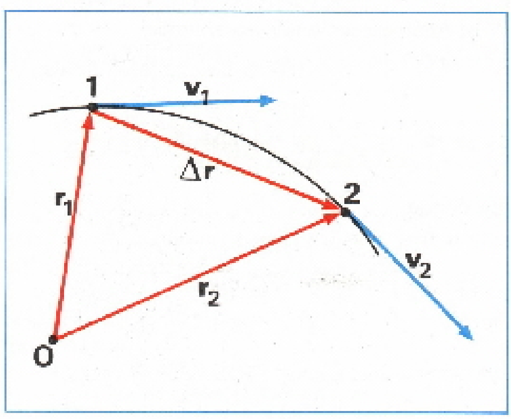
Tema 26

Derivada de una función en un punto. Función derivada. Derivadas sucesivas. Aplicaciones

26.1 Introducción



En el estudio del movimiento de un punto nos interesa saber en cada instante dónde está y cómo se mueve. El primer objetivo lo proporciona el conocimiento de la variación temporal del vector de posición, y para saber cómo se mueve, es decir, qué va a pasar con el punto móvil en instantes sucesivos, se introduce en física una nueva magnitud llamada velocidad.

Supongamos que cierto punto P se traslada en un intervalo de tiempo $\Delta t = t_2 - t_1$ desde el punto 1 hasta el punto 2, caracterizados respectivamente por los vectores de posición $\overrightarrow{r_1}$ y $\overrightarrow{r_2}$.

Se define la velocidad media $\overrightarrow{v}_{med}$ en el intervalo de tiempo Δt como:

$$\overrightarrow{v}_{med} = \frac{\Delta \overrightarrow{r}}{\Delta t}$$

La dirección de la velocidad media coincide con $\Delta \overrightarrow{r}$, es decir, queda determinada por la cuerda que une los extremos del tramo de trayectoria correspondiente y su sentido es el del movimiento.

La velocidad instantánea, $\overrightarrow{v}$, se define como:

$$\overrightarrow{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \overrightarrow{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{r}(t + \Delta t) - \overrightarrow{r}(t)}{\Delta t}$$

es decir, como la rapidez de cambio del vector de posición con respecto a t.

Este vector es tangente a la trayectoria y su sentido es el del movimiento.

26.2 Concepto de derivada

Definición 1 *Sea $f : A \to \mathbb{R}$ y $a \in A \cap A'$ (es inmediato que $a \in (A - \{a\})'$). Se dice que f es **derivable en** a sii*

$$\boxed{\exists \lim_{x \to a} \tfrac{f(x) - f(a)}{x - a} := f'(a)}$$

en cuyo caso el límite anterior recibe el nombre de derivada de f en a.

Obsérvese que solamente tiene sentido hablar de derivada de una función en puntos de su dominio de definición que sean a la vez puntos de acumulación del mismo.

Si $B \subseteq A \cap A'$, diremos que la función $f : B \to \mathbb{R}$ es derivable en B cuando f sea derivable en todos los puntos de B. Sea

$$C := \{a \in A \cap A' : f \text{ es derivable en } a\}$$

La función

$$\begin{array}{ccc} f' & : & C \to \mathbb{R} \\ a & \in & C \to f'(a) \end{array}$$

recibe el nombre de **función derivada de** f.

La caracterización dada en su momento del límite funcional nos da ahora automáticamente una caracterización de la derivabilidad de una función.

Proposición 2 *Sea* $f : A \to \mathbb{R}$ *y* $a \in A \cap A'$. *Son equivalentes:*

i) f *es derivable en* a

ii) $\exists L \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : si\ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a) - L(x - a)| < \varepsilon |x - a|$$

En el caso de que se cumplan i) y ii) se tiene que $L = f'(a)$

Damos a continuación otra caracterización de la derivabilidad que nos va a permitir poner de manifiesto el significado geométrico del concepto de derivada.

Proposición 3 *Sea* $f : A \to \mathbb{R}$ *y* $a \in A \cap A'$. *Son equivalentes:*

i) f *es derivable en* a

ii) f *es continua en* a *y* $\exists g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *afín tal que*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - g(x)}{x - a} = 0$$

En caso de que se cumplan (i) *y* (ii) *se tiene que*

$$g(x) = f'(a)(x - a) + f(a), \ \forall x \in \mathbb{R}$$

y como consecuencia g *es única.*

Es importante destacar que la afirmación $i) \Rightarrow ii)$ nos da una relación entre las dos familias más importantes de funciones de variable real que han aparecido hasta aquí: "Toda función derivable en un punto es continua en ese punto". Además, el recíproco no es cierto. Si $D(A, \mathbb{R}) := \{f : A \to \mathbb{R} : f \text{ es derivable en } A\}$, lo anterior se expresa del siguiente modo:

$$D(A, \mathbb{R}) \subset C(A, \mathbb{R})$$

Definición 4 *Sea* $A \subset \mathbb{R}$ *y* $a \in A \cap A'$. *Si*

$$\boxed{\exists \lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} \tfrac{f(x) - f(a)}{x - a} := f'_-(a)}$$

diremos que f *es* ***derivable por la izquierda en*** a *y que la derivada por la izquierda de* f *en* a *es el valor del límite anterior. Si*

$$\boxed{\exists \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} \tfrac{f(x) - f(a)}{x - a} := f'_+(a)}$$

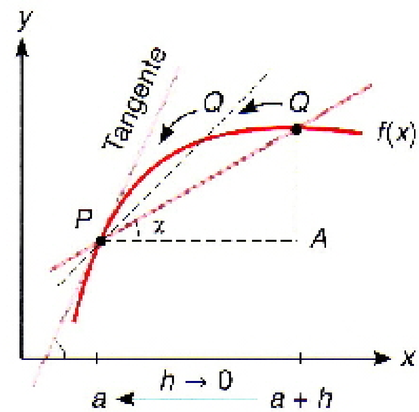
diremos que f *es* ***derivable por la derecha en*** a *y que la derivada por la derecha de* f *en* a *es el valor del límite anterior.*

El siguiente resultado nos da la relación entre la derivada en un punto y las derivadas laterales en ese punto:

Proposición 5 *Sea $f : A \to \mathbb{R}$ y $a \in A \cap A'$. Entonces, f es derivable en a si, y sólo si, f es derivable por la izquierda y por la derecha en a y $f'_{+}(a) = f'_{-}(a)$. En cuyo caso,*

$$f'(a) = f'_{+}(a) = f'_{-}(a)$$

Para terminar este apartado, veamos la **interpretación geométrica de la derivada**:



Considerando el triángulo de vértices $(a, f(a)), (a+h, f(a))$ y $(a+h, f(a+h))$, y teniendo en cuenta el dibujo resulta que

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \tan \beta$$

y tomando límites obtenemos

$$\boxed{\tan \beta = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)}$$

es decir, "la derivada de una función f en un punto a es la pendiente de la recta tangente a la función en el punto $(a, f(a))$".

Así, la recta tangente a la función $y = f(x)$ en el punto x_0 es la recta de ecuación:

$$y - y_0 = \tan \beta \,(x - x_0)$$

donde $y_0 = f(x_0)$, y teniendo en cuenta lo anterior se puede escribir en la forma:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

26.3 Reglas de derivación

A continuación vamos a ver que por operaciones con funciones derivables, se obtienen nuevas funciones derivables.

Proposición 6 *Sean $f, g : A \to \mathbb{R}$ y $a \in A \cap A'$. Supongamos que f y g son derivables en a. Entonces:*

i) $f + g$ es derivable en a con

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$$

ii) fg es derivable en a con

$$(fg)'(a) = f'(a)\, g(a) + f(a)\, g'(a)$$

En particular, si $\lambda \in \mathbb{R}$, λf es derivable en a con

$$(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$$

La proposición anterior puede resumirse diciendo que el conjunto

$$D(A, \mathbb{R}) := \{f : A \to \mathbb{R} : f \text{ es derivable en} A\}$$

es un subanillo de $F(A, \mathbb{R})$.

Proposición 7 *Sean $f, g : A \to \mathbb{R}$ y $a \in A \cap A'$. Supongamos que f y g son derivables en a con $g(a) \neq 0$. Sea $B := \{x \in A : g(x) \neq 0\}$. Entonces:*

i) $a \in B'$

ii) la función $\frac{f}{g} : B \to \mathbb{R}$ es derivable en a con

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)\, g(a) - f(a)\, g'(a)}{(g(a))^2}$$

Nuestro próximo resultado alude al carácter local de la derivabilidad de una función en un punto. Al igual que ocurría con la continuidad, la derivabilidad de una función en un punto y el valor de la derivada en ese punto, caso de existir, sólo dependen del comportamiento de la función "en las proximidades" de dicho punto.

Proposición 8 *Sea $f : A \to \mathbb{R}$ y $a \in A \cap A'$. Sea $\delta > 0$ y*

$$B := \{x \in A : |x - a| < \delta\} = A \cap \left]a - \delta, a + \delta\right[$$

Entonces:

i) $a \in B \cap B'$

ii) f es derivable en $a \Leftrightarrow f|_B$ es derivable en a, en cuyo caso

$$f'(a) = (f|_B)'(a)$$

El siguiente paso para ampliar la clase de las funciones derivables será considerar una conveniente composición de funciones derivables.

Teorema 9 ***(de la función compuesta o regla de la cadena)****: Sean $f : A \to \mathbb{R}$, $g : B \to \mathbb{R}$, con $f(A) \subset B$ y $a \in A \cap A'$. Supongamos que f derivable en a y que g es derivable en $b := f(a) \in B'$. Entonces, $g \circ f$ es derivable en a y*

$$(g \circ f)'(a) = g'(b) f'(a)$$

Como última regla de derivación, el siguiente teorema nos permite estudiar la posible derivabilidad de la inversa de una función derivable e inyectiva.

Teorema 10 ***(de derivación de la función inversa)****: Sea $f : A \to \mathbb{R}$, $a \in A \cap A'$ y $b = f(a)$. Supongamos que f es derivable en a e inyectiva. Entonces:*

i) $b \in f(A)'$

ii) Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

**) $f'(a) \neq 0$ y f^{-1} es continua en b*

***) f^{-1} es derivable en b*

Además, en caso de que se cumplan i) y ii) se tiene:

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)}$$

Aplicando las reglas elementales de derivación, es inmediato comprobar que

$$\boxed{D(A) \text{ es una } \mathbb{R}\text{– álgebra}^{1} \text{conmutativa con unidad}}$$

y es una $\mathbb{R}-$ subálgebra de $F(A, \mathbb{R})$.

26.4 Teorema del valor medio

Siempre que se hable de un intervalo I se entenderá desde luego que I es no vacío; además, si se trata de un intervalo compacto $[a, b]$, entenderemos $a < b$, de forma que nuestro intervalo no se reduzca a un punto. De esta forma, nuestros intervalos carecerán siempre de puntos aislados y podemos por tanto hablar de derivabilidad en cualquier punto del intervalo para funciones definidas en él.

Definición 11 *Sea $f : A \to \mathbb{R}$ y $a \in A$. Se dice que f* ***alcanza un máximo relativo (resp. mínimo relativo) en el punto*** *a sii $\exists \delta > 0 :]a - \delta, a + \delta[\subset A$ y $\forall x \in \in]a - \delta, a + \delta[$ se tiene que $f(x) \leq f(a)$ (resp. $f(x) \geq f(a)$). Diremos que f* ***alcanza un extremo relativo en el punto*** *a cuando f alcance un máximo relativo o un mínimo relativo en a.*

[1]**Definición:** Diremos que un $\mathbb{K}-$ espacio vectorial E es una $\mathbb{K}-$ álgebra sii existe una segunda operación interna en E que notaremos por $\bullet$ tal que $(E, +, \bullet)$ es un anillo y para cada $\lambda \in \mathbb{K}$, $x, y \in E$ se verifica $\lambda \bullet (x \bullet y) = (\lambda \bullet x) \bullet y = x \bullet (\lambda \bullet y)$. Si además, el anillo $(E, +, \bullet)$ es unitario (resp. conmutativo) diremos que el álgebra es unitaria (resp. conmutativa).

Definición 12 *Sea $f : A \to \mathbb{R}$. Diremos que f* ***tiene máximo (resp. mínimo) absoluto*** *sii $f(A)$ tiene máximo (resp. mínimo). Si $a \in A$ es tal que $f(a) = \max f(A)$ (resp. $f(a) = \min f(A)$), diremos que f* ***alcanza su máximo (resp. mínimo) absoluto en*** *a.*

Si una función $f : A \to \mathbb{R}$ alcanza su máximo (resp. mínimo) absoluto en $a \in A$, f no tiene por qué alcanzar un extremo relativo en a, de hecho lo alcanza si, y sólo si, existe un intervalo abierto centrado en a contenido en A. Además, si f alcanza un extremo relativo en a, puede ocurrir que f no alcance en a ni su máximo ni su mínimo absolutos, de hecho f no tiene por qué tener máximo ni mínimo absolutos y puede incluso no estar acotada.

La siguiente proposición nos da una condición necesaria para que una función derivable en un punto alcance un extremo relativo.

Proposición 13 *Sea $f : A \to \mathbb{R}$ y supongamos que f alcanza un extremo relativo en un punto a de A en el que f es derivable. Entonces $f'(a) = 0$.*

El resultado anterior proporciona una regla práctica de utilidad para el cálculo de máximos y mínimos absolutos de una amplia gama de funciones. Supongamos que $f : A \to \mathbb{R}$ alcanza su máximo o su mínimo absoluto en $a \in A$. Entonces a debe hallarse en una de las siguientes situaciones:

i) No existe ningún intervalo centrado en a contenido en A $(\Leftrightarrow a \in (\mathbb{R} - \mathbb{A})')$

ii) Existe un intervalo abierto centrado en a contenido en A y f no es derivable en a

iii) Existe un intervalo abierto centrado en a contenido en A con f derivable en a y tal que $f'(a) = 0$

Teorema 14 ***(de ROLLE)****: Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y derivable en $]a,b[$ verificando $f(a) = f(b)$. Entonces, $\exists c \in]a,b[: f'(c) = 0$*

Demostración:

Por la propiedad de compacidad[2], sabemos que $f([a,b]) = [\alpha, \beta]$. Sean $c_1, c_2 \in \{a,b\}$, la condición $f(a) = f(b)$ nos da que $\alpha = f(c_1) = f(c_2) = \beta$, de donde f es constante en $[a,b]$ y por tanto $f'(c) = 0$, $\forall c \in]a,b[$. De lo contrario, o bien $c_1 \in]a,b[$, o bien $c_2 \in]a,b[$; en cualquier caso f alcanza un extremo relativo en un punto $c \in]a,b[$ y, siendo f derivable en c, la proposición anterior nos da $f'(c) = 0$. ■

Es claro que el punto c cuya existencia se afirma en el teorema anterior, no tiene por qué ser único (piénsese en el caso en que f es constante).

Teorema 15 ***(del valor medio)****: Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y derivable en $]a,b[$. Entonces, $\exists c \in]a,b[$:*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$

[2] **Propiedad de compacidad**: La imagen mediante una función continua de un compacto es compacta.

Demostración:

Sea $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ la función definida por

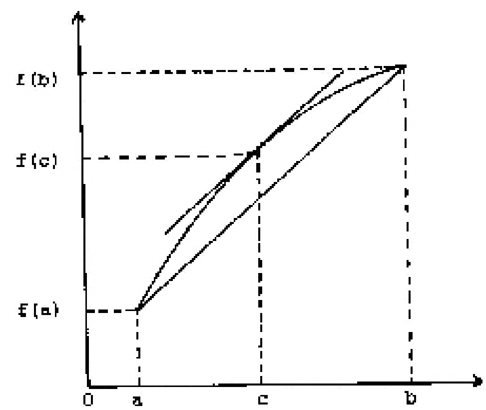
$$g(x) = (f(b) - f(a))\, x - (b - a)\, f(x)\,,\ \forall x \in [a, b]$$

Claramente g es continua en $[a, b]$ y derivable en $]a, b[$ con

$$g'(x) = (f(b) - f(a)) - (b - a)\, f'(x)\,,\ \forall x \in\,]a, b[$$

Además, es fácil comprobar que $g(a) = g(b)$. Por el terema de ROLLE $\exists c \in\,]a, b[\, : g'(c) = 0$, esto es, $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.■

El teorema del valor medio tiene una clara **interpretación geométrica**: $\exists c \in\,]a, b[$ tal que la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(c, f(c))$ es paralela a la recta que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.



Teorema 16 *Sea I un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ derivable en I. Entonces:*

i) f creciente en $I \Leftrightarrow f'(a) \geq 0$, $\forall a \in I$

ii) f decreciente en $I \Leftrightarrow f'(a) \leq 0$, $\forall a \in I$

iii) Si $f'(a) = 0$, $\forall a \in I \Rightarrow f = cte$

iv) Supongamos que $f'(a) \neq 0$, $\forall a \in I$. Entonces f es estrictamente monótona y ocurre una de las dos siguientes posibilidades:

**) $f'(a) > 0$, $\forall a \in I$*

***) $f'(a) < 0$, $\forall a \in I$*

v) ***Teorema del valor intermedio para las derivadas****: El conjunto $f'(I) = = \{f'(x) : x \in I\}$ es un intervalo.*

Demostración:

(v) Sean $a, b \in f'(I)$ con $a < b$ y sea $c \in\,]a, b[$. Supongamos, razonando por reducción al absurdo, que $c \notin f'(I)$. Sea

$$g : I \to \mathbb{R}$$
$$g(x) = f(x) - cx$$

Es claro que g es derivable en I y como $f'(x) \neq c \quad \forall x \in I$, se tiene que $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in I$. Aplicando (iv) a la función g obtenemos que, o bien $f'(x) - c = g'(x) > 0 \quad \forall x \in I$, o bien $f'(x) - c = g'(x) < 0 \quad \forall x \in I$. En el primer caso, al ser $f'(x) > c \quad \forall\, x \in I$, llegaríamos a que $a \notin f'(I)$ y en el segundo, al ser $f'(x) < c \quad \forall x \in I$, obtendríamos que $b \notin f'(I)$. En ambos casos llegamos a una contradicción. Por tanto $c \in f'(I)$ y hemos probado que $[a, b] \subset f'(I)$, luego $f'(I)$ es un intervalo. c.q.d.$\square$

Corolario 17 ***(Teorema de la función inversa)****: Sea I un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ una función derivable en I con $f'(a) \neq 0$, $\forall a \in I$. Entonces:*

i) f es estrictamente monótona

ii) f^{-1} es derivable en $f(I)$ con

$$\left(f^{-1}\right)'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}, \ \forall a \in I$$

26.5 Derivadas sucesivas. Fórmula de LEIBNITZ

Definición 18 *Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función real de variable real. Sea A_1 el conjunto de puntos de $A \cap A'$ en los que f es derivable y $f' : A_1 \to \mathbb{R}$ la función derivada de f. (Naturalmente estamos suponiendo que $A_1 \neq \emptyset$). Sea $a \in A_1 \cap A_1'$. Si f' es derivable en a diremos que f es dos veces derivable en a y llamaremos derivada segunda de f en a a la derivada de f' en a, a la que notaremos $f''(a)$. Sea A_2 el conjunto de puntos de $A_1 \cap A_1'$ en los que f es dos veces derivable. La función $f'' : A_2 \to \mathbb{R}$ que a cada punto de A_2 le hace corresponder la derivada segunda de f en dicho punto se llamará función derivada segunda de f. De manera general, sea $n \in \mathbb{N}$ y $f^{n)} : A_n \to \mathbb{R}$ la función derivada $n-$ ésima de f. Sea $a \in A_n \cap A_n'$. Diremos que f es $n+1$ veces derivable en a cuando $f^{n)}$ sea derivable en a. La derivada de $f^{n)}$ en a se llama derivada $(n+1)-$ ésima de f en a y se nota por $f^{n+1)}(a)$. Sea A_{n+1} el conjunto de puntos de $A_n \cap A_n'$ en los que f es $(n+1)-$ veces derivable. La función $f^{n+1)} : A_{n+1} \to \mathbb{R}$ que a cada punto de A_{n+1} le hace corresponder la $(n+1)-$ ésima derivada de f en él se llama función derivada $(n+1)-$ ésima de f.*

Dentro del cálculo de derivadas n-ésimas, es muy útil, en muchos ejercicios, la fórmula de Leibniz que exponemos a continuación.

Teorema 19 ***(Fórmula de Leibniz)****: Sean f, g dos funciones con derivada n-ésima en el intervalo I. Entonces, fg tiene derivada n-ésima en I y se verifica:*

$$(fg)^{n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{n-k)} g^{k)}$$

Demostración:

Razonamos por inducción sobre n:

Para $n = 1$ es correcta, pues convenimos en que la derivada de orden cero de una función es la misma función.

Supongámosla cierta para para $n = k$.
Por ser $f^{0)} = f$ y $g^{0)} = g$, podemos poner:

$$(fg)^{k)} = \sum_{r=0}^{k} \begin{pmatrix} k \\ r \end{pmatrix} f^{k-r)} g^{r)}$$

Demostremos que es cierta para $n = k + 1$:
Se tiene que:

$$(fg)^{k+1)} = \left((fg)^{k)}\right)' = \sum_{r=0}^{k} \begin{pmatrix} k \\ r \end{pmatrix} \left[f^{k-r+1)} g^{r)} + f^{k-r)} g^{r+1)}\right]$$

y utilizando que $\begin{pmatrix} k \\ p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k \\ p-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k+1 \\ p \end{pmatrix}$, se obtiene:

$$(fg)^{k+1)} = \sum_{r=0}^{k+1} \begin{pmatrix} k+1 \\ r \end{pmatrix} f^{k-r+1)} g^{r)}$$

y el teorema está demostrado. ■

Introducimos la siguiente notación:
$C^0(I) := C(I) := \{f : I \to \mathbb{R} : f \text{ es continua en } I\} := D^0(I)$
$C^1(I) := \{f : I \to \mathbb{R} : f \text{ es derivable en } I \text{ y } f' \text{ es continua en } I\}$
$C^k(I) := \left\{f : I \to \mathbb{R} : f \text{ es k-veces derivable en } I \text{ y } f^{k)} \text{ es continua en } I\right\}$
$D^k(I) := \{f : I \to \mathbb{R} : f \text{ es k-veces derivable en } I\}$
$C^\infty(I) := \left\{f : I \to \mathbb{R} : f \text{ es n-veces derivable en } I \text{ y } f^{n)} \text{ es continua en } I, \forall n \in \mathbb{N}\right\}$
Se tienen las siguientes inclusiones

$$C^\infty(I) \subset C^{n+1}(I) \subset C^n(I) \subset C(I)$$

y además, $C^n(I) \subset C(I)$ como subanillo y $C^\infty(I) \subset C(I)$ también como subanillo.

26.6 1^a Aplicación: Regla de L'Hôpital

Dedicamos este apartado a obtener un método general para resolver indeterminaciones que se presentan al estudiar el comportamiento en un punto, en $+\infty$ o en $-\infty$ de un cociente de dos funciones. Necesitamos para ello la siguiente versión, más general, del teorema del valor medio.

Teorema 20 ***(del valor medio generalizado)****: Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas en $[a, b]$ y derivables en $]a, b[$. Entonces, $\exists c \in \,]a, b[$:*

$$(f(b) - f(a))\, g'(c) = (g(b) - g(a))\, f'(c)$$

Demostración:

Consideramos la función $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por

$$\begin{aligned} h(x) &= \begin{vmatrix} 1 & f(x) & g(x) \\ 1 & f(a) & g(a) \\ 1 & f(b) & g(b) \end{vmatrix} = \\ &= (f(b) - f(a))\, g(x) - (g(b) - g(a))\, f(x) + f(a)\, g(b) - f(b)\, g(a) \end{aligned}$$

Evidentemente, las hipótesis sobre f y sobre g hacen que h sea continua en $[a,b]$ y derivable en $]a,b[$. Además, es inmediato comprobar que $h(a) = h(b) = 0$. Por el teorema de Rolle $\exists c \in]a,b[: h'(c) = 0$, pero

$$h'(c) = (f(b) - f(a))\, g'(c) - (g(b) - g(a))\, f'(c)$$

con lo que se obtiene la igualdad buscada. ■

Antes de entrar a discutir las reglas de L'Hôpital merece la pena detenerse a indicar el principio común a todas ellas que tomará después distinta forma según el caso concreto de que se trate. El problema que se pretende resolver es el de estudiar el comportamiento en un punto a, en $+\infty$ o en $-\infty$ de una función h que viene definida en la forma de un cociente $\frac{f}{g}$ de otras dos funciones bajo condiciones que hagan que tenga sentido hablar del comportamiento de h en a, $+\infty$ o $-\infty$.

Teorema 21 ***(Primera regla de L'Hôpital)****: Sea I un intervalo, $a \in I$ y $f, g : I - \{a\} \to \mathbb{R}$ funciones verificando:*

i) f y g son derivables en $I - \{a\}$

ii) $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in I - \{a\}$

iii) $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$

Entonces, $g(x) \neq 0$, $\forall x \in I - \{a\}$ y se verifican las siguientes condiciones:

a) $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

b) $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$

26.7 2^a Aplicación: Polinomio de Taylor

Definición 22 *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función, $n \in \mathbb{N}$ y supongamos que $f \in$ $\in D^n(A)$. Llamaremos polinomio de Taylor de orden n de la función f en el punto a a la función polinómica $P_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:*

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Es inmediato comprobar que P_n verifica:

$$P_n(a) = f(a),\ P_n'(a) = f'(a), ..., P_n^{n)}(a) = f^{n)}(a)$$

Además, se puede comprobar que P_n es la única función polinómica de grado menor o igual que n que verifica las anteriores condiciones. En el caso $n = 1$ tenemos $P_1(x) = = f(a) + f'(a)(x-a)\,, \ \forall x \in \mathbb{R}$ y por tanto el polinomio de Taylor de grado 1 de una función en un punto no es otra cosa que la función afín tangente a dicha función en el punto en cuestión. Así pues, el concepto de polinomio de Taylor engloba al de función afín tangente. Cabe esperar que el polinomio de Taylor P_n nos de una buena aproximación de la función f en las proximidaddes del punto a, aproximación que deberá ser tanto mejor cuanto mayor sea el número natural n. Este hecho, bajo ciertas condiciones de regularidad de la función f, viene dado por la conocida fórmula infinitesimal del resto:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x-a)^n} = 0$$

que se utiliza por ejemplo para dar la archiconocida regla práctica para el estudio de los extremos relativos de una función.

26.8 Otras aplicaciones

Recta tangente a una curva en forma explícita

La ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en x_0 es

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

donde $y_0 = f(x_0)\,.$

Recta normal a una curva en forma explícita

La ecuación de la recta normal a la curva $y = f(x)$ en x_0 es

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

si $f'(x_0) \neq 0$, donde $y_0 = f(x_0)\,,$ o equivalentemente

$$(y - y_0)\, f'(x_0) = x_0 - x$$

Velocidad instantánea en un movimiento rectilíneo

La velocidad de un objeto en un instante t se define por:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \frac{ds(t)}{dt}$$

Aceleración en un movimiento rectilíneo

Si $s(t)$ es la posición en el instante t de un objeto con movimiento rectilíneo, se define su acelaración en el instante t por

$$a(t) = s''(t)$$

o lo que es lo mismo

$$a(t) = v'(t)$$

donde $v(t)$ es la velocidad en el instante t.

Tangente a una curva dada implícitamente

Consideramos la curva $f(x,y) = 0$. La ecuación de la recta tangente a $f(x,y) = 0$ en (x_0, y_0) se obtiene evaluando en dicho punto la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dy} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$$

Recta tangente a una recta en paramétricas

Dada la curva diferenciable $\gamma(t) = (x(t), y(t)) \quad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$, la ecuación de la recta tangente a γ en t_0 es

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)}$$

Elasticidad de una función

Dada una función $y = f(x)$,se llama elasticidad de $f(x)$, y se representa por $\frac{Ey}{Ex}$, al siguiente límite (cuando exista):

$$\frac{Ey}{Ex} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x\Delta y}{y\Delta x} = \frac{x}{y}y'$$

Intensidad de corriente en circuitos RC

Un circuito RC es aquél en el que sólo interviene una resistencia y una capacidad.

Si Q es la carga sobre el condensador en un instante t, entonces la corriente en dicho instante es

$$I = -\frac{dQ}{dt}$$

de donde, por integración, se obtiene que

$$I = I_0 e^{-t/\tau}$$

donde I_0 es la corriente inicial y $\tau = RC$ es la constante de tiempo.

Desintegración radiactiva

Si $N(t)$ es el número de núclidos que existen en una muestra en cierto instante t, el número de núclidos que se desintegran $(-dN)$ en un intervalo de tiempo dt es directamente proporcional a dt y a $N(t)$. Es decir,

$$-dN = \lambda N dt$$

o lo que es lo mismo

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N$$

Ley de Faraday-Henry

Siempre que el flujo magnético a través de un circuito varíe con el tiempo, aparecerán en él corrientes inducidas. Es decir,

$$\epsilon = -\frac{d\phi_m}{dt}$$