Tema 27

Desarrollo de un función en serie de potencias. Teorema de Taylor. Aplicaciones al estudio local de funciones

27.1 Forma infinitesimal del resto

Definición 1 *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función, $n \in \mathbb{N}$ y supongamos que $f \in$ $\in D^n(A)$. Llamaremos polinomio de Taylor de orden n de la función f en el punto a a la función polinómica $P_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:*

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Es inmediato comprobar que P_n verifica:

$$P_n(a) = f(a), \; P_n'(a) = f'(a), ..., P_n^{n)}(a) = f^{n)}(a)$$

Además, se puede comprobar que P_n es la única función polinómica de grado menor o igual que n que verifica las anteriores condiciones. En el caso $n = 1$ tenemos $P_1(x) = = f(a) + f'(a)(x-a), \; \forall x \in \mathbb{R}$ y por tanto el polinomio de Taylor de grado 1 de una función en un punto no es otra cosa que la función afín tangente a dicha función en el punto en cuestión. Así pues, el concepto de polinomio de Taylor engloba al de función afín tangente. Cabe esperar que el polinomio de Taylor P_n nos de una buena aproximación de la función f en las proximidaddes del punto a, aproximación que deberá ser tanto mejor cuanto mayor sea el número natural n. Este hecho, bajo ciertas condiciones de regularidad de la función f, se demuestra a continuación.

Teorema 2 ***(Fórmula infinitesimal del resto)****: Sea I un intervalo, $n \geq 2$ un número natural y $f : I \to \mathbb{R}$ una función $(n-1)-$ veces derivable en un* *punto a de I y sea P_n el polinomio de Taylor de orden n de f en a. Entonces:*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x-a)^n} = 0$$

Definición 3 *La función $R_n : I \to \mathbb{R}$ dada por $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$, $\forall x \in I$, recibe el nombre de resto de Taylor de orden n de f en el punto a.*

El resultado anterior nos informa sobre la rapidez con que el resto de Taylor converge a cero en el punto a.

La fórmula infinitesimal del resto nos informa de que el resto de Taylor de una función en un punto converge a cero en dicho punto. Nuestro próximo resultado, la fórmula de Taylor, nos da una expresión concreta para el resto de Taylor bajo condiciones algo más restrictivas.

Teorema 4 ***(Fórmula de Taylor)****: Sea $\emptyset \neq I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo no reducido a un punto, $f : I \to \mathbb{R}$ una función de clase C^n en I y tal que $\exists f^{n+1)}$ en $int(I)$. Sean $a, x \in I$ con $a < x$. Entonces, $\forall p \in \mathbb{N}$, $\exists \xi \in]a, x[$ tal que:*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + ... + \frac{f^{n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$$

donde

$$R_n(x) = \frac{f^{n+1)}(\xi)}{n!p}(x-a)^p (x-\xi)^{n-p+1}$$

es el llamado resto de Schlömilch de f en a.

Demostración:

Sea

$$c := \frac{1}{(x-a)^p}\left(f(x) - f(a) - \frac{f'(a)}{1!}(x-a) - ... - \frac{f^{n)}(a)}{n!}(x-a)^n\right) \in \mathbb{R}$$

y definamos $F : [a, x] \to \mathbb{R}$ por:

$$F(t) = f(x) - f(t) - \frac{f'(t)}{1!}(x-t) - ... - \frac{f^{n)}(t)}{n!}(x-t)^n - c(x-t)^p$$

Por las hipótesis que verifica f se tiene que F es continua en $[a, x]$ y derivable en $]a, x[$. Además, $F(a) = F(x) = 0$, luego, por el teorema de Rolle, aplicado a la función F en $[a, x]$, existe $\xi \in]a, x[$ tal que $F'(\xi) = 0$. Ahora bien, como

$$F'(t) = -\frac{f^{n)}(t)}{n!}(x-t)^n + cp(x-t)^{p-1} \qquad \forall t \in]a, x[$$

se tiene que

$$0 = -\frac{f^{n)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n + cp(x-\xi)^{p-1} \qquad [1]$$

De $F(a) = 0$ resulta que

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + ... + \frac{f^{n)}(a)}{n!}(x-a)^n + c(x-a)^p$$

Sustituyendo [1] en la última igualdad resulta:

$$f(x) =$$

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + ... + \frac{f^{n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{n+1)}(\xi)}{n!p}(x-a)^p(x-\xi)^{n-p+1}$$

como queríamos demostrar. □

Corolario 5 ***(Resto de Lagrange)****: Si en el teorema de Taylor tomamos $p = n+1$, existe $\xi \in]a, x[$ tal que:*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + ... + \frac{f^{n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$$

donde

$$R_n(x) = \frac{f^{n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

es el llamado resto de Lagrange de f en a.

27.2 Series de potencias. Radio de convergencia

Las series de potencias constituyen un tipo muy particular y al mismo tiempo el tipo más importante de series funcionales. Tienen propiedades de convergencia muy concretas y dan lugar a la clase más perfecta de funciones reales de variable real.

La obtención de algunos desarrollos en series de potencias de las funciones elementales puede muy bien servir para estudiar desde otro punto de vista dichas funciones.

Definición 6 *Sea a un número real cualquiera. Se llama serie de potencias centrada en $a \in \mathbb{R}$ a toda serie de funciones en $\mathbb{R}$ de la forma*

$$\sum_{n\geq 0} a_n (x-a)^n$$

donde a_0 es un número real cualquiera y $\{a_n\}$ es una sucesión arbitraria de números reales.

Obsérvese que toda serie de potencias $\sum_{n\geq 0} a_n (x-a)^n$ converge[1], trivialmente, en el punto a.

[1] **Definición:** Se dice que la serie funcional $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge en $\omega \in \Omega$ sii la serie de números reales $\sum_{n\geq 0} f_n(\omega)$ converge.

A continuación vamos a desarrollar un método general para estudiar la convergencia puntual y uniforme de cualquier serie de potencias. El punto de partida para ello es el siguiente resultado, que no es más que una sencilla aplicación del criterio de Weierstrass[2].

Proposición 7 ***(Lema de Abel)****: Sea* $\sum_{n\geq 0} a_n (x-a)^n$ *una serie de potencias. Supongamos que existe un número real* $r > 0$ *tal que la sucesión* $\{a_n r^n\}$ *esté acotada. Entonces, para cualquier número positivo* ρ*, con* $\rho < r$*, la serie converge absoluta y uniformemente en el intervalo* $[a-\rho, a+\rho]$*.*

En vista de lo anterior parece natural que, dada una serie de potencias, busquemos un número positivo r que cumpla las hipótesis del lema de Abel y que sea "lo más grande posible".

Definición 8 *Sea* $\sum_{n\geq 0} a_n (x-a)^n$ *una serie de potencias y*

$$A = \{r > 0 : \{a_n r^n\} \text{ está acotada}\}$$

Se define el radio de convergencia R *de la serie de la siguiente forma, atendiendo a los tres casos que pueden darse:*
- Si $A = \emptyset$ *diremos que la serie tiene radio de convergencia cero:* $R = 0$
- Si $A \neq \emptyset$ *y no mayorado diremos que la serie tiene radio de convergencia infinito:* $R = \infty$
- Si $A \neq \emptyset$ *y mayorado, el radio de convergencia de la serie es* $R = \sup A$*.*

Nótese que el radio de convergencia de una serie de potencias es independiente del punto a en el que esté centrada la serie, sólo depende de la sucesión $\{a_n\}$ de coeficientes.

El conocimiento del radio de convergencia de una serie de potencias proporciona casi toda la información sobre la convergencia de la serie, como muestra el siguiente resultado:

Proposición 9 *Sea* $\sum_{n\geq 0} a_n (x-a)^n$ *una serie de potencias y sea* R *su radio de convergencia.*

(*i*) *Si* $R = 0$ *la serie sólo converge en el punto* a*.*

[2] **Test de Weierstrass:** Sea $\Omega \neq \emptyset$, $\sum_{n\geq 0} f_n$ una serie de funciones en Ω y $X \subset \Omega$. Supongamos que $\exists \{M_n\} \subset \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{N}$ tales que, para $n \geq k$ se tiene:

$$|f_n(x)| \leq M_n \qquad \forall x \in X$$

Supongamos además que la serie de números reales $\sum_{n\geq 0} M_n$ es convergente. Entonces, la serie $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge absoluta y uniformemente en X.

(ii) Si $R = \infty$ la serie converge absoluta y uniformemente en todo intervalo compacto. En particular converge absolutamente en $\mathbb{R}$.

(iii) Si R es un número real positivo, la serie converge absoluta y uniformemente en todo compacto que esté contenido en el intervalo $]a-R, a+R[$. En particular, la serie converge absolutamente en $]a-R, a+R[$. Además, la serie no converge en ningún punto de $\mathbb{R} - [a-R, a+R]$.

Los dos primeros apartados de la proposición anterior describen perfectamente la convergencia de una serie de potencias cuyo radio de convergencia sea 0 ó ∞. Cuando el radio de convergencia es un número real positivo R, nada se afirma sobre la convergencia de la serie en los puntos $a-R$ y $a+R$. Volveremos más adelante sobre este problema: por ahora, a la vista de la proposición anterior, nos interesa mucho más encontrar un procedimiento expeditivo para determinar el radio de convergencia sin tener que acudir a la definición. Dicho procedimiento viene dado por el siguiente resultado.

Proposición 10 ***(Teorema de Cauchy-Hadamard)****: Sea $\sum\limits_{n\geq 0} a_n (x-a)^n$ una serie de potencias y sea R su radio de convergencia.*

(i) Si la sucesión $\left\{ \sqrt[n]{|a_n|} \right\}$ no está mayorada, entonces $R = 0$.

(ii) Supongamos que $\left\{ \sqrt[n]{|a_n|} \right\}$ es una sucesión mayorada. Consideremos la sucesión $\{b_n\}$ definida por:

$$b_n = \sup\left\{ \sqrt[k]{|a_k|} : k \in \mathbb{N},.\ k \geq n \right\} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Entonces, la sucesión $\{b_n\}$ es convergente y, notando $L = \lim b_n$, se tiene:

(a) Si $L = 0$, entonces $R = \infty$

(b) Si $L > 0$, entonces $R = \frac{1}{L}$

Además, si la sucesión $\left\{ \sqrt[n]{|a_n|} \right\}$ es convergente, entonces su límite es L.

Corolario 11 *Sea $\sum\limits_{n\geq 0} a_n (x-a)^n$ una serie de potencias y R su radio de convergencia. Supongamos que $a_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

(i) Si $\left\{ \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \right\} \to +\infty$ entonces $R = 0$.

(ii) Si $\left\{ \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \right\} \to 0$ entonces $R = \infty$

(iii) Si $\left\{ \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \right\} \to L > 0$ entonces $R = \frac{1}{L}$.

En general no se puede afirmar nada sobre la convergencia de la serie en los puntos $a-R$ y $a+R$ cuando la serie $\sum\limits_{n\geq 0} a_n (x-a)^n$ tiene radio de convergencia $R \in \mathbb{R}^+$. El siguiente resultado nos da información sobre este problema.

Proposición 12 ***(Teorema de Abel)****: Sea $\sum\limits_{n\geq 0} a_n (x-a)^n$ una serie de potencias con radio de convergencia $R \in \mathbb{R}^+$. Si la serie converge en el punto $a+R$ (respectivamente $a-R$) entonces lo hace uniformemente en el intervalo $[a, a+R]$ (respectivamente $[a-R, a]$).*

El resultado anterior es útil en ocasiones para determinar la suma de ciertas series de números reales. Supongamos que la serie $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ converge; entonces la serie $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ converge uniformemente en $[0,1]$ (si el radio de convergencia es 1 ello se deduce del teorema anterior, en otro caso es $R \in \,]1,+\infty[$ ó $R=\infty$ y bastaría el lema de Abel), con lo que poniendo

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \qquad \forall x \in [0,1]$$

la función f es continua en $[0,1]$ y, por tanto:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = f(1) = \lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Aunque resulte sorprendente, a veces se conoce la suma de la serie

$$\sum_{n\geq 0} a_n x^n$$

para $x \in [0,1[$ y a través de ella se calcula la suma para $x=1$.

27.3 Funciones definidas por series de potencias

Las series de potencias permiten definir con extremada facilidad multitud de funciones. Supongamos que la serie de potencias

$$\sum_{n\geq 0} a_n (x-a)^n$$

tiene radio de convergencia R, no nulo (para ello, según el teorema de Cauchy-Hadamard, es condición necesaria y suficiente que la sucesión $\left\{\sqrt[n]{|a_n|}\right\}$ esté mayorada). Pongamos:

$$I = \,]a-R, a+R[\quad \text{si } R \in \mathbb{R}^+ \quad \text{e} \quad I = \mathbb{R} \quad \text{si} \quad R = \infty$$

En adelante nos referiremos al intervalo I llamándole intervalo de convergencia de la serie en cuestión. Puesto que la serie converge (incluso absolutamente) en I podemos definir una función $f : I \to \mathbb{R}$ por:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-a)^n \qquad \forall x \in I$$

Nuestro objetivo en este apartado es obtener importantes propiedades de las funciones definidas por este procedimiento. Pensemos de momento en la posible derivabilidad de f. Si notamos

$$f_0(x) = a_0, \;\; f_n(x) = a_n (x-a)^n \qquad \forall x \in I, \;\; \forall n \in \mathbb{N}$$

es claro que f_0 es derivable en I con derivada nula y, para todo natural n, f_n es derivable en I con:

$$f_n'(x) = na_n (x-a)^{n-1} \qquad \forall x \in I, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Vamos a formalizar todo esto.

Teorema 13 *Sea* $\sum\limits_{n\geq 0} a_n (x-a)^n$ *una serie de potencias con radio de convergencia no nulo, sea* I *su intervalo de convergencia y* $f : I \to \mathbb{R}$ *la función definida por:*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-a)^n \qquad \forall x \in I$$

Entonces, $f \in C^{\infty}(I)$ *y, para todo* $k \in \mathbb{N}$ *se verifica que:*

$$f^{k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k} (x-a)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n (x-a)^{n-k} \quad \forall x \in I \qquad [*]$$

En particular, $f^{k)}(a) = k! a_k \qquad \forall k \in \mathbb{N}$.

Notemos que la fórmula $[*]$ para las derivadas sucesivas de la función definida por una serie de potencias significa ni más ni menos que dichas derivadas pueden obtenerse derivando cada uno de los términos de la serie de partida y sumando después la serie obtenida, de tal forma que la suma de la serie de potencias puede manejarse, a efectos de cómputo de derivadas, como si se tratase de una suma finita. Esta idea es más útil en la práctica que la aplicación mecánica de la fórmula $[*]$. Ello se debe a que con frecuencia el teorema anterior se aplica a series funcionales que formalmente no vienen dadas como series de potencias.

Para terminar este apartado vamos a ver como se integra la función definida por la suma de una serie de potencias.

Teorema 14 *Sea* $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ *una serie de potencias con radio de convergencia* $R \neq 0$ *y consideremos la función suma de dicha serie:*

$$\begin{gathered} f : \left]-R, R\right[\to \mathbb{R} \\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \end{gathered}$$

Entonces $f \in R([0,x]) \qquad \forall x \in \left]-R, R\right[$ *y*

$$\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \qquad \forall x \in \left]-R, R\right[$$

27.4 Desarrollos en serie de potencias

El principal resultado del apartado anterior nos informa de que la función definida por una serie de potencias es de clase C^∞ en su intervalo de definición. Nos ocuparenos ahora del problema, en cierto modo recíproco, de si, dada una función de clase C^∞ en un intervalo, podemos o no encontrar una serie de potencias cuya suma coincida con la función dada; dicho de otra forma, si podemos o no "desarrollar" en serie de potencias dicha función. La respuesta será afirmativa para las funciones elementales, pero será negativa en general.

Sea $a \in \mathbb{R}$ arbitrario y sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cuyo conjunto de definición contenga un intervalo de la forma $]a - \delta, a + \delta[$ con $\delta > 0$. La pregunta es: ¿Existe una serie de potencias $\sum\limits_{n \geq 0} a_n (x-a)^n$ centrada en a, cuyo intervalo de convergencia contenga al intervalo $]a - \delta, a + \delta[$ y tal que para $x \in \mathbb{R}$ con $|x - a| < \delta$ se tenga:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-a)^n \quad ?$$

Por lo visto anteriormente, para que la pregunta anterior tenga respuesta afirmativa es condición necesaria que f sea una función de clase C^∞ en el intervalo $]a - \delta, a + \delta[$, puesto que coincide en dicho intervalo con la función suma de una serie de potencias.

Además, el mismo resultado nos dice que se debe tener:

$$f^{n)}(a) = a_n n! \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

y, evidentemente, $a_0 = f(a)$, luego la serie

$$\sum_{n \geq 0} a_n (x-a)^n$$

está, a priori, determinada en forma única. A continuación damos nombre a dicha serie:

Definición 15 *Sea $a \in \mathbb{R}$ y $f \in C^\infty(]a - \delta, a + \delta[)$ con $\delta > 0$. Llamaremos serie de Taylor de la función f en el punto a a la serie de potencias:*

$$\sum_{n \geq 0} \frac{f^{n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

Notemos que el $(n+1)-$ ésimo término de la sucesión de sumas parciales de la anterior serie es el polinomio P_n dado por:

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{n)}a}{n!}(x-a)^n \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

que no es otro que el polinomio de Taylor de orden n de la función f en el punto a. Ello justifica el nombre de serie de Taylor.

La pregunta planteada anteriormente sobre la posibilidad se desarrollar una función en serie de potencias puede ahora concretarse mucho mejor: Dada una función f en las condiciones de la definición anterior, ¿existe un número $\rho > 0$ tal que, para $x \in \in]a-\rho, a+\rho[$ se verifique que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad ?$$

Para que la pregunta anterior tenga respuesta afirmativa es preciso en primer lugar que la serie de Taylor tenga radio de convergencia no nulo. Ello no siempre ocurre, ya que, de hecho cualquier serie de potencias es la serie de Taylor de una función. Concretamente, existe un teorema de E. Borel que afirma lo siguiente: "Si $\{a_n\}$ es una sucesión cualquiera de números reales y $a \in \mathbb{R}$ es arbitrario, existe $\delta > 0$ y una función f de clase C^∞ en el intervalo $]a-\delta, a+\delta[$ tal que:

$$f^{n)}(a) = a_n \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{"}$$

En segundo lugar, aún cuando la serie de Taylor tenga radio de convergencia no nulo puede ocurrir que su suma no coincida con la función f que la generó más que en el punto a .Ello se pone de manifiesto considerando la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^*, \ \ f(0) = 0$$

La función f es de clase C^∞ en $\mathbb{R}$ y $f^{n)}(0) = 0, \ \ \forall n \in \mathbb{N}$. Por tanto la serie de Taylor de f centrada en cero es identicamente cero mientras que $f(x) \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$.

A la vista de los comentarios anteriores, queda claro que el que una función f sea de clase C^∞ en un intervalo centrado en el punto a dista mucho de ser suficiente para que dicha función pueda desarrollarse en serie de potencias centrada en a. No vamos a tratar en profundidad el problema de encontrar condiciones necesarias y suficientes para que la función pueda desarrollarse en serie de potencias. Nos limitaremos a obtener una condición suficiente que se deduce fácilmente de la formula de Taylor y a encontrar mediante éste y otros procedimientos desarrollos en serie especialmente conocidos y útiles.

Proposición 16 ***(Condición suficiente)***: *Sea I un intervalo y $f \in C^\infty(I)$. Supongamos que $\exists M > 0$ tal que:*

$$\left| f^{n)}(y) \right| \leq M \qquad \forall y \in I, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Entonces, para cualesquiera $a, x \in I$ se tiene:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

27.5 Aplicaciones al estudio local de funciones

Una consecuencia importante de la fórmula infinitesimal del resto es la siguiente regla práctica para el estudio de los extremos relativos de una función.

Proposición 17 *Sea $I =]\alpha, \beta[$ un intervalo abierto, $a \in I$, $n \geq 2$ un número natural y $f : I \to \mathbb{R}$ una función $(n-1)-$ veces derivable en I y $n-$ veces derivable en a. Supongamos además que:*

$$f'(a) = f''(a) = ... = f^{n-1)}(a) = 0 \quad y \quad f^{n)}(a) \neq 0$$

(i) Si n es par y $f^{n)}(a) > 0$ (resp. $f^{n)}(a) < 0$) entonces f alcanza un mínimo relativo (resp. máximo relativo) en el punto a.

(ii) Si n es impar, entonces f no alcanza un extremo relativo en el punto a.

Veamos a continuación las aplicaciones de la fórmula de Taylor a la determinación de la convexidad, concavidad y puntos de inflexión.

Definición 18 *Sea $I =]\alpha, \beta[$ un intervalo abierto, $a \in I$ y $f : I \to \mathbb{R}$ una función derivable en a.*

Diremos que f es convexa (o cóncava hacia arriba) en a, cuando existe un intervalo abierto centrado en a para el que el arco de curva correspondiente está por encima de la recta tangente en a.

Diremos que f es cóncava en a (o cóncava hacia abajo) en a cuando el arco de curva esté por debajo de la recta tangente en a.

Diremos que f es convexa en I (resp. cóncava en I) cuando lo sea en todos los puntos del intervalo.

Proposición 19 *Sea $I =]\alpha, \beta[$ un intervalo abierto, $a \in I$ y $f : I \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2 en I. Entonces:*

(i) $f''(a) > 0 \Rightarrow f$ convexa en a

(ii) $f''(a) < 0 \Rightarrow f$ cóncava en a

Nótese que cuando $f''(a) = 0$ no se puede decir nada , pues la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$ no es cóncava ni convexa en $a = 0$.

Definición 20 *Sea $I =]\alpha, \beta[$ un intervalo abierto, $a \in I$ y $f : I \to \mathbb{R}$ una función derivable en a. Cuando el arco de curva está a distintos lados de la recta tangente en a, diremos que $(a, f(a))$ es un punto de inflexión.*

Proposición 21 *Sea $I =]\alpha, \beta[$ un intervalo abierto, $a \in I$ y $f : I \to \mathbb{R}$ una función de clase D^∞ en I, y $n \geq 2$ el primer número natural tal que $f^{n)}(a) \neq 0$. Si n es impar, entonces hay un punto de inflexión en $(a, f(a))$.*

27.6 Algunos ejemplos de desarrollos en serie de potencias

Ejemplo 22 *Hallar el desarrollo en serie de potencias de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^x$ en $x = 0$.*

Se tiene que $f^{n)}(x) = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}$ y además $f^{n)}(0) = 1 \quad \forall n \in \dot{\mathbb{N}}$
Sea $a \in \mathbb{R}^+$. Para todo $x \in \left]-a, a\right[$ se verifica que

$$\left| f^{n)}(x) \right| \leq e^a$$

y por tanto, f es desarrollable en serie de potencias en $\left]-a, a\right[$, y variando a, se tiene que f es desarrollable en serie de potencias en $\mathbb{R}$.

Además:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ... = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Ejemplo 23 *Hallar el desarrollo en serie de potencias, centrado en $\frac{\pi}{2}$, para la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sin x$.*

Se tiene que $f^{n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$ y por tanto $f^{n)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left((n+1)\frac{\pi}{2}\right)$, luego:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,\ \ f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,\ \ f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1,\ \ f'''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

y la secuencia 1,0,-1,0 se repite en lo sucesivo. Así:

$$\sin x = 1 - \tfrac{1}{2!}\left(x - \tfrac{\pi}{2}\right)^2 + \tfrac{1}{4!}\left(x - \tfrac{\pi}{2}\right)^4 - \tfrac{1}{6!}\left(x - \tfrac{\pi}{2}\right)^6 + ... + (-1)^n \tfrac{1}{(2n)!}\left(x - \tfrac{\pi}{2}\right)^{2n} +$$

$$+ (-1)^{n+1} \tfrac{1}{(2n+2)!} f^{2n+2)}(\xi)\left(x - \tfrac{\pi}{2}\right)^{2n+2} \text{ con } \xi \in \left]0, x\right[$$

Evidentemente

$$\left| f^{2n+2)}(\xi) \right| = \left| \sin\left(\xi + (2n+2)\frac{\pi}{2}\right) \right| \leq 1$$

lo cual justifica que la función seno se pueda desarrollar en un entorno de $\frac{\pi}{2}$.

Como

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\left| x - \frac{\pi}{2} \right|^{2n+2}}{(2n+2)!} = 0$$

el desarrollo buscado es:

$$\sin x = 1 - -\tfrac{1}{2!}\left(x - \tfrac{\pi}{2}\right)^2 + \tfrac{1}{4!}\left(x - \tfrac{\pi}{2}\right)^4 - ... + (-1)^n \tfrac{1}{(2n)!}\left(x - \tfrac{\pi}{2}\right)^{2n} + ... =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \tfrac{1}{(2n)!}\left(x - \tfrac{\pi}{2}\right)^{2n} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Ejemplo 24 *Obtener el desarrollo en serie de potencias en $x = 0$ de la función $f(x) = \arctan x$.*

Sabemos que $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ y utilizando que el desarrollo de un cociente de polinomios es el cociente de dividir según las potencias crecientes, siendo válido en todo intervalo $]-a, a[$ tal que a sea menor que el menor de los módulos de las raíces (reales o complejas) del denominador, queda:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + ... \quad \text{si } |x| < 1$$

Así, integrando ambos miembros de la igualdad anterior se tiene que:

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + ...$$

$$\arctan x - \arctan 0 = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + ...$$
$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + ...$$
$$\arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \qquad \forall x \in]-1, 1[$$