_0-$ o la disminución de alguna característica negativa asociada, como por ejemplo el tiempo que tarda en hacer efecto -$H_1 : \mu > \mu_0$- son las hipótesis de interés.

En estos casos, el objetivo es rechazar H_0 con un p-valor pequeño, lo que lleva a inferir la hipótesis de interés -H_1- con un error -rechazar H_0 siendo cierta- pequeño en la inferencia -el p-valor.

La distribución en el muestreo de $\overline{x}$ en los supuestos que se establecen, así como las consideraciones hechas al hablar de las hipótesis unilaterales, llevan a la Estadística Matemática a proponer como test óptimo para contrastar $H_0 : \mu \leq \mu_0$ frente a $H_1 : \mu >> \mu_0$, el siguiente:

Si σ es conocida

$$\boxed{\begin{cases} \text{Se acepta } H_0 \text{ si} & \frac{\overline{x}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq z_\alpha \\ \\ \text{Se rechaza } H_0 \text{ si} & \frac{\overline{x}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > z_\alpha \end{cases}}$$

Si σ es desconocida

$$\boxed{\begin{cases} \text{Se acepta } H_0 \text{ si} & \frac{\overline{x}-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \leq t_{n-1;\alpha} \\ \\ \text{Se rechaza } H_0 \text{ si} & \frac{\overline{x}-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} > t_{n-1;\alpha} \end{cases}}$$

Por último consideramos el siguiente test de hipótesis:

$$\boxed{\begin{cases} H_0 : \mu \geq \mu_0 \\ H_1 : \mu < \mu_0 \end{cases}}$$

Los mismos razonamientos anteriores llevan a proponer los siguientes tests para las hipótesis simétricas aquí consideradas.

Si σ es conocida

$$\boxed{\begin{cases} \text{Se acepta } H_0 \text{ si} & \frac{\overline{x}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \geq z_{1-\alpha} \\ \\ \text{Se rechaza } H_0 \text{ si} & \frac{\overline{x}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < z_{1-\alpha} \end{cases}}$$

Si σ es desconocida

$$\boxed{\begin{cases} \text{Se acepta } H_0 \text{ si} & \frac{\overline{x}-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \geq t_{n-1;1-\alpha} \\ \\ \text{Se rechaza } H_0 \text{ si} & \frac{\overline{x}-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} < t_{n-1;1-\alpha} \end{cases}}$$