Tema 65

Distribuciones de probabilidad discretas. Características y tratamiento. La distribución binomial y la de Poisson. Aplicaciones

65.1 Conceptos básicos en Teoría de la Probabilidad

Sea Ω un conjunto arbitrario y notemos por $\mathcal{P}(\Omega)$ al conjunto de sus partes.

Definición 1 *$\mathcal{C}$ es una clase de conjuntos de Ω sii $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$.*

Definición 2 *Se dice que una clase $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ es una $\sigma-$ álgebra*[1] *sii verifica las siguientes propiedades:*

(1) $\emptyset \in \mathcal{C}$

(2) $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{C} \Rightarrow \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{C}$

(3) $A \in \mathcal{C} \Rightarrow A^c \in \mathcal{C}$

Algunas **propiedades** de las $\sigma-$ álgebras que se deducen de la definición son:

(a) $\Omega \in \mathcal{C}$

[1] También es usual llamar $\sigma-$ campos a las $\sigma-$ álgebras.

(*b*) $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{C} \Rightarrow \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{C}$

Definición 3 *Una $\sigma-$ álgebra minimal sobre la clase $\mathcal{H}$ (o $\sigma-$ álgebra generada por $\mathcal{H}$) es la mínima clase con estructura de $\sigma-$ álgebra que contiene a la clase $\mathcal{H}$, y la notaremos por $\sigma(\mathcal{H})$.*

Consideremos $\mathbb{R}$ como conjunto base y sea $\mathcal{Y} = \{I \subset \mathbb{R} : I \text{ es un intervalo}\}$ una clase de conjuntos de $\mathbb{R}$. Notaremos $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{Y})$ y la llamaremos $\sigma-$ álgebra de Borel de $\mathbb{R}$ (la demostración de que es una $\sigma-$ álgebra se deja como ejercicio).

Definición 4 *El par $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ se denomina espacio de Borel unidimensional y cada $B \in \mathcal{B}$ se dice que es un conjunto de Borel o boreliano.*

Algunos **ejemplos** de conjuntos de Borel son:
(1) Cualquier intervalo de $\mathbb{R}$ es un conjunto de Borel
(2) Los números reales son conjuntos de Borel
(3) Los conjuntos abiertos, los cerrados, los finitos y los numerables son conjuntos de Borel.

¡¡OJO!! Existen subconjuntos de $\mathbb{R}$ que no son conjuntos Borel.

Definición 5 *Sea Ω un conjunto arbitrario y $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ una clase de conjuntos. Una función de conjunto es una función numérica $\varphi : \mathcal{C} \to \widehat{\mathbb{R}}$, donde $\widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ es la compactificación de $\mathbb{R}$ por dos puntos.*

Definición 6 *Al par $(\Omega, \mathcal{A})$ formado por un conjunto arbitrario Ω y una $\sigma-$ álgebra $\mathcal{A}$ sobre Ω se le denomina espacio medible. Además, si $A \subset \Omega$ es tal que $A \in \mathcal{A}$ se dice que A es un conjunto medible.*

Definición 7 *Sea $(\Omega, \mathcal{A})$ un espacio medible. Una función de probabilidad o medida de probabilidad sobre $(\Omega, \mathcal{A})$ es una función de conjunto $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ que verifica:*
(*i*) $P\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n) \qquad \forall \{A_n\} \subset \mathcal{A}$ *disjuntos*
(*ii*) $P(A) \geq 0 \qquad \forall A \in \mathcal{A}$
(*iii*) $P(\Omega) = 1$
En este caso, la terna $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ se denomina espacio de probabilidad.

Definición 8 *Dados dos espacios medibles $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ y $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$, diremos que una aplicación $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ es medible sii $\forall A \in \mathcal{A}_2 \quad f^{-1}(A) \in \mathcal{A}_1$.*

Definición 9 *Una función medible es una aplicación medible $f : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$.*

Definición 10 *Una variable aleatoria es una función medible definida sobre un espacio de probabilidad, es decir,*

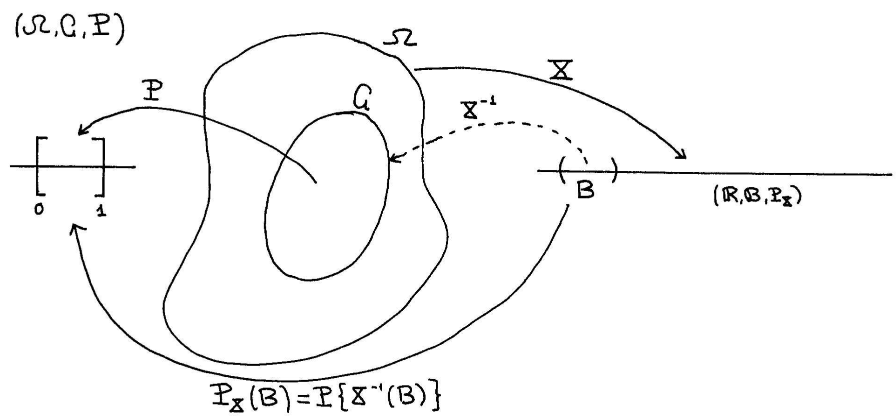
$$X:(\Omega,\mathcal{A},P)\rightarrow(\mathbb{R},\mathcal{B}) \text{ es una variable aleatoria sii } X^{-1}(B)\in\mathcal{A}\quad\forall B\in\mathcal{B}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{R}\qquad X^{-1}(]-\infty,x])\in\mathcal{A}$$

Así, una variable aleatoria es una función medible con valores reales que está definida sobre el espacio muestral asociado a un experimento aleatorio.

La clase de las variables aleatorias es cerrada para todas las operaciones usuales del Análisis.

Sea $X:(\Omega,\mathcal{A},P)\rightarrow(\mathbb{R},\mathcal{B})$ una variable aleatoria. Entonces, la medida de probabilidad P induce otra medida de probabilidad en el espacio medible $(\mathbb{R},\mathcal{B})$, que notaremos P_X y que se denomina distribución de probabilidad de X. Además, está definida por:

$$\begin{aligned} P_X &: \mathcal{B}\rightarrow\mathbb{R} \\ P_X(B) &= P\left\{X^{-1}(B)\right\} \end{aligned}$$



Sea $X:(\Omega,\mathcal{A},P)\rightarrow(\mathbb{R},\mathcal{B},P_X)$ una variable aleatoria arbitraria. Entonces, asociada a esta variable aleatoria tenemos definida la siguiente función:

$$F_X:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$$
$$F_X(x)=P_X\{]-\infty,x]\}=P\left\{X^{-1}(]-\infty,x])\right\}\equiv P\{X\leq x\}$$

que llamaremos función de distribución de X.

Vamos a justificar esta definición:

Proposición 11 (1) F_X *es no decreciente*

(2) F_X *es continua a la derecha*

(3) $F_X(+\infty)=1$ *y* $F_X(-\infty)=0$

65.2 Variables aleatorias discretas

Sea $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_X)$ una variable aleatoria arbitraria.

Definición 12 *Diremos que X es discreta (v.a.d.) si sólo toma valores en un conjunto numerable E.*

Definición 13 *Sea X una v.a.d. y F su función de distribución. Asociada a la v.a. X definimos la función masa de probabilidad (FMP) por:*

$$\begin{array}{l} p : E \to \mathbb{R} \\ x \longrightarrow P(X = x) \end{array}$$

En general,

$$\forall B \in \mathcal{A} \qquad P(X \in B) = P(X \in B \cap E) = \sum_{x \in B \cap E} P(X = x)$$

Sea $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_X)$ una variable aleatoria discreta.

Definición 14 *Diremos que existe la esperanza de X sii la serie $\sum_{x \in E} xP(X = x)$ es absolutamente convergente. En cuyo caso, definimos la esperanza de X por:*

$$EX = \sum_{x \in E} xP(X = x)$$

Teorema 15 *(Esperanza de una función de una variable aleatoria): Sea $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_X)$ una variable aleatoria discreta e $Y = g(X)$ otra v.a.d. obtenida a partir de X mediante una transformación medible. Entonces:*

(1) $\exists EY \Leftrightarrow \sum_{x \in E} |g(x)| P(X = x) < +\infty$

(2) *Si* $\exists EY$ *entonces* $EY = \sum_{x \in E} g(x) P(X = x)$

Corolario 16 $\exists EX \Leftrightarrow \exists E|X|$

Veamos algunas propiedades de la esperanza:

Proposición 17 (1) *La esperanza de una cte es ella misma.*

(2) *Si* $\exists EX \Rightarrow \exists E[aX + b] = aEX + b$

(3) *Sea X una variable aleatoria y $h_1(X), ..., h_n(X)$ funciones de $X : \forall j = 1, ..., n \quad \exists Eh_j(X)$. Entonces:*

$$\exists E\left[\sum_{j=1}^{n} h_j(X)\right] = \sum_{j=1}^{n} Eh_j(X)$$

(4) *Si $h(X), g(X)$ son funciones de una variable aleatoria X tales que $h(X) \le g(X)$ y además $\exists Eh(X), Eg(X)$, entonces*

$$Eh(X) \le Eg(X)$$

Definición 18 *Sea $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_X)$ una variable aleatoria discreta y consideremos $\forall n \in \mathbb{N}$ la variable aleatoria X^n. Si $\exists EX^n$, dicha esperanza se denomina momento no centrado de orden n de X.*

$$EX^n = \sum_{x \in E} x^n P(X = x)$$

Sea $c \in \mathbb{R}$ y consideremos la variable aleatoria $(X - c)^n$. Si $\exists E[(X - c)^n]$, dicha esperanza se denomina momento centrado en c de orden n de X.

$$E[(X - c)^n] = \sum_{x \in E} (x - c)^n P(X = x)$$

Proposición 19 *Notaremos $\alpha_k = EX^k$ y $\mu_k = E\left[(X - c)^k\right]$. Entonces:*

$$\mu_k = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \alpha_1^{k-1} \alpha_j$$

$$\alpha_k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \alpha_1^{k-1} \mu_j$$

Definición 20 *El momento central de orden 2 respecto de la esperanza se llama varianza de X.*

$$Var(X) = E\left[(X - EX)^2\right]$$

La raíz cuadrada positiva de la varianza se denomina desviación típica de X.

$$\sigma_X = +\sqrt{Var(X)}$$

Corolario 21 ***(Teorema de König):*** $Var(X) = EX^2 - (EX)^2$

Definición 22 *Sea $k \in \mathbb{R}^+$ y consideremos la variable aleatoria $|X|^k$. Si $\exists E\left[|X|^k\right]$ dicha esperanza se denomina momento absoluto de orden k de X.*

Los momentos de una distribución, tanto respecto al origen como respecto a la meda, pueden determinarse utilizando la función generatriz de momentos que pasamos a definir.

Definición 23 *Sea X una variable aleatoria discreta y $t \in \mathbb{R}$. Si $\exists E\left[e^{Xt}\right]$ $\forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, decimos que existe la función generatriz de momentos (FGM) de X. Dicha función se nota por:*

$$M_X :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{R}$$
$$M_X(t) = E\left[e^{Xt}\right] = \sum_{x \in E} e^{xt} P(X = x)$$

Algunas **propiedades** de la FGM son:

Proposición 24 *(i) La FGM de una variable aleatoria, si existe, es única y determina de forma única a la distribución.*

(ii) Si $\exists M_X(t) \quad \forall t \in \left]-\varepsilon, \varepsilon\right[$*, entonces:*

$$(1)\ \exists EX^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$(2)\ M_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \tfrac{t^n EX^n}{n!} \quad \forall t \in \left]-\varepsilon, \varepsilon\right[$$

$$(3)\ M_X \text{ es diferenciable y } \tfrac{d^k}{dt^k} M_X(t) \big|_{t=0} = EX^k$$

Corolario 25 $M_X \in C^\infty\left(\left]-\varepsilon, \varepsilon\right[\right)$ *y de hecho* M_X *es analítica en* $\left]-\varepsilon, \varepsilon\right[$.

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad y $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_X)$ una variable aleatoria discreta con función de distribución F_X.

Definición 26 *Se llama función característica de* X *a la transformada de Fourier-Stieltjes de* F_X*, es decir,*

$$\varphi(t) = \sum_{x \in E} e^{ixt} P(X = x) = E\left[e^{itX}\right]$$

Veamos algunas **propiedades** de la función característica:

Proposición 27 (1) $\exists \varphi(t) \quad \forall X$ *variable aleatoria y determina de forma única a la distribución de probabilidad.*

(2) $\varphi(0) = 1$

(3) $|\varphi(t)| \leq 1$

(4) *Si* $\varphi_X(t)$ *es la función característica de* X*, entonces la función caracterítica de la variable aleatoria* $Y = aX + b$ *es*

$$\varphi_Y(t) = e^{ita} \varphi_X(bt)$$

(5) $\overline{\varphi(t)} = \varphi(-t)$

(6) φ *es real* $\Leftrightarrow X$ *es simétrica respecto del origen*

(7) *Si* $\exists \alpha_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ *entonces*

$$(i)\ \exists \varphi^{n)}(0) = i^n \alpha_n$$

$$(ii)\ \exists \varphi^{n)}(t) = i^n \sum_{x \in E} e^{itx} x^n P(X = x)$$

(8) *Si* $\exists \varphi^{2n)}(t)$ *entonces*

$$\exists \alpha_{2n} = \frac{\varphi^{2n)}(0)}{i^{2n}}$$

(9) *Si* $\exists \varphi^{2n-2)}(t)$ *entonces*

$$\exists \alpha_{2n-2} = \frac{\varphi^{2n-2)}(0)}{i^{2n-2}}$$

65.3 Distribución binomial

Fué introducida por Bernouilli en 1713 y es una de las distribuciones discretas más útiles. Su área de aplicación incluye:

(1) Inspección de calidad
(2) Control de defectos
(3) Caliudad del servicio telefónico
(4) Ventas (marketing)
(5) Mercalotecnia
(6) Medicina
(7) Investigación de opiniones
(8) Otras,...

Supongamos un experimento en el que el resultado es la ocurrencia o no ocurrencia de un evento. Sin pérdida de generalidad, llámese éxito a la ocurrencia del evento y fracaso a la no ocurrencia. La probabilidad de éxito es p y permanece cte en cada ensayo y la de fracaso $q = 1 - p$.

Supongamos además que el experimento se realiza $n-$ veces y que cada una de las realizaciones es independiente de las demás.

Sea X la variable aleatoria que representa el número de éxitos obtenidos en las $n-$ realizaciones del experimento.

Definición 28 *En las condiciones anteriores, se dice que X sigue una distribución binomial de parámetros (n, p), $X \rightsquigarrow B(n, p)$, con FMP:*

$$P(X = k) = \begin{cases} \dfrac{n!}{x!\,(n-k)!}\, p^k (1-p)^{n-k} & k = 0, ..., n \\ 0 & \textit{fuera} \end{cases}$$

Veamos que es una auténtica FMP:

$$P(X = k) \geq 0$$

$$\sum_{k=0}^{n} P(X = k) = \sum_{k=0}^{n} \tfrac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \\ = [(1-p) + p]^n = 1^n = 1$$

Esta distribución permite conocer, cuando se realizan n pruebas repetidas con probabilidad constante, la probabilidad de que se produzcan k éxitos al realizar las n pruebas.

Función de distribución

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{k \leq x} P(X = k)$$

Esperanza

$$EX = \sum_{k=0}^{n} kP\left(X=k\right) = \sum_{k=0}^{n} k\tbinom{n}{k}p^k\left(1-p\right)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} k\tfrac{n!}{k!(n-k)!}p^k\left(1-p\right)^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \tfrac{n!}{(k-1)!(n-k)!}p^k\left(1-p\right)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} np\tfrac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}p^{k-1}\left(1-p\right)^{n-k} =$$

$$= np\sum_{k=1}^{n} \tbinom{n-1}{k-1}p^{k-1}\left(1-p\right)^{(n-1)-(k-1)} \underset{(1)}{=} np$$

$$EX = np$$

donde en (1) hemos tenido en cuenta que:

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1}p^{k-1}\left(1-p\right)^{(n-1)-(k-1)} = \left[(1-p)+p\right]^{n-1} = 1$$

Varianza

$$Var\left(X\right) = E\left[\left(X-EX\right)^2\right] = E\left[\left(X-np\right)^2\right] = \sum_{k=0}^{n}\left(k-np\right)^2\tfrac{n!}{k!(n-k)!}p^k\left(1-p\right)^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\left(k^2-2knp+n^2p^2\right)\tfrac{n!}{k!(n-k)!}p^k\left(1-p\right)^{n-k} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n}k^2\frac{n!}{k!\left(n-k\right)!}p^k\left(1-p\right)^{n-k}}_{=A} -$$

$$\underbrace{-2\sum_{k=0}^{n}knp\frac{n!}{k!\left(n-k\right)!}p^k\left(1-p\right)^{n-k}}_{=B} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n}n^2p^2\frac{n!}{k!\left(n-k\right)!}p^k\left(1-p\right)^{n-k}}_{=C}$$

$$A = \sum_{k=1}^{n}k\tfrac{n!}{(k-1)!(n-k)!}p^k\left(1-p\right)^{n-k} = np\sum_{k=1}^{n}k\tfrac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}p^{k-1}\left(1-p\right)^{n-k} =$$

$$= \left\{\begin{array}{c}\text{Cambio}\\ k-1=t\end{array}\right\} = np\sum_{t=0}^{n-1}\left(t+1\right)\tfrac{(n-1)!}{t!(n-1-t)!}p^t\left(1-p\right)^{n-t-1} =$$

$$= np\left[\underbrace{\sum_{t=0}^{n-1}t\frac{(n-1)!}{t!\left(n-1-t\right)!}p^t\left(1-p\right)^{n-t-1}}_{\text{esperanza para } x=t \text{ y } n-1 \text{ elementos}} + \underbrace{\sum_{t=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{t!\left(n-1-t\right)!}p^t\left(1-p\right)^{n-t-1}}_{=[(1-p)+p]^{n-1}=1}\right] =$$

$$= np\left[(n-1)\,p+1\right] = n^2p^2 - np^2 + np$$

$$B = -2np\sum_{k=0}^{n} k\tfrac{n!}{k!(n-k)!}p^k\,(1-p)^{n-k} - 2npEX = -2npnp = -2n^2p^2$$

$$C = n^2p^2\sum_{k=0}^{n} \tfrac{n!}{k!(n-k)!}p^k\,(1-p)^{n-k} = n^2p^2\left[(1-p)+p\right]^n = n^2p^2$$

$$Var\,(X) = A+B+C = n^2p^2 - np^2 + np - 2n^2p^2 + n^2p^2 =$$

$$= np\left[1-(1-p)\right] = npq$$

$$Var\,(X) = npq$$

Momentos respecto del origen

$$E\left[X^j\right] = \sum_{k=0}^{n} k^j\frac{n!}{k!\,(n-k)!}p^k\,(1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} k^j\binom{n}{k}p^k\,(1-p)^{n-k}$$

Momentos centrales

$$E\left[(X-EX)^j\right] = E\left[(X-np)^j\right] = \sum_{k=0}^{n}(k-np)^j\,\frac{n!}{k!\,(n-k)!}p^k\,(1-p)^{n-k}$$

Función generatriz de momentos

$$M\,(t) = E\left[e^{tX}\right] = \sum_{k=0}^{n} e^{tk}\tbinom{n}{k}p^k\,(1-p)^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\tbinom{n}{k}\,(e^tp)^k\,(1-p)^{n-k} = \left[e^tp+(1-p)\right]^n$$

$$M\,(t) = \left[e^tp+q\right]^n$$

Calculamos la varianza usando el teorema de König: $Var\,(X) = EX^2 - (EX)^2$

$$\frac{dM\,(t)}{dt} = n\,(e^tp+1-p)^{n-1}\,pe^t$$

$$\frac{d^2M\,(t)}{dt^2} = n\,(e^tp+1-p)^{n-1}\,pe^t + n\,(n-1)\,(e^tp+1-p)^{n-2}\,pe^tpe^t$$

$$EX^2 = \frac{d^2M\,(t)}{dt^2}\;|_{t=0} = np\left[(n-1)\,p+1\right]$$

$$Var\,(X) = EX^2 - (EX)^2 = np\left[(n-1)\,p+1\right] - n^2p^2 =$$

$$= np\left[(n-1)\,p+1np\right] = np\left[np-p+1-np\right] = npq$$

Función característica

$$\varphi(t) = \left(e^{it}p + q\right)^n$$

Reproductividad[2]

Teorema 29 *(**Reproductividad en** n **de** $B(n,p)$): Sean $X_k \rightsquigarrow B(n_k, p)$, $k = 1, ..., m$, y supongamos que son independientes. Entonces:*

$$\sum_{k=1}^{m} X_k \rightsquigarrow B\left(\sum_{k=1}^{m} n_k, p\right)$$

Demostración:

Sea $S := \sum\limits_{k=1}^{m} X_k$. Entonces, la FC de S es:

$$\varphi_S(t) = \prod_{k=1}^{m} \varphi_{X_k}(t) = \prod_{k=1}^{m} \left(e^{it}p + q\right)^{n_k} = \left(e^{it}p + q\right)^{\sum\limits_{k=1}^{m} n_k}$$

luego $S \rightsquigarrow B\left(\sum\limits_{k=1}^{m} n_k, p\right)$. C.Q.D.□

Valores de la variable aleatoria binomial a los que corresponde probabilidad o probabilidades máximas

Se tiene

$$\frac{P(X = x)}{P(X = x-1)} = \frac{\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}}{\binom{n}{x-1} p^{x-1} (1-p)^{n-x+1}} = \frac{n-x+1}{x} \frac{p}{q} = 1 + \frac{(n+1)p - x}{xq}$$

Así pues, si:

$x < (n+1)p$ las probabilidades crecen
$x = (n+1)p$ las probabilidades permanecen estacionarias
$x > (n+1)p$ las probabilidades decrecen

Si llamamos m a la parte entera de $(n+1)p$, el máximo se alcanza en $x = m$, llamado moda o también número más probable de éxitos.

En el caso de que $(n+1)p$ sea entero, entonces el máximo también se alcanza en $x = m - 1$.

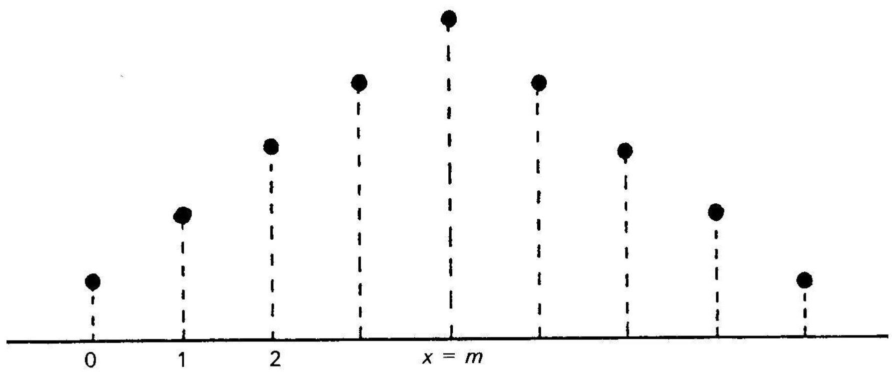
Tenemos pues el siguiente resultado:

A medida que x va de 0 a n, los valores de la función de masa de la variable aleatoria $X \equiv B(n,p)$ crecen al principio monótonamente y después decrecen monótonamente, alcanzando su mayor valor cuando $x = m$.

---

[2] Sea $\mathcal{H}$ una familia de variables aleatorias. Se dice que $\mathcal{H}$ es reproductiva sii $\forall X_1, X_2 \in \mathcal{H}$ independientes, $X_1 + X_2 \in \mathcal{H}$.

Tenemos pues un esquema de la forma:



Por último, hacer notar que la distribución es simétrica si $p = q$; si $p < q$, entonces es asimétrica a la derecha, y si $p > q$, es asimétrica a la izquierda.

65.4 Distribución de Poisson

La variable aleatoria de POISSON fué introducida en 1837 y es la distribución discreta que representa el número de sucesos independientes que ocurren a una velocidad cte en tiempo o en el espacio.

Ejemplos de situaciones que se modelizan mediante la variable de Poisson son:
(1) Llegadas a un sistema de espera (número de personas que llegan a una tienda en un tiempo determinado).
(2) Número de bacterias en un cultivo.
(3) Número de defectos en piezas similares para un material.

Definición 30 *Sea X la variable aleatoria que representa el número de sucesos aleatorios independientes que ocurren a una velocidad cte en el tiempo o en el espacio. Se dice que X tiene una distribución de Poisson de parámetro $\lambda > 0$ si su FMP es:*

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} & x = 0, 1, 2, ... \\ 0 & \textit{fuera} \end{cases}$$

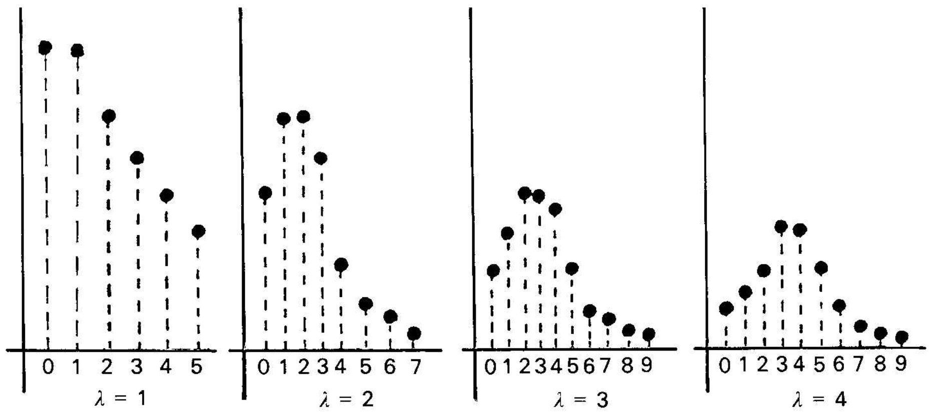
Veamos que es una auténtica FMP:

$$P(X = x) \geq 0$$

$$\sum_{x=0}^{\infty} P(X = x) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1$$

El parámetro λ de la distribución de Poisson representa (como veremos más adelante) el número promedio de ocurrencias de un suceso por unidad de tiempo.

Algunas **gráficas** de la distribución de Poisson son:



Función de distribución

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{k \leq x}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

Esperanza

$$EX = \sum_{x=0}^{\infty} xP(X = x) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{xe^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{(x-1)!} = \lambda \sum_{x=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x-1}}{(x-1)!} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} \text{Cambio} \\ x-1=m \end{array} \right\} = \lambda \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^m}{m!} = \lambda$$

$$EX = \lambda$$

Varianza

$$Var(X) = E\left[(X - EX)^2\right] = E\left[(X-\lambda)^2\right] = \sum_{x=0}^{\infty} (x-\lambda)^2 \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} =$$

$$= \underbrace{\sum_{x=0}^{\infty} x^2 \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}}_{=A} \underbrace{-2\lambda \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}}_{=B} + \underbrace{\lambda^2 \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}}_{=C} =$$

$$A=\sum_{x=0}^{\infty}x^2\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}=\lambda\sum_{x=1}^{\infty}x\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x-1}}{(x-1)!}=\left\{\begin{array}{c}\text{Cambio}\\ x-1=t\end{array}\right\}=\lambda\sum_{t=0}^{\infty}(t+1)\frac{e^{-\lambda}\lambda^t}{t!}=$$

$$=\underbrace{\lambda\sum_{t=0}^{\infty}t\frac{e^{-\lambda}\lambda^t}{t!}}_{=EX=\lambda}+\lambda\sum_{t=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^t}{t!}=\lambda\lambda+\lambda=\lambda(\lambda+1)$$

$$B=-2\lambda\sum_{x=0}^{\infty}x\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}=-2\lambda\lambda=-2\lambda^2$$

$$C=\lambda^2\sum_{x=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}=\lambda^2$$

$$Var(X)=A+B+C=\lambda(\lambda+1)-2\lambda^2+\lambda^2=\lambda$$

$$Var(X)=\lambda$$

Vamos a calcular la varianza de otra forma:

$$EX^2=\sum_{x=0}^{\infty}x^2P(X=x)=\sum_{x=0}^{\infty}x^2\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}=\left\{x^2=x(x-1)+x\right\}=$$

$$=\underbrace{\sum_{x=0}^{\infty}\frac{x(x-1)e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}}_{=A}+\underbrace{\sum_{x=0}^{\infty}x\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}}_{=EX=\lambda}$$

$$A=\sum_{x=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x-2}\lambda^2}{(x-2)!}=\lambda^2\sum_{x=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x-2}}{(x-2)!}=\left\{\begin{array}{c}\text{Cambio}\\ x-2=w\end{array}\right\}=$$

$$=\lambda^2\sum_{w=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^w}{w!}=\lambda^2$$

$$EX^2=\lambda^2+\lambda$$

$$Var(X)=EX^2-(EX)^2=\lambda^2+\lambda-\lambda^2=\lambda$$

Obsérvese que la esperanza y la varianza de esta distribución son iguales. Esta es la propiedad que caracteriza a la distribución de POISSON, ya que además son iguales al parámetro.

Momentos respecto del origen

$$E\left[X^j\right]=\sum_{x=0}^{\infty}x^j\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

Momentos centrales

$$E\left[(X-EX)^j\right]=E\left[(X-\lambda)^j\right]=\sum_{x=0}^{\infty}(x-\lambda)^j\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

FGM

$$M(t) = E\left[e^{tX}\right] = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx}\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = \sum_{x=0}^{\infty}\frac{\left(e^t\lambda\right)^x e^{-\lambda}}{x!} = e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\left(e^t\lambda\right)^x}{x!} =$$

$$= e^{-\lambda}e^{e^t\lambda} = e^{e^t\lambda-\lambda} = e^{\lambda\left(e^t-1\right)}$$

$$M(t) = e^{\lambda\left(e^t-1\right)}$$

FC

$$\varphi(t) = e^{\lambda\left(e^{it}-1\right)}$$

Reproductividad

Teorema 31 *(**Reproductividad de** $\mathcal{P}(\lambda)$): Sean $X_k \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda_k)$, $k = 1, 2, ..., m$, y supongamos que son independientes. Entonces:*

$$\sum_{k=1}^{m} X_k \rightsquigarrow \mathcal{P}\left(\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\right)$$

Demostración:

Sea $S := \sum_{k=1}^{m} X_k$. Entonces, la FC de S es:

$$\varphi_S(t) = \prod_{k=1}^{m}\varphi_{X_k}(t) = \prod_{k=1}^{m} e^{\lambda_k\left(e^{it}-1\right)} = e^{\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\left(e^{it}-1\right)}$$

luego $S \rightsquigarrow \mathcal{P}\left(\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\right)$. C.Q.D.□

65.5 Un teorema límite

Teorema 32 *Sea $X \rightsquigarrow B(n,p)$. Entonces, llamando $\lambda = np$ se tiene:*

$$\lim_{\substack{n\to+\infty \\ p\to 0}}\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \qquad \forall x \in \mathbb{N}\cup\{0\}$$

Demostración:

$$P(X=x) = \frac{n!}{x!(n-x)!}p^x(1-p)^{n-x} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-x+1)}{n^x x!}(np)^x(1-p)^{n-x} =$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)...(n-x+1)}{n^x}\frac{\lambda^x}{x!}(1-p)^{n-x} = \frac{(n-1)(n-2)...(n-x+1)}{n^{x-1}}\frac{\lambda^x}{x!}(1-p)^{n-x} =$$

$$= \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{x-1}{n}\right)}{(1-p)^x}\frac{\lambda^x}{x!}(1-p)^{n-x} \longrightarrow \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

ya que

$$(1-p)^n = \left[\left([1+(-p)]^{\frac{1}{-p}}\right)^{-p}\right]^n = e^{-pn} = e^{-\lambda} \qquad C.Q.D.\square$$

Criterio de aproximación:

La aproximación de las probabilidades binomiales por las de Poisson son buenas cuando $np < 5$ y $p < 0.1$, en cuyo caso

$$X \rightsquigarrow B(n,p) \Rightarrow X \rightsquigarrow P(np)$$

Es por ser esta distribución una buena aproximación de la binomial cuando p es muy pequeño con respecto a n por lo que a veces se le llama distribución de los "sucesos raros".