Tema 31

Integración numérica. Métodos y aplicaciones

31.1 Planteamiento del problema

31.1.1 El problema de la integración numérica

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función integrable en $[a, b]$ y conocida en puntos $x_0, ..., x_n$. Una fórmula de integración numérica basada en dicha información es un expresión del tipo:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i) + R(f) \qquad (*)$$

donde $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i)$ es una aproximación de $\int_a^b f(x)\,dx$ y $R(f)$ es el error que se comete al tomar dicha aproximación.

Los primeros dos problemas que se nos plantean al obsevar la fórmula anterior son:

1^o) ¿Cómo dar valores "adecuados" a los α_i?.

2^o) Determinar $R(f)$ o al menos dar una cota superior.

31.1.2 Fórmulas de integración numérica

Vamos a abordar en primer lugar el cálculo de los coeficientes α_i.

Consideramos el polinomio de interpolación de grado n de $f(x)$, esto es, $f(x) = p_n(x) + E_n(x)$, e integramos:

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &= \int_a^b p_n(x)\,dx + \int_a^b E_n(x)\,dx \underset{(1)}{=} \int_a^b \sum_{i=0}^{n} l_i(x) f(x_i)\,dx + R(f) = \\
&= \sum_{i=0}^{n} \left(\int_a^b l_i(x)\,dx \right) f(x_i) + R(f)
\end{aligned}
$$

donde $R(f) = \int_a^b E_n(x)\,dx$ y en (1) hemos usado la fórmula de Lagrange para el polinomio de interpolación.

Esta fórmula se interpretra diciendo que para calcular un valor aproximado de la integral de f en $[a,b]$ podemos calcular el valor de la integral de su polinomio de interpolación en unos puntos dados.

Si elegimos $\alpha_i = \int_a^b l_i(x)\,dx$ obtenemos una fórmula de tipo $(*)$ que llamaremos de tipo interpolatorio clásico:

$$
\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \int_a^b l_i(x)\,dx + R(f) \qquad (**)
$$

Definición 1 *Diremos que una fórmula de tipo $(*)$ es exacta para una función integrable ϕ sii $R(\phi) = 0$.*

Veamos que relación hay entre la exactitud de una fórmula de integración numérica y las fórmulas de tipo interpolatorio clásico. Dicha relación nos la da el siguiente :

Teorema 2 *Una fórmula de tipo $(*)$ es exacta en $\mathbb{P}_n$ si, y sólo si, es de la forma $(**)$ (esto es, es de tipo interpolatorio clásico).*

Demostración:

$\Rightarrow$) Supongamos que es exacta en $\mathbb{P}_n$, entonces es exacta para los polinomios de Lagrange asociados a $x_0, ..., x_n : l_0(x), ..., l_n(x)$, esto es,

$$
\begin{aligned}
\int_a^b l_0(x)\,dx &= \sum_{i=0}^{n} \alpha_i l_0(x) = \alpha_0 \\
&\vdots \\
\int_a^b l_n(x)\,dx &= \sum_{i=0}^{n} \alpha_i l_n(x) = \alpha_n
\end{aligned}
$$

$\Leftarrow$) Si $q \in \mathbb{P}_n \Rightarrow p_n(x) = q(x) \Rightarrow \int_a^b p_n(x)\,dx = \int_a^b q(x)\,dx \Rightarrow$ (fórmula de Lagrange) $\sum_{i=0}^{n} f(x_i) \int_a^b l_i(x)\,dx = \int_a^b q(x)\,dx \Rightarrow R(q) = 0.$ c.q.d.$\diamond$

31.1.3 Estudio del error en las fórmulas de tipo interpolatorio.

Sabemos que $E(x) = f(x) - p(x)$ y en el tema de interpolación vimos que

$$E(x) = f[x_0, ..., x_n; x]\,\Pi(x)$$

siendo $\Pi(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$, y si f es de clase C^{n+1} en un intervalo, como el $[a,b]$, que contenga a los x_i,

$$E(x) = \frac{f^{n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\Pi(x)$$

donde $\xi \in \left]a,b\right[$.

En el caso de las fórmulas de integración numérica de tipo interpolatorio, el error $R(f)$ tomará la forma:

$$R(f) = \int_a^b E(x)\,dx = \int_a^b f[x_0, ..., x_n; x]\,\Pi(x)\,dx$$

A veces se puede simplicar esta expresión. Para ello suele usarse el Teorema del Valor Medio para integrales, que dice que si una función g es integrable en $[a,b]$ y no cambia de signo en $\left]a,b\right[$ y otra función f es continua en $[a,b]$, se tiene

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(\eta)\int_a^b g(x)\,dx$$

siendo $\eta \in \left]a,b\right[$.

Así, si $\Pi(x)$ no cambia de signo en $[a,b]$, se tiene:

$$R(f) = f[x_0, ..., x_n; \zeta]\int_a^b \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)\,dx$$

con $\zeta \in \left]a,b\right[$, y como además

$$f[x_0, ..., x_n; \zeta] = \frac{f^{n+1)}(\eta)}{(n+1)!}$$

siendo η un punto intermedio entre a y b, se tiene:

$$R\left(f\right)=\frac{f^{n+1)}\left(\eta\right)}{\left(n+1\right)!}\int\limits_{a}^{b}\prod_{i=0}^{n}\left(x-x_{i}\right)dx$$

Por otra parte, si $f\in C^{n+1}\left(\left[a,b\right]\right)$ y $M=\underset{a\leq x\leq b}{Máx}\left|f^{n+1)}\left(x\right)\right|$ se tiene la siguiente acotación del error:

$$\left|R\left(f\right)\right|\leq\frac{M}{\left(n+1\right)!}\left|\int\limits_{a}^{b}\Pi\left(x\right)dx\right|\leq\frac{M}{\left(n+1\right)!}\int\limits_{a}^{b}\left|\Pi\left(x\right)\right|dx$$