Tema 63

Frecuencia y probabilidad. Leyes del azar. Espacio probabilístico

63.1 Introducción

En general, la Teoría de la Probabilidad se ocupa de situaciones o modelos en los que está presente la incertidumbre.

Llamaremos experimento determinista a aquel en el que se cumplen las siguientes dos condiciones:
(1) se conocen todos los posibles resultados de la experiencia
(2) se sabe con certeza el resultado que se va a obtener al repetir la experiencia en condiciones prefijadas, quedando el fenómeno determinado por ellas.

Llamaremos experimento aleatorio, probabilista o estocástico a aquel en el que se cumplen las siguientes dos condiciones:
(1) se conocen todos los posibles resultados de la experiencia
(2) repetido en igualdad de condiciones puede presentar resultados distintos en cada experiencia particular y al repetir la experiencia en condiciones fijadas no puede predecirse el resultado que se va a obtener.

63.2 Espacio muestral. Sucesos

En general llamaremos experimento a cualquier procedimiento especificado o conjunto de operaciones que proporciona unos determinados resultados.

Definición 1 *Se llama suceso elemental o punto muestral a cada uno de los* *posibles resultados indescomponibles que pueden obtenerse al realizar un experimento estocástico.*

Denominamos espacio muestral al conjunto de resultados posibles que se obtienen al realizar un experimento estocástico, y lo denotaremos por E u Ω.

Dependiendo de qué tipo de valores toman esos resultados y del número de posibles resultados tenemos la siguiente clasificación:

$$\text{Espacios Muestrales}\left\{\begin{array}{l} i)\text{ discretos}\\ ii)\text{ continuos}\\ 1)\text{ finitos}\\ 2)\text{ infinitos}\left\{\begin{array}{l}2.1)\text{ numerables}\\ 2.2)\text{ no numerables}\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Definición 2 *Llamaremos suceso a cualquier subconjunto del espacio muestral, es decir, un suceso es un conjunto de puntos muestrales con alguna propiedad.*

Supongamos que realizamos un experimento estocástico y supongamos que obtenemos el suceso elemental e. Consideremos el suceso A. Entonces, si $e \in A \subset E$ diremos que A ha ocurrido y si $e \notin A$ diremos que A no ha ocurrido.

63.3 Espacio muestral finito

63.3.1 Álgebra de sucesos

Sea E un espacio muestral finito. Entonces

$$\#\mathcal{P}(E) = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + ... + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = (1+1)^n = 2^n$$

siendo $n = \#E$.

Llamamos suceso imposible al suceso $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$, ya que no contiene ningún suceso elemental, y llamamos suceso seguro al suceso $E \in \mathcal{P}(E)$, ya que contiene a todos los sucesos elementales del experimento.

A los demás elementos de $\mathcal{P}(E)$ se les denomina sucesos estocásticos o simplemente sucesos.

Definición 3 *Sean $A, B \in \mathcal{P}(E)$. Definimos el suceso unión de A y B, $A \cup B$, como el suceso formado por los sucesos elementales que pertenecen a alguno de los sucesos A ó B. Este suceso ocurre cuando ocurre A o B.*

Definición 4 *Sean $A, B \in \mathcal{P}(E)$. Definimos el suceso intersección de A y B, $A \cap B$, como el suceso que ocurre siempre que ocurren A y B, es decir, está formado por los sucesos elementales que pertenecen a A y a B.*

Definición 5 *Sea $A \in \mathcal{P}(E)$. Definimos el suceso complementario de A, $\overline{A} = A^c = A^*$, como el suceso formado por los sucesos elementales que están en E y que no están en A, es decir, si A no se realiza entonces se realiza siempre $\overline{A}$.*

Veamos algunas **propiedades** que cumplen los sucesos:

La unión, la intersección y el complementario de un suceso es otro suceso, lo que justifica la nomenclatura utilizada en las definiciones anteriores.

Propiedades de las operaciones con sucesos:

Proposición 6 *Sean* $A_1, A_2, A_3 \in \mathcal{P}(E)$. *Entonces*

(i) *Asociativa:*

$A_1 \cup (A_2 \cup A_3) = (A_1 \cup A_2) \cup A_3$

$A_1 \cap (A_2 \cap A_3) = (A_1 \cap A_2) \cap A_3$

(ii) *Conmutativa:*

$A_1 \cup A_2 = A_2 \cup A_1$

$A_1 \cap A_2 = A_2 \cap A_1$

(iii) *Existencia de elemento neutro:*

Para la unión $\emptyset : A \cup \emptyset = A$

Para la intersección $E : A \cap E = E$

(iv) *Distributiva:*

$A_1 \cup (A_2 \cap A_3) = (A_1 \cup A_2) \cap (A_1 \cup A_3)$

$A_1 \cap (A_2 \cup A_3) = (A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3)$

(v) $\forall A \in \mathcal{P}(E) \qquad \exists \overline{A} \in \mathcal{P}(E) : A \cup \overline{A} = E$ *y* $A \cap \overline{A} = \emptyset$

Como **consecuencia** de estas propiedades $\left(\mathcal{P}(E), \cap, \cup, *^1\right)$ tiene estructura algebraica de álgebra de Boole y la denominaremos Álgebra de Boole de sucesos.

Definición 7 *Se dice que* $A, B \in \mathcal{P}(E)$ *son sucesos incompatibles o disjuntos (o mútuamente excluyentes) cuando al verificarse uno de ellos no se puede verificar el otro, es decir, cuando*

$$A \cap B = \emptyset$$

Definición 8 *Se dice que los sucesos* $A_1, ..., A_n \in \mathcal{P}(E)$ *son exhaustivos cuando siempre ocurre al menos uno de ellos, es decir, cuando*

$$A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = E$$

Definición 9 *Llamamos partición finita del espacio muestral* E *a una colección finita* $A_1, ..., A_n \in \mathcal{P}(E)$ *de subconjuntos que verifican las siguientes propiedades:*

(i) $\forall i \neq j \quad A_i \cap A_j = \emptyset$

(ii) $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = E$

Definición 10 *Dados dos sucesos* A *y* B *del espacio muestral* E*, se dice que* A *es un subsuceso de* B*,* $A \subset B$*, si siempre que ocurre* A *ocurre* B *pero no recíprocamente. En este caso escribiremos.*

$$A \subset B \quad : \quad A \Rightarrow B$$

Se tiene que:

$\emptyset \subset E$

$\emptyset \subset A \subset E$

y además, si $A \Rightarrow B$ y $B \Rightarrow A$ entonces $A = B$.

Definición 11 *Dados dos sucesos A y B de un mismo espacio muestral E, se define el suceso diferencia de A y B, $A - B$, como el suceso que ocurre cuando ocurre A y no ocurre B, es decir,*

$$A - B = A \cap \overline{B}$$

Proposición 12 *Si $A \subset B$ entonces $B - A$ es el suceso complementario de A sobre B.*

Demostración:
Sea $A \subset B$. Tenemos que demostrar que $\overline{A}^B = B - A$. Se tiene que:

$$\overline{A}^B = \{x \in B : x \notin A\} = B - A \qquad C.Q.D.\square$$

63.3.2 Frecuencias

Definición 13 *Repetimos un experimento aleatorio $n-$ veces y sea A un suceso. Se llama frecuencia absoluta de A al número*

$$n_A = \text{ número de veces que se verifica el suceso } A$$

Proposición 14 *Repetimos un experimento aleatorio $n-$ veces. Entonces:*
(1) $n_E = n$
(2) $\forall A \subset E \qquad n_A \geq 0$
(3) $\forall A, B \subset E : A \cap B = \emptyset \qquad n_{A\cup B} = n_A + n_B$

Demostración:
(1) Puesto que E se verifica siempre, se verificará las $n-$ veces que se realiza el experimento. Así, $n_E = n$.
(2) Por definición.
(3) El suceso $A \cup B$ se verificará tantas veces como se verifique A y tantas veces como se verifique B. Puesto que ninguna vez se verificarán ambos a la vez, ya que son incompatibles, el número de veces que se verificarán ambos es la suma de las frecuencias absolutas de cada uno de ellos. C.Q.D.$\square$

Corolario 15 *Las frecuencias absolutas de los sucesos de un experimento aleatorio tienen las siguientes propiedades adicionales:*
(i) $n_\emptyset = 0$
(ii) $n_{\overline{A}} = n_E - n_A$
(iii) $\forall A, B \subset E \qquad n_{A\cup B} = n_A + n_B - n_{A\cap B}$
(iv) $\forall A, B \subset E : A \subset B \qquad n_A \leq n_B$

Demostración:
(i) $E \cap \emptyset = \emptyset \Rightarrow n_E = n_{E\cup\emptyset} = n_E + n_\emptyset \Rightarrow n_\emptyset = n_E - n_E = 0$
(ii) $\overline{A} \cap A = \emptyset \Rightarrow n_E = n_{A\cup\overline{A}} = n_A + n_{\overline{A}} \Rightarrow n_{\overline{A}} = n_E - n_A$
(iii) $(B - A) \cap A = \emptyset \Rightarrow n_{A\cup B} = n_{A\cup(B-A)} = n_A + n_{B-A}$
Por otra parte, $(B - A) \cap (A \cap B) = \emptyset$ luego

$$n_B = n_{(B-A)\cup(A\cap B)} = n_{B-A} + n_{A\cap B} \Rightarrow n_{B-A} = n_B - n_{A\cap B}$$

Resumiendo: $n_{A\cup B} = n_A + n_{B-A} = n_A + n_B - n_{A\cap B}$

(iv) $A \subset B \Rightarrow B = A \cup (B - A) \Rightarrow n_B = n_A + n_{B-A} \geq n_A + 0 = n_A$
C.Q.D.$\square$

Los resultados obtenidos en el corolario anterior se pueden obtener por métodos similares a los de la proposición, pero al ser aquellos unos métodos de tipo intuitivo, hemos preferido obtener las propiedades adicionales como consecuencia de las primeras.

Definición 16 *Repetimos un experimento aleatorio $n-$ veces y sea A un suceso. Se llama frecuencia relativa de A al número*

$$f_A = \frac{n_A}{n}$$

Proposición 17 *Repetimos un experimento aleatorio $n-$ veces. Entonces:*

(1) $f_E = 1$

(2) $\forall A \subset E \qquad f_A \geq 0$

(3) $\forall A, B \subset E : A \cap B = \emptyset \qquad f_{A\cup B} = f_A + f_B$

Demostración:

(1) $n_E = n \Rightarrow f_E = \dfrac{n_E}{n} = \dfrac{n}{n} = 1$

(2) $n_A \geq 0 \Rightarrow f_A = \dfrac{n_A}{n} \geq 0$

(3) $f_{A\cup B} = \dfrac{n_{A\cup B}}{n} = \dfrac{n_A + n_B}{n} = \dfrac{n_A}{n} + \dfrac{n_B}{n} = f_A + f_B \qquad$ C.Q.D.$\square$

Corolario 18 *Las frecuencias relativas de los sucesos de un experimento aleatorio tienen las siguientes propiedades adicionales:*

(i) $f_\emptyset = 0$

(ii) $f_{\overline{A}} = f_E - f_A$

(iii) $\forall A, B \subset E \qquad f_{A\cup B} = f_A + f_B - f_{A\cap B}$

(iv) $\forall A, B \subset E : A \subset B \qquad f_A \leq f_B$

Demostración:

(i) $f_\emptyset = \frac{n_\emptyset}{n} = \frac{0}{n} = 0$

(ii) $f_{\overline{A}} = \frac{n_{\overline{A}}}{n} = \frac{n_E - n_A}{n} = \frac{n - n_A}{n} = 1 - \frac{n_A}{n} = 1 - f_A$

(iii) $f_{A\cup B} = \frac{n_{A\cup B}}{n} = \frac{n_A + n_B - n_{A\cup B}}{n} = \frac{n_A}{n} + \frac{n_B}{n} - \frac{n_{A\cap B}}{n} = f_A + f_B - f_{A\cap B}$

(iv) $f_A = \frac{n_A}{n} \leq \frac{n_B}{n} = f_B \qquad$ *C.Q.D.*$\square$

Teorema 19 ***(1ª Ley de los Grandes Números):*** *La frecuencia relativa de un suceso se acerca más y más a un valor fijo llamado probabilidad, conforme más veces se repite el experimento aleatorio.*

63.3.3 Probabilidad en espacios muestrales equiprobables

Sea E un espacio muestral con n puntos muestrales y supongamos que la frecuencia relativa de todos los puntos muestrales es $\frac{1}{n}$ (es decir, son "equiprobables"). En este caso particular se introduce la noción de probabilidad como un valor numérico asignado a cada elemento del espacio muestral o asignado a cada suceso, que se denomina su probabilidad.

Definición 20 *La probabilidad de un suceso A, denotada por $P(A)$, es el número*

$$P(A) = \frac{n_A}{n} \qquad \textit{(Regla de Laplace)}$$

Veamos las **propiedades** que cumple:

(1) $0 \leq P(A) \leq 1$
Cero para el suceso imposible $(\emptyset)$ y uno para el suceso seguro (E).

(2) Sean A y B sucesos incompatibles. Entonces:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Demostración:

$$P(A \cup B) = \frac{n_{A\cup B}}{n} = \frac{n_A + n_B}{n} = \frac{n_A}{n} + \frac{n_B}{n} = P(A) + P(B) \qquad C.Q.D.\square$$

(3) Sean A y B sucesos tales que $A \subset B$. Entonces:

$$P(B - A) = P(B) - P(A)$$

Demostración:
Como $(B - A) \cup A = B$ se tiene que

$$P(B) = P((B - A) \cup A) = P(B - A) + P(A)$$

de donde

$$P(B - A) = P(B) - P(A) \qquad C.Q.D.\square$$

(4) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
Demostración:

$$P(\overline{A}) = \frac{n_{\overline{A}}}{n} = \frac{n - n_A}{n} = 1 - \frac{n_A}{n} = 1 - P(A) \qquad C.Q.D.\square$$

(5) $P(\emptyset) = 0$ y $P(E) = 1$

63.3.4 Generalización de la probabilidad en espacios muestrales finitos

Sea E un espacio muestral finito cualquiera. La probabilidad en E de un suceso es un número asignado a ese suceso y las probabilidades asignadas a sucesos de una misma familia deben verificar los siguientes tres axiomas.

Así, a cada suceso del espacio muestral se le va a asociar un número (su probabilidad) que indicará el grado de credibilidad de dicho suceso.

Definimos la probabilidad como una función de conjunto $P : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathbb{R}$ que verifica los siguientes axiomas:

Axioma I : A cada suceso $A \in \mathcal{P}(E) \quad P(A) \geq 0$.

Axioma II : $P(E) = 1$

Axioma III : Si $A_1, ..., A_n \subset E$ son sucesos incompatibles, $A_i \cap A_j = \emptyset$ $\forall i \neq j$ entonces:

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$$

Como **consecuencia** de estos axiomas tenemos:

(1) $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$
Demostración:

$$P(E) = 1 = P\left(A \cup \overline{A}\right) = P(A) + P\left(\overline{A}\right) \Rightarrow P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A) \qquad C.Q.D.\square$$

(2) $P(\emptyset) = 0$, es decir, si $A = \emptyset \Rightarrow P(A) = 0$
Demostración:

$$P(\emptyset) = P\left(\overline{E}\right) = 1 - P(E) = 1 - 1 = 0 \qquad C.Q.D.\square$$

(3) Si $A \subset B$ entonces $P(A) \leq P(B)$
Demostración:
Como $B = A \cup (B - A)$ se tiene que

$$P(B) = P(A) + P(B - A)$$

de donde $P(A) \leq P(B)$ C.Q.D.$\square$

(4) $P(A) \leq 1 \quad \forall A \subset E$

(5) Si A y B son sucesos compatibles, entonces:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Demostración:

Como

$$A = (A \cap B) \cup \left(A \cap \overline{B}\right)$$
$$B = (A \cap B) \cup \left(\overline{A} \cap B\right)$$

resulta que

$$P(A) = P(A \cap B) + P\left(A \cap \overline{B}\right)$$
$$P(B) = P(A \cap B) + P\left(\overline{A} \cap B\right)$$

Por otra parte, como

$$A \cup B = (A \cap B) \cup \left(\overline{A} \cap B\right) \cup \left(A \cap \overline{B}\right)$$

resulta que

$$\begin{gathered} P(A \cup B) = P(A \cap B) + P\left(\overline{A} \cap B\right) + P\left(A \cap \overline{B}\right) = \\ = P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) + P(A) - P(A \cap B) = \\ = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \qquad C.Q.D.\square \end{gathered}$$

(6) Si A, B, C son sucesos compatibles, entonces:

$$\begin{gathered} P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - \\ -P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) \end{gathered}$$

(7) Subaditividad: $\forall A_1, ..., A_n \subset E$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

63.4 Espacio muestral general

63.4.1 Definición de $\sigma-$ álgebra

Sea E un espacio muestral arbitrario y $\mathcal{A}$ una familia de subconjuntos de E.

Definición 21 *Se dice que $\mathcal{A}$ es cerrada para la complementación respecto de E si $\forall A \in \in \mathcal{A}$ se verifica que $\overline{A} = E - A \in \mathcal{A}$.*

Se dice que $\mathcal{A}$ es cerrada para la relación de unión de un número finito de elementos si $\forall A_1, ..., A_n \in \mathcal{A}$ se verifica que $A_1 \cup ... \cup A_n \in \mathcal{A}$.

Se dice que $\mathcal{A}$ es cerrada respecto de la unión infinita numerable si para toda $\{A_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ se verifica que $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$.

Definición 22 *Si $\mathcal{A}$ es cerrada para la complementación y para la relación de unión de un número finito de elementos, se dice que $\mathcal{A}$ es una álgebra de Boole.*

Si $\mathcal{A}$ es cerrada para la complentación y para la unión infinita numerable de elementos, se dice que $\mathcal{A}$ es una $\sigma-$ álgebra.

Como **consecuencia** inmediata de las definiciones anteriores se tiene:

"toda álgebra de Boole es una $\sigma-$ álgebra"

Veamos algunas **propiedades** de las álgebras de Boole y de las $\sigma-$ álgebras:

(1) Sea $\mathcal{A}$ una álgebra de Boole. Entonces:

$$E, \emptyset \in \mathcal{A}$$

Demostración:

$$A \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{A} \Rightarrow E = A \cup \overline{A} \in \mathcal{A}$$
$$E \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{E} = \emptyset \in \mathcal{A} \qquad C.Q.D.\square$$

(2) Sea $\mathcal{A}$ una álgebra de Boole. Entonces:

$$A_1, ..., A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n \in \mathcal{A}$$

Demostración:

$$\overline{A_1}, ..., \overline{A_n} \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup ... \cup \overline{A_n} \in \mathcal{A} \Rightarrow A_1 \cap ... \cap A_n = \left(\overline{\overline{A_1} \cup ... \cup \overline{A_n}}\right) \in \mathcal{A}$$

C.Q.D.□

(3) Sea $\mathcal{A}$ una $\sigma-$ álgebra. Entonces:

$$\forall \{A_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$$

Demostración:

Se deja como ejercicio. C.Q.D.□

63.4.2 Probabilización de una $\sigma-$ álgebra: Axiomática de Kolmogorov

Definición 23 *Sea E un espacio muestral y $\mathcal{A}$ una $\sigma-$ álgebra sobre $\dot{E}$. El par $(E, \mathcal{A})$ se denomina espacio medible o probabilizable, en el sentido de que podemos definir sobre él una probabilidad.*

Definición 24 *Sea $(E, \mathcal{A})$ un espacio medible. Llamamos función de probabilidad sobre $(E, \mathcal{A})$ a una función de conjunto $P : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ que verifica los siguientes axiomas:*

(1) $\forall A \in \mathcal{A} \qquad P(A) \geq 0$

(2) $P(E) = 1$

(3) $\forall \{A_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{A} : A_n \cap A_m = \emptyset \qquad \forall n \neq m$ *se verifica:* $P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$

63.4.3 Consecuencias

Definición 25 *Un suceso casi nulo es un suceso que tiene probabilidad cero y que no es el suceso imposible.*

Example 26 *En la recta real la probabilidad de un número real,* $x \in \mathbb{R}$*, es* $P(\{x\}) = = \frac{1}{\infty} = 0$*, es decir,* $\{x\}$ *es un suceso casi nulo.*

Definición 27 *Un suceso casi seguro es un suceso que tiene probabilidad uno y que no es el suceso seguro* $\dot{E}$

Example 28 $\mathbb{I} = \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ *es un suceso casi seguro.*

Teorema 29 ***Principio de inclusión-exclusión:***

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i \neq j}^{n} P(A_i \cap A_j) +$$

$$+ \sum_{i<j<k}^{n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - ... + (-1)^{n+1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$$

Demostración:

Lo demostraremos por inducción sobre n :

$n = 1 : P(A_1) = P(A_1)$ trivialmente

$n = 2 : P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$

Hipótesis de inducción: lo suponemos cierto para $n-1$, es decir,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n-1} P(A_i) - \sum_{i \neq j}^{n-1} P(A_i \cap A_j) +$$

$$+ \sum_{j \neq i \neq k}^{n-1} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - ... + (-1)^{n} P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right)$$

Vamos a demostrarlo para n :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) + P(A_n) - P\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \cap A_n\right) \overset{H.I.}{=}$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} P(A_i) - \sum_{i \neq j}^{n-1} P(A_i \cap A_j) + \sum_{j \neq i \neq k}^{n-1} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - ...+$$

$$+ (-1)^{n} P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) + P(A_n) - \underbrace{P\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \cap A_n\right)}_{=P\left(\bigcup_{i=1}^{n-1}(A_i \cap A_n)\right)} \qquad (*)$$

Teniendo en cuenta que:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \cap A_n\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} (A_i \cap A_n)\right) \overset{H.I.}{=}$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} P(A_i \cap A_n) - \sum_{i \neq j}^{n-1} P(A_i \cap A_j \cap A_n) +$$

$$+ \sum_{j \neq i \neq k}^{n-1} P(A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_n) - ... + (-1)^n P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i \cap A_n\right)$$

y sustituyendo esta expresión en $(*)$, se obtiene el resultado. C.Q.D.□

Teorema 30 ***Desigualdad de Boole:***

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

Demostración:

A partir de la sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ construimos la sucesión $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ de la siguiente forma:

$B_1 = A_1$
$B_2 = A_2 \cap A_1^c$
$B_3 = A_3 \cap A_2^c \cap A_1^c$
...
$B_n = A_n \bigcap_{k=1}^{n-1} A_k^c$

Esta sucesión $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de disjuntos, con lo que

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n)$$

Por otro lado, al ser $B_n \subset A_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ será $P(B_n) \leq P(A_n)$.

Por último, como

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

se tendrá que

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

de donde

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \qquad C.Q.D.\square$$

63.5 Espacio de probabilidad

Definición 31 *Se llama espacio de probabilidad a una terna* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$*, donde* $\emptyset \neq \Omega$ *es un conjunto arbitrario,* $\mathcal{A}$ *es una* $\sigma-$ *álgebra sobre* Ω *y* P *es una medida de probabilidad sobre* $(\Omega, \mathcal{A})$*. A los elementos de* $\mathcal{A}$ *se les llama sucesos en vez de conjuntos medibles.*

En primer lugar vamos a caracterizar la medida de probabilidad:

Teorema 32 *Sea* $(\Omega, \mathcal{A})$ *un espacio medible y* $P : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$*. Son equivalentes:*

(i) P *es una medida de probabilidad*

(ii) *Se verifican las siguientes condiciones:*

(a) $\forall A \in \mathcal{A} \qquad P(A) \geq 0$

(b) $P(\Omega) = 1$

(c) $\forall A, B \in \mathcal{A} : A \cap B = \emptyset \qquad P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

(d) $\lim\limits_{n \to +\infty} P(A_n) = 0 \qquad \forall \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ *con* $A_n \searrow 0$

En segundo lugar, vamos a definir medidas de probabilidad en espacios muestrales finitos y en espacios muestrales infinitos numerables:

Proposición 33 *(Medida de probabilidad en espacios muestrales finitos): Sea* $(\Omega, \mathcal{A})$ *un espacio medible y supongamos que* $\Omega = \{e_1, ..., e_n\}$*. El modo más sencillo de definir una medida de probabilidad es considerar* $\{p_1, ..., p_n\} \subset \mathbb{R}$ *tales que* $\sum\limits_{k=1}^{n} p_k = 1$ *y* $p_k \geq 0 \quad \forall k = 1, ..., n$*, donde* $p_k = P(e_k)$*. De este modo, la* P *así definida es una medida de probabilidad.*

Demostración:

Si $A \in \mathcal{A}$, entonces será $A = \bigcup\limits_{\{i : e_i \in A\}} e_i$ y por tanto:

$P(A) = \sum\limits_{\{i : e_i \in A\}} p_i$

$P(A) \geq 0$

$P(\Omega) = 1 \qquad$ C.Q.D.$\square$

Proposición 34 *(Medida de probabilidad en espacios muestrales infinitos numerables): Sea* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ *un espacio medible y supongamos que* Ω *es infinito numerable o finito. Son equivalentes:*

(1) $P : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ *es una medida de probabilidad*

(2) *Se verifican las siguientes condiciones:*

(a) $P(\{\omega\}) \geq 0 \quad \forall \omega \in \Omega$ *y* $\sum\limits_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) = 1$

(b) $P(\emptyset) = 0$

(c) $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega) - \{\emptyset\} \qquad P(A) = \sum\limits_{\omega \in A} P(\{\omega\})$

Demostración:

$(1) \Rightarrow (2)$ Si P es una medida de probabilidad, entonces $\forall \omega \in \mathcal{P}(\Omega)$ será $P(\{\omega\}) \geq 0$, $\Omega = \bigcup\limits_{\omega \in \Omega} \{\omega\}$ y por el axioma II será $P(\Omega) = 1$, y como P es una probabilidad y Ω es unión numerable de sucesos elementales será

$$P\left(\bigcup_{\omega \in \Omega} \{\omega\}\right) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) = 1$$

con lo que tenemos demostrado (a). De forma trivial se demuestran (b) y (c).

$(2) \Rightarrow (1)$ Sea P una función de conjunto que satisface $(a), (b)$ y (c). Entonces

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega) \text{ con } A \neq \emptyset,\ A = \bigcup_{\omega \in A} \omega$$

y por (c) será

$$P(A) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) \geq 0 \text{ por } (a)$$

Por otro lado $P(\emptyset) = 0$ por (b). Así pues se verifica el axioma I:

$$P(\Omega) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) = 1 \text{ por } (a) \text{ y } (b)$$

Falta probar la $\sigma-$ aditividad. Sea $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ una sucesión de disjuntos de la cual suponenmos que $A_n \neq \emptyset \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Como $A_n \subset \Omega \Rightarrow A_n$ es finito o infinito numerable $\Rightarrow$ será de la forma

$$A_n = \{\omega_{n_1}, ...\} \text{ con } n \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{\omega_{1_1}, \omega_{1_2}, ..., \omega_{2_1}, \omega_{2_2}, ..., \omega_{n_1}, \omega_{n_2}, ...\}$$

en donde todos los ω_{n_j} son distinto por ser los A_n disjuntos. Por tanto, por (c) será

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{y_i} P\left(\{\omega_{n_j}\}\right)$$

en donde

$$y_i = \begin{cases} \text{número de elementos de } A_n \text{ si, y sólo si, } A_n \text{ es finito} \\ \infty \text{ si } A_n \text{ es numerable} \end{cases}$$

y por tanto, aplicando (c) a $\sum\limits_{j=1}^{y_i} P\left(\{\omega_{n_j}\}\right) = P(A_n)$ obtenemos:

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

con lo que queda demostrado el axioma III y el teorema. C.Q.D.$\square$

Para terminar el apartado resumimos en la siguiente proposición las propiedades más importantes relativas a las medidas de probabilidad.

Proposición 35 *Sea* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espacio de probabilidad. Se verifican las siguientes propiedades:*

(1) $P(\emptyset) = 0$

(2) $\forall A, B \in \mathcal{A}$ *con* $A \cap B = \emptyset$ *se tiene que* $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

(3) $\forall A, B \in \mathcal{A}$ *con* $A \subset B$ *se tiene que* $P(B - A) = P(B) - P(A)$

(4) $\forall A \in \mathcal{A} \quad P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$

(5) $\forall A, B \in \mathcal{A}$ *con* $A \subset B$ *se tiene que* $P(A) \leq P(B)$

(6) $\forall A, B \in \mathcal{A} \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

(7) $\forall \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ *con* $A_n \subset A_{n+1}$ *se tiene que* $P\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} P(A_n)$

(8) $\forall \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ *con* $A_{n+1} \subset A_n$ *se tiene que* $P\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} P(A_n)$

(9) $P\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} P(A_n) \qquad \forall \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ *con* $A_n \cap A_m = \emptyset$ *para* $n \neq m$

Demostración:

(1) $\forall n \in \mathbb{N}$ sea $A_n = \emptyset$. Entonces, $P\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} P(A_n)$, luego la serie $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} P(A_n)$ es convergente y por tanto, $\lim\limits_{n\to+\infty} P(A_n) = 0$, pero $P(A_n) = P(\emptyset)$. De ahí el resultado.

(2) Sea $A_1 = A$, $A_2 = B$ y $\forall n \geq 3$ sea $A_n = \emptyset$. Entonces:

$$P(A \cup B) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P(A_1) + P(A_2) + \sum_{n=3}^{+\infty} P(A_n) =$$

$$= P(A) + P(B) + \sum_{n=3}^{+\infty} P(\emptyset) = P(A) + P(B)$$

(3) Como $A \subset B \Rightarrow A \cup (B - A) = A \cup B = B$ y además $A \cap (B - A) = \emptyset$ luego

$$P(B) = P(A \cup (B - A)) = P(A) + P(B - A)$$

(4) Como $A \subset \Omega$ se tiene que

$$1 = P(\Omega) = P(A) + P(\Omega - A) \Rightarrow P\left(\overline{A}\right) = P(\Omega - A) = 1 - P(A)$$

(5) Como $A \subset B$ se tiene que

$$P(B) = P(A) + P(B - A) \geq P(A)$$

ya que $P(B - A) \geq 0$

(6) Como $A \cap B \subset B$ entonces

$$P(B) = P(A \cap B) + P(B - (A \cap B)) \overset{(*)}{=} P(A \cap B) + P(B - A)$$

donde

$$B - (A \cap B) = B \cap (A \cap B)^c = B \cap (A^c \cup B^c) = (B \cap A^c) \cup (B \cap B^c) =$$
$$= B \cap A^c = B - A$$

y por tanto

$$P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$$

Por otra parte, como

$$A \cap (B - A) = A \cap (B \cap A^c) = \emptyset \cap B = \emptyset$$

resulta:

$$P(A \cup B) = P(A \cup (B - A)) = P(A) + P(B - A) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

(7) Sea $B_1 = A$ y $\forall n \geq 2$ sea $B_n = A_n - A_{n-1}$. Entonces, $\forall n \in \mathbb{N}\ A_{n-1} \subset A_n$ y por tanto

$$P(B_n) = P(A_n - A_{n-1}) = P(A_n) - P(A_{n-1})$$

y además todos los B_n son disjuntos.

Así pues,

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(B_n) =$$
$$= P(A_1) + \sum_{n=2}^{+\infty} (P(A_n) - P(A_{n-1})) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

(8) $\forall n \in \mathbb{N} \quad A_{n+1} \subset A_n \Rightarrow \Omega - A_n \subset \Omega - A_{n+1}$

Por la propiedad anterior

$$1 - P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P\left(\Omega - \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (\Omega - A_n)\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} P(\Omega - A_n) = \lim_{n\to\infty} (1 - P(A_n))$$

y de ahí el resultado.

(9) Veamos en primer lugar que $\forall n \in \mathbb{N}$ arbitrario pero fijo y $\forall A_1, ..., A_n \in \mathcal{A}$ $:\ A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$ se verifica:

$$P(A_1 \cup ... \cup A_n) = P(A_1) + ... + P(A_n)$$

Si $n = 2$ la afirmación se deduce de la propiedad 6

Supongamos que el resultado es cierto para n y vamos a demostrarlo para $n + 1$:

$$P((A_1 \cup ... \cup A_n) \cap A_{n+1}) = P((A_1 \cap A_{n+1}) \cup ... \cup (A_n \cap A_{n+1})) =$$
$$= P(A_1 \cap A_{n+1}) + ... + P(A_n \cap A_{n+1}) = 0$$

y por tanto

$$P(A_1 \cup ...A_n \cup A_{n+1}) = P(A_1 \cup ... \cup A_n) + P(A_{n+1})$$

Así pues, por inducción tenemos demostrado lo que queríamos.

Sea ahora $B_n = A_1 \cup ... \cup A_n$. Se tiene que $\forall n \in \mathbb{N} \quad B_n \subset B_{n+1}$ y $P(B_n) = = P(A_1) + ... + P(A_n)$. Aplicando la propiedad (1) se tiene que:

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(B_n) =$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(P(A_1) + ... + P(A_n)\right) = P\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

C.Q.D.□