Tema 66

Distribuciones de probabilidad de variable continua. Características y tratamiento. La distribución normal. Aplicaciones

66.1 Conceptos básicos en Teoría de la Probabilidad

Sea Ω un conjunto arbitrario y notemos por $\mathcal{P}(\Omega)$ al conjunto de sus partes.

Definición 1 *$\mathcal{C}$ es una clase de conjuntos de Ω sii $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$.*

Definición 2 *Se dice que una clase $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ es una $\sigma-$ álgebra*[1] *sii verifica las siguientes propiedades:*

(1) $\emptyset \in \mathcal{C}$

(2) $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{C} \Rightarrow \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{C}$

(3) $A \in \mathcal{C} \Rightarrow A^c \in \mathcal{C}$

Algunas **propiedades** de los $\sigma-$ campos que se deducen de la definición son:

(a) $\Omega \in \mathcal{C}$

[1] También es usual llamar $\sigma-$ campos a las $\sigma-$ álgebras.

(*b*) $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{C} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{C}$

Definición 3 *Un $\sigma-$ campo minimal sobre la clase $\mathcal{H}$ (o $\sigma-$ campo generado por $\mathcal{H}$) es la mínima clase con estructura de $\sigma-$ campo que contiene a la clase $\mathcal{H}$, y lo notaremos por $\sigma(\mathcal{H})$.*

Consideremos $\mathbb{R}$ como conjunto base y sea $\mathcal{Y} = \{I \subset \mathbb{R} : I \text{ es un intervalo}\}$ una clase de conjuntos de $\mathbb{R}$. Notaremos $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{Y})$ y lo llamaremos $\sigma-$ campo de Borel de $\mathbb{R}$ (la demostración de que es un $\sigma-$ campo se deja como ejercicio).

Definición 4 *El par $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ se denomina espacio de Borel unidimensional y cada $B \in \in \mathcal{B}$ se dice que es un conjunto de Borel o boreliano.*

Algunos **ejemplos** de conjuntos de Borel son:

(1) Cualquier intervalo de $\mathbb{R}$ es un conjunto de Borel

(2) Los números reales son conjuntos de Borel

(3) Los conjuntos abiertos, los cerrados, los finitos y los numerables son conjuntos de Borel.

¡¡OJO!! Existen subconjuntos de $\mathbb{R}$ que no son conjuntos Borel.

Definición 5 *Sea Ω un conjunto arbitrario y $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ una clase de conjuntos. Una función de conjunto es una función numérica $\varphi : \mathcal{C} \to \widehat{\mathbb{R}}$, donde $\widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ es la compactificación de $\mathbb{R}$ por dos puntos.*

Definición 6 *Al par $(\Omega, \mathcal{A})$ formado por un conjunto arbitrario Ω y un $\sigma-$ campo $\mathcal{A}$ sobre Ω se le denomina espacio medible. Además, si $A \subset \Omega$ es tal que $A \in \mathcal{A}$ se dice que A es un conjunto medible.*

Definición 7 *Sea $(\Omega, \mathcal{A})$ un espacio medible. Una función de probabilidad o medida de probabilidad sobre $(\Omega, \mathcal{A})$ es una función de conjunto $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ que verifica:*

(*i*) $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \qquad \forall \{A_n\} \subset \mathcal{A}$ *disjuntos*

(*ii*) $P(A) \geq 0 \qquad \forall A \in \mathcal{A}$

(*iii*) $P(\Omega) = 1$

En este caso, la terna $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ se denomina espacio de probabilidad.

Definición 8 *Dados dos espacios medibles $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ y $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$, diremos que una aplicación $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ es medible sii $\forall A \in \mathcal{A}_2 \quad f^{-1}(A) \in \mathcal{A}_1$.*

Definición 9 *Una función medible es una aplicación medible $f : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$.*

Definición 10 *Una variable aleatoria es una función medible definida sobre un espacio de probabilidad, es decir,*

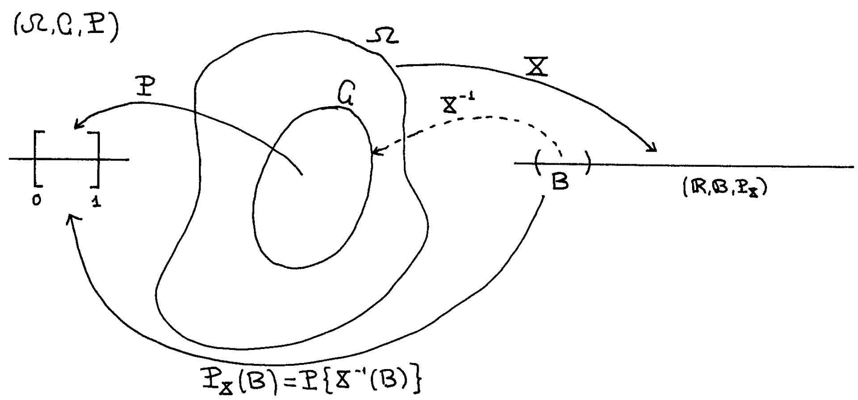
$$X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \text{ es una variable aleatoria sii } X^{-1}(B) \in \mathcal{A} \quad \forall B \in \mathcal{B} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \qquad X^{-1}(]-\infty, x]) \in \mathcal{A}$$

Así, una variable aleatoria es una función con valores reales que está definida sobre el espacio muestral asociado a un experimento aleatorio.

La clase de las variables aleatorias es cerrada para todas las operaciones usuales del Análisis.

Sea $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ una variable aleatoria. Entonces, la medida de probabilidad P induce otra medida de probabilidad en el espacio medible $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, que notaremos P_X, que se denomina distribución de probabilidad de X y que está definida por:

$$\begin{aligned} P_X &: \mathcal{B} \to \mathbb{R} \\ P_X(B) &= P\left\{X^{-1}(B)\right\} \end{aligned}$$



Sea $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_X)$ una variable aleatoria arbitraria. Entonces, asociada a esta variable aleatoria tenemos definida la siguiente función:

$$F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$F_X(x) = P_X\{]-\infty, x]\} = P\left\{X^{-1}(]-\infty, x])\right\} \equiv P\{X \leq x\}$$

que llamaremos función de distribución de X.

Vamos a justificar esta definición:

Proposición 11 (1) F_X *es no decreciente*
(2) F_X *es continua a la derecha*
(3) $F_X(+\infty) = 1$ *y* $F_X(-\infty) = 0$

66.2 Variables aleatorias continuas

Definición 12 *Una función* $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es absolutamente continua sii* $\exists h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *integrable tal que*

$$H(x) = \int_{-\infty}^{x} h(t)\, dt \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Definición 13 *Una variable aleatoria* $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_X)$ *es de tipo continuo (o continua) sii su función de distribución* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es absolutamente continua, es decir,* $\exists f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *integrable (llamada función de densidad de* X*) tal que:*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Algunas **propiedades** analíticas de la función de densidad son:

(1) $\exists F'(x) \quad$ c.t.p.(λ_1) (donde λ_1 es la medida 1-dimensional de Lebesgue) y en dichos puntos f es continua. Además $F'(x) = f(x)$.

(2) $f \geq 0$

(3) $\int_{\mathbb{R}} f(t)\, dt = 1$

Las propiedades (2) y (3) caracterizan a las funciones de densidad en el sentido de que cualquier función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que las verifique se dice que es una función de densidad.

Teorema 14 *Sea* X *una variable aleatoria continua con función de distribución* F *y función de densidad* f*. Entonces*

$$\forall B \in \mathcal{B} \qquad P(X \in B) = \int_B f(x)\, dx = \int_B dF(x)$$

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad y $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_X)$ una variable aleatoria continua arbitraria.

Definición 15 *Diremos que existe la esperanza de* X *sii la integral* $\int_{\mathbb{R}} xf(x)\, dx$ *es absolutamente convergente. En cuyo caso, definimos la esperanza de* X *por:*

$$EX = \int_{\mathbb{R}} xf(x)\, dx$$

Teorema 16 *(Esperanza de una función de una v.a.): Sea* X *una variable aleatoria continua con función de densidad* f *y supongamos que* $Y = g(X)$ *es otra variable aleatoria, siendo* g *diferenciable y estrictamente monótona. Entonces:*

(1) $\exists EY \Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}} |g(x)|\, f(x)\, dx < +\infty$

(2) *Si* $\exists EY$ *entonces* $EY = \int_{\mathbb{R}} g(x)\, f(x)\, dx$

Corolario 17 $\exists EX \Leftrightarrow \exists E\left|X\right|$

Proposición 18 (1) *La esperanza de una cte es ella misma.*

(2) *Si* $\exists EX \Rightarrow \exists E\left[aX+b\right] = aEX+b$

(3) *Sea* X *una variable aleatoria y* $h_1\left(X\right),...,h_n\left(X\right)$ *funciones de* $X : \forall j = 1,...,n \quad \exists Eh_j\left(X\right)$. *Entonces:*

$$\exists E\left[\sum_{j=1}^{n} h_j\left(X\right)\right] = \sum_{j=1}^{n} Eh_j\left(X\right)$$

(4) *Si* $h\left(X\right), g\left(X\right)$ *son funciones de una variable aleatoria* X *tales que* $h\left(X\right) \leq g\left(X\right)$ *y además* $\exists Eh\left(X\right), Eg\left(X\right)$, *entonces*

$$Eh\left(X\right) \leq Eg\left(X\right)$$

Definición 19 *Sea* $X : \left(\Omega, \mathcal{A}, P\right) \to \left(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_X\right)$ *una variable aleatoria continua y consideremos* $\forall n \in \mathbb{N}$ *la variable aleatoria* X^n. *Si* $\exists EX^n$, *dicha esperanza se denomina momento no centrado de orden* n *de* X.

$$EX^n = \int_{\mathbb{R}} x^n f\left(x\right) dx$$

Sea $c \in \mathbb{R}$ *y consideremos la variable aleatoria* $\left(X-c\right)^n$. *Si* $\exists E\left[\left(X-c\right)^n\right]$, *dicha esperanza se denomina momento centrado en* c *de orden* n *de* X.

$$E\left[\left(X-c\right)^n\right] = \int_{\mathbb{R}} \left(x-c\right)^n f\left(x\right) dx$$

Proposición 20 *Sea* $\alpha_k = EX^k$ *y* $\mu_k = E\left[\left(X-c\right)^k\right]$. *Entonces:*

$$\mu_k = \sum_{j=0}^{k} \left(-1\right)^{k-j} \binom{k}{j} \alpha_1^{k-1} \alpha_j$$

$$\alpha_k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \alpha_1^{k-1} \mu_j$$

Definición 21 *El momento central de orden 2 respecto de la esperanza se llama varianza de* X.

$$Var\left(X\right) = \int_{\mathbb{R}} \left(x-\alpha_1\right)^2 f\left(x\right) dx$$

La raíz cuadrada positiva de la varianza se denomina desviación típica de X.

$$\sigma_X = +\sqrt{Var\left(X\right)}$$

Corolario 22 ***(Teorema de König):*** $Var\left(X\right) = EX^2 - \left(EX\right)^2$

Definición 23 *Sea X una variable aleatoria continua y $t \in \mathbb{R}$. Si $\exists E\left[e^{Xt}\right]$ $\forall t \in \left]-\varepsilon, \varepsilon\right[$, decimos que existe la función generatriz de momentos (FGM) de X. Dicha función se nota por:*

$$M_X : \left]-\varepsilon, \varepsilon\right[\to \mathbb{R}$$
$$M_X(t) = E\left[e^{Xt}\right] = \int_{\mathbb{R}} e^{xt} dF_X(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{tx} f(x)\, dx$$

Algunas **propiedades** de la FGM son:

Proposición 24 *(i) La FGM de una variable aleatoria continua, si existe, es única y determina de forma única a la distribución.*

(ii) Si $\exists M_X(t) \quad \forall t \in \left]-\varepsilon, \varepsilon\right[$, entonces:

(1) $\exists EX^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

(2) $M_X(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n EX^n}{n!} \quad \forall t \in \left]-\varepsilon, \varepsilon\right[$

(3) M_X *es diferenciable y* $\frac{d^k}{dt^k} M_X(t)\,|_{t=0} = EX^k$

Corolario 25 $M_X \in C^{\infty}\left(\left]-\varepsilon, \varepsilon\right[\right)$ *y de hecho M_X es analítica en* $\left]-\varepsilon, \varepsilon\right[$.

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad y $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_X)$ una variable aleatoria continua con función de distribución F_X y función de densidad f.

Definición 26 *Se llama función característica de X a la transformada de Fourier-Stieltjes de F_X, es decir,*

$$\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f(x)\, dx = E\left[e^{itX}\right]$$

Veamos algunas **propiedades** de la función característica:

Proposición 27 (1) $\exists \varphi(t) \qquad \forall X$ *variable aleatoria continua y determina de forma única a la distribución.*

(2) $\varphi(0) = 1$

(3) $|\varphi(t)| \leq 1$

(4) *Si $\varphi_X(t)$ es la función característica de X, entonces la función característica de la variable aleatoria $Y = aX + b$ es*

$$\varphi_Y(t) = e^{ita} \varphi_X(bt)$$

(5) $\overline{\varphi(t)} = \varphi(-t)$

(6) φ *es real* $\Leftrightarrow X$ *es simétrica respecto del origen*

(7) *Si $\exists \alpha_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ entonces*

(i) $\exists \varphi^{n)}(0) = i^n \alpha_n$

(ii) $\exists \varphi^{n)}(t) = i^n \int_{\mathbb{R}} e^{itx} x^n dF_X(x)$

(8) *Si* $\exists\varphi^{2n)}(t)$ *entonces*

$$\exists\alpha_{2n} = \frac{\varphi^{2n)}(0)}{i^{2n}}$$

(9) *Si* $\exists\varphi^{2n-2)}(t)$ *entonces*

$$\exists\alpha_{2n-2} = \frac{\varphi^{2n-2)}(0)}{i^{2n-2}}$$

66.3 Distribución normal

La distribución normal es la piedra angular en la aplicación de la Inferencia Estadística al Análisis de Datos, puesto que las distribuciones de muchos "estadísticos muestrales" tienden a la distribución normal conforme aumenta el tamaño de la muestra.

La apariencia gráfica de esta distribución es una curva simétrica con forma de campana que se extiende sin límite en las direcciones positiva y negativa.

Un gran número de estudios indica que la distribución normal denota una adecuada representación, al menos en una primera aproximación, de las distribuciones de una gran cantidad de variables físicas.

La función de densidad de probabilidad de la $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$ fué descubierta por De Moivre en 1733 como límite de una distribución binomial, pero no la publicó. Posteriormente Laplace estudió a fondo esta distribución pero tampoco publicó sus resultados, por lo que no se dió a conocer hasta que en 1809 Gauss la publicara en un artículo.

Definición 28 *Se dice que una v.a.* $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu,\sigma)$, *cuando su función de densidad viene dada por:*

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

con $\mu \in \mathbb{R}$ *y* $\sigma > 0$.

Los parámetros μ y σ determinan de manera completa la distribución de probabilidad normal.

Veamos que es una auténtica función de densidad:

$$(i)\ \ f(x) \geq 0 \ \text{ por definición}$$

$$(ii)\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \tfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx =$$

$$= \left[\begin{array}{c} \frac{x-\mu}{\sigma} = y \\ x-\mu = \sigma y \\ dx = \sigma dy \end{array}\right] = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tfrac{1}{\sigma}\sigma e^{-\frac{y^2}{2}} dy =$$

$$= \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy}_{\text{Integral de GAUSS}} = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi} = 1$$

Nota: Cálculo de la integral de GAUSS

$$I := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 2\underbrace{\int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx}_{:=I_1} = 2I_1$$

por ser la curva simétrica respecto de OY.

Entonces:

$$I_1^2 = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \int_0^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)} dxdy =$$

$$= \left[\begin{array}{c} x = r\cos\theta;\ dx = \cos\theta dr - \sin\theta r d\theta \\ y = r\sin\theta;\ dy = \sin\theta dr + r\cos\theta d\theta \\ x^2+y^2 = 1 \\ \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r \end{array}\right] =$$

$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} r dr d\theta = \int_0^{\pi/2} \left\{ -e^{-\frac{r^2}{2}} \Big|_{r=0}^{r=+\infty} \right\} d\theta = \int_0^{\pi/2} d\theta = \theta \Big|_0^{\pi/2} = \tfrac{\pi}{2}$$

de donde $I_1 = \sqrt{\frac{2\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$

y como $I = 2I_1$ entonces $I = \sqrt{2\pi}$.

El siguiente resultado es un resumen de las características de la distribución normal.

Proposición 29 (1) $EX = \mu$

(2) $EX^2 = \mu^2 + \sigma^2$

(3) $Var(X) = \sigma^2$

(4) $M(t) = e^{t\mu + \frac{t^2\sigma^2}{2}} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$

(5) $\varphi(t) = e^{it\mu - \frac{t^2\sigma^2}{2}} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$

Demostración:

(1)

$$EX=\int_{\mathbb{R}} xf\left(x\right)dx=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\tfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}xe^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{2}}dx=\left[\begin{array}{c}\frac{x-\mu}{\sigma}=y\\ x-\mu=\sigma y\\ dx=\sigma dy\end{array}\right]=$$

$$=\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\mu+\sigma y\right)\tfrac{1}{\sigma}e^{-\frac{y^{2}}{2}}\sigma dy=$$

$$=\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mu\frac{1}{\sigma}e^{-\frac{y^{2}}{2}}dy}_{=I}+\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sigma y\frac{1}{\sigma}e^{-\frac{y^{2}}{2}}dy}_{=II}=\mu$$

$$I=\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mu e^{-\frac{y^{2}}{2}}dy=\tfrac{\mu}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{y^{2}}{2}}dy=\tfrac{\mu}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi}=\mu$$

$$II=\tfrac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}ye^{-\frac{y^{2}}{2}}dy=\left(-e\right)^{-\frac{y^{2}}{2}}\ |_{-\infty}^{+\infty}=0$$

(2)

$$EX^{2}=\int_{\mathbb{R}} x^{2}f\left(x\right)dx=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\tfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}x^{2}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{2}}dx=\left[\begin{array}{c}\frac{x-\mu}{\sigma}=y\\ x-\mu=\sigma y\\ dx=\sigma dy\end{array}\right]=$$

$$=\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\mu+\sigma y\right)^{2}\tfrac{1}{\sigma}e^{-\frac{y^{2}}{2}}\sigma dy=$$

$$=\underbrace{\frac{\mu^{2}}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{y^{2}}{2}}dy}_{=\sqrt{2\pi}}+\underbrace{\frac{\sigma^{2}}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}y^{2}e^{-\frac{y^{2}}{2}}dy}_{=A}+\underbrace{\frac{2\mu\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}ye^{-\frac{y^{2}}{2}}dy}_{=0}$$

$$A=\tfrac{\sigma^{2}}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}y^{2}e^{-\frac{y^{2}}{2}}dy=\tfrac{\sigma^{2}}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}yye^{-\frac{y^{2}}{2}}dy=\left[\begin{array}{c}u=y\rightarrow du=dy\\ dv=ye^{-\frac{y^{2}}{2}}dy\rightarrow v=-e^{-\frac{y^{2}}{2}}\end{array}\right]=$$

$$=\tfrac{\sigma^{2}}{\sqrt{2\pi}}\left(-e^{-\frac{y^{2}}{2}}\ |_{-\infty}^{+\infty}+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{y^{2}}{2}}dy\right)=\tfrac{\sigma^{2}}{\sqrt{2\pi}}\left[\tfrac{-y}{e^{\frac{y^{2}}{2}}}\ |_{-\infty}^{+\infty}\right]+\sigma^{2}=\sqrt{2\pi}$$

ya que

$$\lim_{y\rightarrow+\infty}\frac{-y}{e^{\frac{y^{2}}{2}}}=\lim_{y\rightarrow-\infty}\frac{-y}{e^{\frac{y^{2}}{2}}}$$

aplicando las reglas de L´HÔPITAL.

Así,

$$EX^2 = \mu^2 + \sigma^2$$

(3)

$$Var\,(X) = EX^2 - (EX)^2 = \mu^2 + \sigma^2 - \mu^2 = \sigma^2$$

(4)

$$M\,(t) = E\left[e^{tX}\right] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{tx} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{\left[tx-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]} dx = \left[\begin{array}{c} \frac{x-\mu}{\sigma} = y \\ x-\mu = \sigma y \\ dx = \sigma dy \end{array}\right] =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sigma e^{t(\sigma y+\mu)-\frac{y^2}{3}} dy = \frac{e^{t\mu}}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{2t\sigma y - y^2}{3}} dy = \frac{e^{t\mu}}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\left(y^2-2t\sigma y+t^2\sigma^2\right)}{3}+\frac{t^2\sigma^2}{2}} dy =$$

$$= \frac{e^{t\mu}}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{t^2\sigma^2}{2}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(y-t\sigma)^2} dy = \left[\begin{array}{c} y - t\sigma = z \\ dy = dz \end{array}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{t\mu+\frac{t^2\sigma^2}{2}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = e^{t\mu+\frac{t^2\sigma^2}{2}}$$

(5)

$$\varphi\,(t) = e^{it\mu-\frac{t^2\sigma^2}{2}} \qquad C.Q.D.\square$$

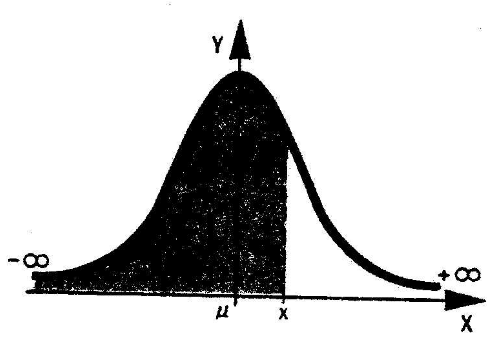
Estudiemos ahora la **función de distribución** de una $\mathcal{N}\,(\mu,\sigma)$:

La probabilidad de que la variable aleatoria X tome un valor menor o igual que otro dado x, nos la da la función de distribución.

Para una distribución normal $\mathcal{N}\,(\mu,\sigma)$ la función de distribución viene dada por:

$$F\,(x) = P\,(X \leq x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt$$

Gráficamente es:



que representa el área encerrada entre la curva $y = f\,(x)$, y el eje OX, desde $-\infty$ hasta x.

La normal $\mathcal{N}(0,1)$

Teorema 30 *Sea $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu,\sigma)$ y $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$. Entonces, $Z \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$ y*

$$F_X(x) = F_Z\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Demostración:

Veamos que $Z \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$:

$$F_Z(x) = P(Z \leq z) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq z\right) = P(X \leq \mu+\sigma z) = F_X(\mu+\sigma z)$$

$$\frac{d}{dx}F_X(\mu+\sigma z) = f_Z(z) = \sigma f_X(\mu+\sigma z) = \frac{\sigma}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\mu+\sigma z-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}$$

es decir, $Z \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$.

Veamos ahora que $F_X(x) = F_Z\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}$:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = F_Z\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \qquad C.Q.D.\square$$

66.4 Aplicaciones

66.4.1 El problema central del límite

Independencia de variables aleatorias

Definición 31 *Diremos que las variables aleatorias $X_1,...X_n$ son independientes sii*

$$F(x_1,...,x_n) = F_1(x_1)...F_n(x_n) \qquad \forall x_1,...,x_n \in \mathbb{R}$$

donde F es la función de distribución del vector aleatorio $(X_1,...,X_n)$ y F_i es la función de distribución de la variable aleatoria X_i.

Teorema 32 *(**Caracterización de independencia para vv.aa. continuas**): Dadas $n-$ variables aleatorias unidemensionales continuas $X_1,...,X_n : (\Omega,\mathcal{A},P) \to (\mathbb{R},\mathcal{B},P_{X_i})$ se tiene:*

$$X_1,...,X_n \text{ independientes } \Leftrightarrow f(x_1,...,x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_i(x_i)$$

$\forall x_1,...,x_n \in \mathbb{R}$.

Planteamiento

Estudia la "convergencia en ley" de sumas de variables aleatorias independientes.

Un teorema límite

Teorema 33 *(**Teorema límite de De Moivre-Laplace**):Sea $\{X_n\}$ una sucesión de vv.aa. independientes e idénticamente distribuidas con distribución $B(1,p)$. Notamos $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Entonces:*

$$\frac{S_n - ES_n}{\sqrt{Var(S_n)}} \xrightarrow{L} Z \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$$

66.4.2 Distribuciones continuas asociadas a la normal

Distribución χ^2 de Pearson

Definición 34 *$\chi^2(n) \equiv G\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}\right)$ se denomina distribución χ^2 de Pearson con n grados de libertad*

$$X \rightsquigarrow \chi^2(n) \;\; sii \;\; f(x) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} \qquad \forall x > 0$$

Proposición 35 *(**Características**):* (1) $M(t) = \frac{1}{(1-2t)^{\frac{n}{2}}} \qquad \forall t < \frac{1}{2}$

(2) $\varphi(t) = (1-2it)^{-\frac{n}{2}} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$
(3) $EX^k = \frac{2^k \Gamma\left(\frac{n}{2}+k\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$
(4) $EX = n$
(5) $Var(X) = 2n$

Proposición 36 *(**Propiedad de reproductividad**): Sean $X_x, ..., X_n$ variables aleatorias independientes tales que $X_k \rightsquigarrow \chi^2(n)$. Entonces:*

$$\sum_{k=1}^{n} X_k \rightsquigarrow \chi^2\left(\sum_{k=1}^{n} n_k\right)$$

Distribución t de Student

Definición 37 *Sean $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$ e $Y \rightsquigarrow \chi^2(n)$ variables aleatorias independientes. La distribución de la variable aleatoria*

$$T = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$$

se denomina distribución $t-$Student con n grados de libertad

$$T \rightsquigarrow t(n) \;\; sii \;\; f(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sqrt{\pi} n^{\frac{1}{2}}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

Proposición 38 *(**Características**): (1)* $ET^k = \begin{cases} 0 & k \text{ impar} \\ \frac{n^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-k}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} & k \text{ par} \end{cases}$

(2) $n > 1 \Rightarrow \exists ET = 0$
(3) $n > 2 \Rightarrow \exists Var\,(T) = \frac{n}{n-2}$
(4) $\nexists F.G.M.$

Distribución F de Snedecor

Definición 39 *Sean* $X \rightsquigarrow \chi^2\,(n)$ *e* $Y \rightsquigarrow \chi^2\,(m)$ *variables aleatorias independientes. La distribución de la variable*

$$F = \frac{\frac{X}{n}}{\frac{Y}{m}}$$

se llama distribución $F-$ *Snedecor con* (n,m) *grados de libertad*

$$F \rightsquigarrow F\,(n,m) \;\; sii \; g\,(f) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\left(\frac{n}{m}\right)\left(\frac{n}{m}f\right)^{\frac{n}{2}-1}\left(1+\frac{n}{m}f\right)^{-\frac{n+m}{2}} \qquad \forall f > 0$$

Proposición 40 *(**Características**): (i)* $EF^k = \frac{\left(\frac{m}{n}\right)^k\Gamma\left(k+\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}-k\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$ *con* $k < \frac{m}{2}$

(ii) si $m > 2 \Rightarrow \exists EF = \frac{m}{m-2}$
(iii) si $m > 4 \Rightarrow \exists Var\,(F) = \frac{m^{2(2n+2m-4)}}{n(m-2)^2(m-4)}$
(iv) $\nexists F.G.M.$

66.4.3 Distribuciones muestrales en poblaciones normales unidimensionales

Supongamos que estamos trabajando en una población de la que queremos medir una característica que modelizamos por una variable aleatoria X y supongamos que $X \rightsquigarrow \rightsquigarrow \mathcal{N}\,(\mu,\sigma)\,.$

Si tomamos una muestra aleatoria simple de tamaño n, $(X_1,...,X_n)$, los estadísticos muestrales más usuales son:

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad \text{(media muestral)}$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 \qquad \text{(cuasivarianza muestral)}$$

Veamos que distribución tienen:

Teorema 41 *Si* $X \rightsquigarrow \mathcal{N}\,(\mu,\sigma)$ *y* $(X_1,...,X_n)$ *es una muestra aleatoria simple de tamaño* n*, entonces, los estadísticos* $\overline{X}$ *y* $\left(X_1-\overline{X},....,X_n-\overline{X}\right)$ *son independientes.*

Corolario 42 *Si $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ y $(X_1, ..., X_n)$ es una muestra aleatoria simple de tamaño n, entonces,*

$$\overline{X} \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Demostración:

Sabemos (por la demostración del teorema anterior) que

$$M_{\overline{X}}(t) = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2n}}$$

luego comparando parámetros con la FGM de una $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ obtenemos lo que queríamos. C.Q.D.$\square$

Corolario 43 *(**Lema de Fisher**): Si $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ y $(X_1, ..., X_n)$ es una muestra aleatoria simple de tamaño n, entonces, $\overline{X}$ y S^2 son independientes.*

Demostración:

Basta tener en cuenta que funciones de variables aleatorias independientes son independientes. C.Q.D.$\square$