Tema 9

Números complejos. Aplicaciones Geométricas

9.1 Introducción histórica

El concepto de número complejo no fué aceptado al principio por la comunidad matemática ya que no respondía a ninguna necesidad física. Fueron los algebristas italianos del S. XVI los que, preocupados por la resolución de ecuaciones cúbicas, se encontraron con que es su solución aparecía a veces la raíz cuadrada de una cantidad negativa, no siendo sus soluciones reales. Tras varios intentos de manejar unos elementos que pudieran servir para dar salida a estas situaciones, fue Leibniz quien en el S. XVII comenzó a manejar lo que más tarde denominó unidad imaginaria. Gracias a esta nueva unidad se podía resolver la raíz cuadrada de un número negativo del siguiente modo:

$$\sqrt{-k} = \sqrt{-1 \cdot k} = \sqrt{-1}\sqrt{k}$$

Posteriormente, Euler representó la unidad imaginaria por la letra "i":

$$\sqrt{-k} = i\sqrt{k}$$

Además, se verifican las siguientes inclusiones:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

$$\text{Complejos}\begin{cases} \text{Reales}\begin{cases} \text{Racionales}\begin{cases} \text{Enteros}\begin{cases} \text{Cero} \\ \text{Naturales} \\ \text{Enteros negativos} \end{cases} \\ \text{Fraccionarios} \end{cases} \\ \text{Irracionales} \end{cases} \\ \text{Imaginarios} \end{cases}$$

A todas estas ampliaciones del concepto de número se las llama extensiones algebraicas.

9.2 El cuerpo de los números complejos

Definición 1 *En* $\mathbb{R}^2$ *definimos:*

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$$
$$(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$$

Proposición 2 $\left(\mathbb{R}^2,+,\cdot\right)$ *es un cuerpo conmutarivo*

Demostración:
Es evidente que $\left(\mathbb{R}^2,+\right)$ es un grupo abeliano.

Es fácil ver que, como consecuencia de las propiedades de $\mathbb{R}$, que el producto es asociativo, conmutativo y distributivo respecto de la suma.

El elemento unidad es $(1,0)$.

El inverso de $(a,b)\neq(0,0)$ resulta ser $\left(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2}\right)$ pues si (x,y) ha de verificar que $(a,b)(x,y)=(1,0)$, con $(a,b)\neq(0,0)$, se ha de tener:

$$\left.\begin{array}{l} ax-by=1 \\ bx+ay=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x=\frac{a}{a^2+b^2} \\ y=\frac{-b}{a^2+b^2} \end{array}$$

Luego $\left(\mathbb{R}^2,+,\cdot\right)$tiene estructura de cuerpo conmutativo. c.q.d.$\square$

En lo sucesivo, designaremos este cuerpo por $(\mathbb{C},+,\cdot)$ y lo llamaremos cuerpo (conmutativo) de los números complejos.

Proposición 3 ***(Inmersión de*** $\mathbb{R}$ ***en*** $\mathbb{C}$***):*** *Existe un subcuerpo de* $\mathbb{C}$ *isomorfo a* $\mathbb{R}$*.*

Demostración:
Sea $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{C} \\ f(x)=(x,0) \end{array}$ .Es inmediato comprobar que f es un monomorfismo de cuerpos, luego existe un subcuerpo de $\mathbb{C}$ isomorfo a $\mathbb{R}$. c.q.d.$\square$

En lo sucesivo haremos la siguiente identificación:

$$(x,0)\equiv x \qquad \forall x\in\mathbb{R}$$

Proposición 4 *Existe un elemento en* $\mathbb{C}$ *tal que su cuadrado es* $(-1,0)$.

Demostración:
El número complejo $(0,1)$ es tal que $(0,1)^2=(-1,0)$. c.q.d.$\square$

En lo sucesivo designaremos por i al número complejo $(0,1)$:

$$i\equiv(0,1)$$

En virtud de las proposiciones anteriores, tenemos:

$$i^2=-1$$

Además, todo elemento $(a,b) \in \mathbb{C}$ se puede expresar de forma única en la forma $a+ib$, pues:

$$(a,b) = (a,0) + (0,b) = (a,0) + (0,1)(b,0) = a + ib$$

Es trivial comprobar que la descomposicón es única. Esta la forma binómica del número complejo (a,b).

El siguiente resultado nos indica que es imposible definir una relación de orden estricto $<$ en $\mathbb{C}$.

Teorema 5 *$\mathbb{C}$ no es un cuerpo ordenado*[1]*.*

Demostración:
Supongamos que $\mathbb{C}^+ \subset \mathbb{C}$ y que se verifican las propiedades $(i), (ii)$ y (iii) que definen a un cuerpo ordenado. Entonces:

$$i \in \mathbb{C}^* \Rightarrow \begin{cases} i \in \mathbb{C}^+ \Rightarrow i^2 = -1 \in \mathbb{C}^+ \\ ó \\ -i \in \mathbb{C}^+ \Rightarrow (-i)^2 = 1 \in \mathbb{C}^+ \end{cases}$$

y por tanto $1 + (-1) = 0 \in \mathbb{C}^+$!!, ya que estamos suponiendo que $\mathbb{C}$ es un cuerpo ordenado. c.q.d.$\square$

9.3 Conjugado y módulo de un número complejo

Definición 6 *Dado $z = a + ib \in \mathbb{C}$, llamaremos complejo conjugado de z, al número complejo $\overline{z} = a - ib$.*

Si $z = a + ib$, hacemos las siguientes definiciones:

$$\begin{array}{ll} \operatorname{Re} z = a & \text{(parte real de } z\text{)} \\ \operatorname{Im} z = b & \text{(parte imaginaria de } z\text{)} \end{array}$$

Se tienen las siguientes propiedades elementales:
a) $\operatorname{Re} z = \operatorname{Re} \overline{z}$
b) $\operatorname{Im} z = -\operatorname{Im} \overline{z}$

Proposición 7 *La aplicación $z \xrightarrow{f} \overline{z}$ es un automorfismo involutivo tal que $f(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$, es decir, se verifican:*
(i) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$
(ii) $\overline{zw} = \overline{z}\overline{w}$

[1] Se dice que un cuerpo $\mathbb{K}$ es ordenado sii verifica:
$i)$ $\mathbb{K}^+ + \mathbb{K}^+ \subseteq \mathbb{K}^+$, es decir, $\mathbb{K}^+$ es estable para la suma
$ii)$ $\mathbb{K}^+ \cdot \mathbb{K}^+ \subseteq \mathbb{K}^+$, es decir, $\mathbb{K}^+$ es estable para el producto
$iii)$ $\mathbb{K}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{K}^- = \mathbb{K}^+$ donde $\mathbb{K}^- = \{-x : x \in \mathbb{K}^+\}$

(iii) $z = \overline{\overline{z}}$
(iv) $z = \overline{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$
Además: *(v)* $z\overline{z} = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2 \in \mathbb{R}_0^+$
(vi) $\operatorname{Re} z = \frac{z+\overline{z}}{2} \qquad \operatorname{Im} z = \frac{z-\overline{z}}{2i}$

Definición 8 *El módulo del número complejo* $z = a + ib \in \mathbb{C}$ *viene dado por:*

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2} \in \mathbb{R}_0^+$$

Teniendo en cuenta que $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, el módulo es la distancia entre el punto $P\,(a,b)$ (llamado afijo del número complejo $a + ib$) y el origen de coordenadas $O\,(0,0)$. Evidentemente $|z|$ es también la longitud o módulo del vector libre de representante $\overrightarrow{OP}$.

Algunas propiedades inmediatas del módulo son:
a) $|z| \geq 0$
b) $|z| = |-z| = |\overline{z}| = |-\overline{z}|$
c) $z\overline{z} = |z|^2$
d) $|x + i0| = |x|$ lo que justifica mantener la misma notación

Las demás propiedades que nos interesan del módulo de un número complejo se recogen en la siguiente:

Proposición 9 $\forall z, w \in \mathbb{C}$ *se verifican:*
(i) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
(ii) $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$ *y* $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$
(iii) $|zw| = |z|\,|w|$
(iv) $|z + w| \leq |z| + |w|$ *(Desigualdad triangular)*
(v) $||z| - |w|| \leq |z - w|$
(vi) *Si* $zw \neq 0$ *se verifica:* $|z + w| = |z| + |w| \Leftrightarrow \frac{z}{w} \in]0, +\infty[$
(vii) $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2\,|z|^2 + 2\,|w|^2$ *(Identidad del paralelogramo)*

Demostración:
Demostraremos únicamente las cuatro últimas, dejando al lector la demostración de las tres primeras.
(iv)

$$\begin{aligned} |z + w|^2 &= (z + w)\left(\overline{z + w}\right) = (z + w)\left(\overline{z} + \overline{w}\right) = z\overline{z} + z\overline{w} + w\overline{z} + w\overline{w} = \\ &= |z|^2 + z\overline{w} + w\overline{z} + |w|^2 = |z|^2 + z\overline{w} + \overline{z\overline{w}} + |w|^2 = |z|^2 + 2\operatorname{Re}\left(z\overline{w}\right) + |w|^2 \end{aligned}$$

Por ser $|\operatorname{Re}\left(z\overline{w}\right)| \leq |z\overline{w}| = |z|\,|\overline{w}| = |z|\,|w|$ (por ii y iii), se verifica:

$$2\operatorname{Re}\left(z\overline{w}\right) \leq 2\,|z|\,|w|$$

En consecuencia:

$$|z + w|^2 = |z|^2 + 2\operatorname{Re}\left(z\overline{w}\right) + |w|^2 \leq |z|^2 + 2\,|z|\,|w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2$$

de donde:

$$|z+w| \leq |z| + |w|$$

(v) Tenemos que

$$\begin{array}{c} z = w + (z-w) \\ w = z + (w-z) \end{array}$$

y aplicando (iv) obtenemos:

$$\begin{array}{c} |z| \leq |w| + |z-w| \\ |w| \leq |z| + |w-z| = |z| + |z-w| \end{array}$$

Luego:

$$\left. \begin{array}{l} |z| - |w| \leq |z-w| \\ |w| - |z| \leq |z-w| \end{array} \right\} \Rightarrow ||z| - |w|| \leq |z-w|$$

(vi) En la demostración de (iv) se ha visto que

$$|z+w|^2 = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\overline{w}) + |w|^2$$

luego $|z+w|^2 = (|z|+|w|)^2$ si y sólo si $2\operatorname{Re}(z\overline{w}) = 2|z||w| = 2|zw|$, es decir, $\operatorname{Re}(z\overline{w}) = |zw| = |z\overline{w}|$

Ahora bien, si la parte real de un número complejo es su módulo, el número complejo es real, mayor o igual que cero. Así:

$$|z+w| = |z| + |w| \Leftrightarrow z\overline{w} \geq 0$$

pues $z\overline{w} \neq 0$, pero

$$z\overline{w} > 0 \Leftrightarrow \frac{z\overline{w}w}{w} > 0 \Leftrightarrow \frac{z|w|^2}{w} > 0 \Leftrightarrow \frac{z}{w} > 0$$

(vii) Se deja como ejercicio. c.q.d.$\square$

La aplicación $|\bullet| : (\mathbb{C}^*, \cdot) \to (\mathbb{R}^*, \cdot)$ es un epimorfismo de grupos tal que

$$Ker(|\bullet|) = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| = 1\} = \mathbb{T}$$

donde como sabemos $\mathbb{T}$ es un gr.ab.

Por verificar $(a), (i), (iii)$ y (iv) se tiene que $|\bullet|$ es una norma sobre $\mathbb{C}$ y por tanto $(\mathbb{C}, |\bullet|)$ es un e.v.n., luego $(\mathbb{C}, d)$ es un e.m., donde $d(z,w) = |z-w|$ $\forall z, w \in \mathbb{C}$, y así $(\mathbb{C}, \tau)$ es un e.t.m.

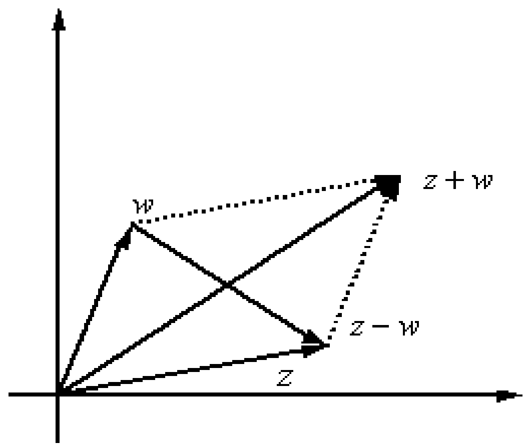
Además, por verificar (vii) [2] se tiene que $\mathbb{C}$ es un espacio prehilbertiano, es decir, un espacio vectorial normado en el que hay definido un producto escalar[3] $\langle \bullet, \bullet \rangle$ tal que $|z| = \sqrt{\langle z, z \rangle}$, donde $\langle z, w \rangle = z\overline{w}$.

---

[2] **Teorema de Jordan Von-Neumann:** Si $(X, \|\bullet\|)$ es un e.v.n., entonces: X es prehilbertiano $\Leftrightarrow$ $\|\bullet\|$ verifica la identidad del paralelogramo.

[3] Un producto escalar es un tensor de tipo $(2,0)$, hermítico y definido positivo, es decir, una aplicación $\langle \bullet, \bullet \rangle : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ que verifica:
i) $\langle \bullet, \bullet \rangle$ bilineal
ii) $\langle z, w \rangle = \overline{\langle w, z \rangle}$
iii) $\langle z, z \rangle \geq 0$ y $\langle z, z \rangle = 0 \Leftrightarrow z = 0$

Interpretación geométrica de la identidad del paralelogramo y de la desigualdad triangular:



Identidad del paralelogramo:

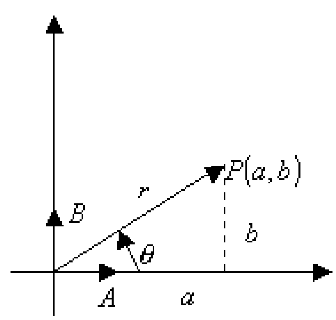
En un paralelogramo arbitrario, la suma de los cuadrados de las diagonales es igual a la suma de los cuadrados de los lados.

Desigualdad triangular:

Un lado de un triángulo mide siempre menos que la suma de los otros dos.

9.4 Argumento de un número complejo

Asociando al número complejo $z = a + ib$ el punto $P(a, b)$, obtenemos una biyección entre los números complejos y el plano cartesiano.



Definición 10 *El argumento*[4] *del número complejo* $z = a + ib \neq 0$ *es la medida*

[4]**Definición:** Un argumento de $z \in \mathbb{C}^*$ es un número real $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$
Notación: $Arg(z) = \{\theta \in \mathbb{R} : z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)\} \in \frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}$

del ángulo que el vector $\overrightarrow{OP}$ forma con $\overrightarrow{OA}$ ($\left\{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right\}$ es una base ortonormal de sentido directo).

Como consecuencia directa de la definición se tiene que el argumento de un número complejo es un elemento de $\frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}$.

Puesto que $a = r\cos\theta$ y $b = r\sin\theta$, donde $\theta \in Arg\,(z)$ se tiene que

$$z = r\,(\cos\theta + i\sin\theta) = |z|\,(\cos\theta + i\sin\theta)$$

que es la llamada forma trigonométrica del número complejo z.

Veamos como pasar de la forma binómica a la trigonométrica y viceversa:

Dado $z = a + ib \neq 0$ en forma binómica, su forma trigonométrica es $z = r\,(\cos\theta + i\sin\theta)$ donde

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \qquad \cos\theta = \frac{a}{r}, \qquad \sin\theta = \frac{b}{r} \qquad [1]$$

siendo el θ determinado por [1] cualquier elemento de una clase módulo 2π, es decir,

$$r\,(\cos\theta + i\sin\theta) = r'\left(\cos\theta' + i\sin\theta'\right) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} r' = r \\ \theta' = \theta + 2k\pi \end{array}\right.$$

Recíprocamente, dado $z = r\,(\cos\theta + i\sin\theta)$ en forma trigonométrica, su forma binómica es $z = a + ib$ con

$$a = r\cos\theta, \qquad b = r\sin\theta$$

Definición 11 *El par (r, θ) se denomina forma polar de $z = r\,(\cos\theta + i\sin\theta) \in \mathbb{C}^*$.*

Por último hay que observar que el argumento del número complejo $z = 0$ no está definido.

9.5 Potenciación y radicación en el cuerpo de los números complejos

Potencias de exponente natural de un número complejo en forma binómica

Sea $z = a + ib \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$. Aplicando el binomio de NEWTON se tiene:

$$z^n = (a + ib)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\,(ib)^{n-k}$$

Potencias de exponente entero de un número complejo en forma binómica

Sea $z = a + ib \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$z^{-n} = \frac{1}{z^n} = \frac{(a-ib)^n}{\left(a^2+b^2\right)^n}$$

Producto de números complejos en forma trigonométrica

Sean $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ y $z' = r'\left(\cos\theta' + i\sin\theta'\right)$ números complejos no nulos. Se verifica:

$$\begin{aligned} zz' &= rr'\left(\left(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta'\right) + i\left(\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta'\right)\right) = \\ &= rr'\left(\cos\left(\theta+\theta'\right) + i\sin\left(\theta+\theta'\right)\right)\end{aligned}$$

Luego el producto de dos números complejos no nulos tiene por módulo el producto de los módulos y un representante de su argumento se obtiene sumando los representantes de los argumentos de los sumandos.

Por inducción se puede ver que el producto de un número finito de números complejos, no nulos, tiene por módulo el producto de los módulos y que su argumento se obtiene sumando los argumentos de los factores.

Potencias de exponente entero de un número complejo en forma trigonométrica

Como consecuencia del apartado anterior, si $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \neq 0$ y $n \in \mathbb{N}$ entonces:

$$z^n = r^n\left(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\right)$$

Si $z \neq 0$ definimos $z^0 = 1$.
Si $z = 0$ es $z^n = 0^n = 0$
Si $z = 0$ no tiene sentido z^{-n}.
Si $z \neq 0$, definimos $z^{-n} = \frac{1}{z^n}$, luego

$$\begin{aligned} z^{-n} &= \frac{1}{r^n\left(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\right)} = \frac{\cos(n\theta) - i\sin(n\theta)}{r^n\left(\cos^2(n\theta) + \sin^2(n\theta)\right)} = \\ &= r^{-n}\left(\cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta)\right)\end{aligned}$$

Resumiendo:

$$\forall n \in \mathbb{Z} \text{ y } \forall z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \in \mathbb{C}^*$$
$$z^n = r^n\left(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\right)$$

Fórmula de DE MOIVRE

En particular, si $z = \cos\theta + i\sin\theta \neq 0$ se tiene:

$$z^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) \qquad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Esta fórmula es muy útil para calcular las razones trigonométricas de ángulos múltiples.

Raíces n-ésimas de un número complejo

Sea $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ un número complejo no nulo. Dado $n \in \mathbb{N}$ buscamos todos los números complejos

$$z' = r'\left(\cos\theta' + i\sin\theta'\right)$$

tales que $(z')^n = z$, es decir, las raíces $n-$ ésimas de z.

Como ha de ser $(z')^n = z$, tendremos:

$$(r')^n\left(\cos\left(n\theta'\right) + i\sin\left(n\theta'\right)\right) = r(\cos\theta + i\sin\theta) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}(r')^n = r\\ n\theta' = \theta + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}\end{array}\right.$$

Así:

$$(r')^n = r \qquad \text{y} \qquad \theta' = \frac{\theta + 2k\pi}{n} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Dando a k los valores $0, 1, 2, ..., n-1$ obtendremos todos los números complejos diferentes que son raíces n-ésimas de z.

Luego las n raíces $n-$ ésimas de z son:

$$\begin{array}{l} z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right)\\ \qquad 0 \leq k \leq n-1, \qquad n \in \mathbb{N}\end{array}$$

Los afijos de las n raíces $(n > 2)$ $n-$ ésimas de $z \neq 0$ son los vértices de un polígono regular de n lados y centro en el origen de coordenadas.

Si $n = 2$ las raíces cuadradas son opuestas la una de la otra.

Las n raíces $n-$ ésimas de un número complejo $z \neq 0$ se obtienen multiplicando una de ellas por las n raíces $n-$ ésimas de la unidad.

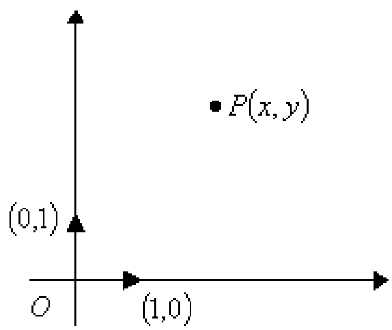
9.6 Representación geométrica de los números complejos

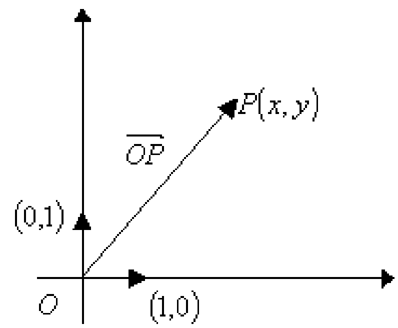
Así como los números reales se representan geométricamente como puntos de una recta, los números complejos se representan como puntos de un plano.

La idea de expresar geométricamente los números complejos como puntos de un plano fue formulada por Gauss en su disertación de 1799 e independientemente por Argand en 1806. Más tarde Gauss ideó la expresión un tanto desafortunada de "número complejo".

A cada número complejo $z = x + iy$ le asignamos el punto P de coordenadas (x, y) en el diagrama de Argand. De P se dice que es el afijo del número complejo $x + iy$.

También podemos asignar al número complejo $x + iy$ el vector libre cuyo representante es $\overrightarrow{OP}$.





La biyección $x + iy \to \left[\overrightarrow{OP}\right]$ conserva la suma y el producto por escalares reales, luego es un isomorfismo entre el $\mathbb{R}$ espacio vectorial $\mathbb{C}$ y el $\mathbb{R}$ espacio vectorial de los vectores libres del plano.

En particular, al número complejo $0 + ib$ le corresponde el punto $P(0, b)$, de ahí que el eje de ordenadas reciba elnombre de eje imaginario.

Los números complejos admiten otras representaciones geométricas. En vez de utilizar puntos de un plano, se pueden utilizar puntos de otras superficies. Riemann encontró que la esfera es especialmente adecuada para este propósito. Se proyectan los puntos de la esfera desde el polo norte sobre el plano tangente a la esfera en el polo sur y entonces a cada punto del plano le corresponde un punto sobre la esfera. Con excepción del polo norte, a cada punto de la esfera le corresponde un punto sobre el plano y sólo uno. Esta correspondencia se denomina proyección estereográfica. Para evitar este inconveniente, consideremos el plano complejo $\mathbb{C}$ con un símbolo ∞ que satisfaga las siguientes propiedades:

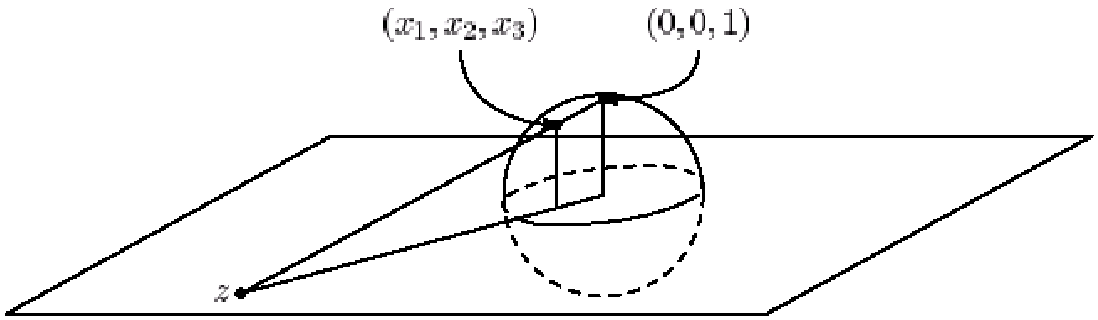
i) $z \in \mathbb{C} \Rightarrow z + \infty = z - \infty = \infty$ y $\frac{z}{\infty} = 0$

ii) $z \in \mathbb{C}^* \Rightarrow z(\infty) = \infty$ y $\frac{z}{0} = \infty$

iii) $(\infty) + (\infty) = (\infty)(\infty) = \infty$

Así, hemos conseguido una correspondencia biyectiva entre $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

(plano complejo ampliado) y la esfera de Riemann $\mathbb{S}^2$.



9.7 Traslaciones y giros: Ecuaciones. Cambio de sistema de referencia

Definición 12 *La transformación*

$$\begin{aligned} t_a &: \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ t_a(z) &= z + a \end{aligned}$$

es una biyección de $\mathbb{C}$ *denominada traslación de número complejo* a.

Justifiquemos esta nomenclatura.

En el diagrama de ARGAND, si el afijo de z es P, el afijo de $t_a(z)$ es el afijo de $z+a$, que se obtiene de la siguiente forma: Con origen en P se traza un representante del vector libre correspondiente al complejo a. El extremo P' del representante así obtenido es el afijo de $z+a$. Otro procedimiento consistiría en sumar al vector libre correspondiente al número z con el vector libre correspondiente con el número complejo a. El extremo del representante, con origen en O, del vector libre suma, será el afijo de $z+a$. Es decir, P' se obtiene trasladando P según el vector libre asociado al número complejo a.

Definición 13 *La transformación*

$$\begin{aligned} g_{O;\alpha} &: \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ g_{O;\alpha}(z) &= ze^{i\alpha} \end{aligned}$$

recibe el nombre de giro de centro O *y ángulo* α, *donde*

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

es la función exponencial compleja[5].

[5] Algunas **propiedades** de la exponencial compleja:
(1) $e^{z+w} = e^z e^w$
(2) $e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$
(3) $e^{iy} = \cos y + i \sin y$ (Fórmula de EULER)

Para justificar esta nomenclatura veamos cómo se obtiene el punto P' (afijo de $ze^{i\alpha}$) a partir de P (afijo de z).

Como $\left|ze^{i\alpha}\right| = |z|\left|e^{i\alpha}\right| = |z| \Rightarrow d(O,P') = d(O,P)$ y como

$$Arg\left(ze^{i\alpha}\right) = Arg(z) + Arg\left(e^{i\alpha}\right)$$

se tiene que el ángulo que $\overrightarrow{OP'}$ forma con $\overrightarrow{OP}$ es α. En resumen, P' es el girado de P en el giro de centro O y ángulo α.

En particular, si $\alpha = \frac{\pi}{2}$, el vector $\overrightarrow{OP'}$ es perpendicular al vector $\overrightarrow{OP}$. Idéntico resultado se obtiene si $\alpha = -\frac{\pi}{2}$.

Definición 14 *Si $\alpha = \pi$ en la definición anterior se tiene:*

$$\begin{aligned} s &: \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ s(z) &= -z \end{aligned}$$

Transformación que recibe el nombre de simetría central.

Definición 15 *La transformación*

$$\begin{aligned} g_{B;\alpha} &: \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ g_{B;\alpha}(z) &= b + (z-b)\,e^{i\alpha} \end{aligned}$$

recibe el nombre de giro de centro B (afijo de b) y ángulo α.

Vamos a justificar esta definición:

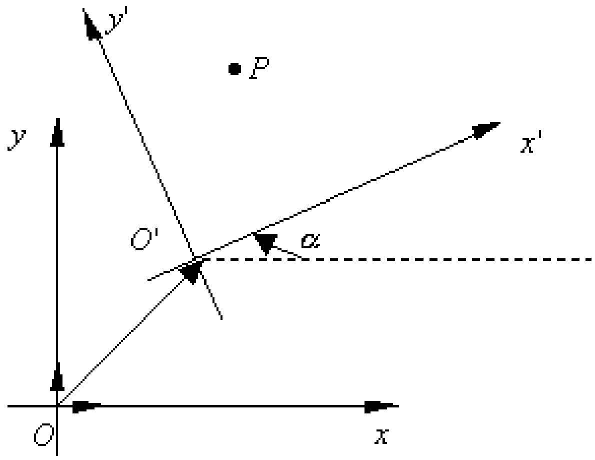
En efecto:

$$\begin{gathered} |z'-b| = |a|\,|z-b| = |z-b| \quad \text{donde } z' = b + (z-b)\,e^{i\alpha} \text{ y } a = e^{i\alpha} \\ Arg(z'-b) = Arg((z-b)\,a) = Arg(a) + Arg(z-b) = \{\alpha\} + Arg(z-b) \Rightarrow \\ \Rightarrow Arg(z'-b) - Arg(z-b) = \{\alpha\} \end{gathered}$$

luego $g_{B;\alpha}$ subordina en el diagrama de ARGAND un giro de centro B y ángulo α.

9.7.1 Cambio de sistema de referencia ortonormal

Conocidas las coordenadas (x,y) del punto P con respecto al sistema de referencia O_{xy}, pretendemos calcular las coordenadas (x',y') del mismo punto P respecto del nuevo sistema de referencia $O'_{x'y'}$, obtenido del anterior trasladando el origen de O a O' y girándolo un ángulo α.



Evidentemente, las coordenadas (x', y') son las coordenadas del punto $\acute{P}'$ que se obtiene girando P un ángulo $-\alpha$ en el giro de centro O'.

Si a, z y z' son los complejos asociados a O', P y P', respectivamente, en el diagrama de ARGAND determinado por O_{xy}, se tiene:

$$z' - a = (z - a)\, e^{-i\alpha} \Leftrightarrow z - a = (z' - a)\, e^{i\alpha}$$

Igualando, en la ecuación anterior, partes reales y partes imaginarias de ambos miembros, obtenemos las ecuaciones en $\mathbb{R}^2$ de cambio de sistema de referencia (ambos ortonormales).

9.8 Homotecia y semejanza

Definición 16 *Fijado $r \in \mathbb{R}^*$, la transformación*

$$\begin{gathered} h_{O;\, r} : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ h_{O;\, r}(z) = rz \end{gathered}$$

es una biyección denominada homotecia de centro O y razón r.

Veamos la justificación de esta nomenclatura.

$$\begin{gathered} |z'| = |rz| = |r|\,|z| \\ Arg\,(z') = Arg\,(r) + Arg\,(z) \end{gathered}$$

luego si $r > 0$, $Arg\,(r) = \{0\}$ y z, z' son los complejos asociados a dos puntos correspondientes en la homotecia de centro O y razón r.

Análogamente si $r < 0$, $Arg\,(r) = \{\pi\}$.

Las ecuaciones en $\mathbb{R}^2$ se obtienen igualando las partes reales por un lado y las partes imaginarias por otro, en la ecuación $z' = rz$, obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} x' = rx \\ y' = ry \end{array}\right\}$$

Definición 17 *La transformación*

$$\begin{array}{l} h_{C;\ r} : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ \quad h_{C;\ r}(z) = r(z-a) + a \end{array}$$

se denomina homotecia de centro $C(\alpha, \beta)$ *y razón* $r \neq 0$, *donde* a *es el complejo asociado a* C.

Definición 18 *La transformación*

$$\begin{array}{l} s : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ \quad s(z) = kz + b \end{array}$$

recibe el nombre de semejanza de razón $k \neq 0$.

Justifiquemos el nombre.

Sea $k = re^{i\alpha}$. El paso de z a z' se puede hacer así:

$$z \to e^{i\alpha} z \to re^{i\alpha} z \to re^{i\alpha} z + b$$

es decir, mediante la composición de un giro de centro el origen y ángulo α, de una homotecia de centro el origen y razón r, y por último de una traslación definida por b. Luego la transformación $z' = kz + b$ subordina en $\mathbb{R}^2$ la ya conocida semejanza.

Si $k \neq 0, 1$, el punto doble de la semejanza $z' = kz + b$ es:

$$z = \frac{b}{1-k}$$

9.9 Inversión

Definición 19 *Dado* $r \in \mathbb{R}^*$, *la transformación*

$$\begin{array}{l} I_{O;\ r} : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^* \\ \quad I_{O;\ r}(z) = \frac{r}{\overline{z}} \end{array}$$

se denomina inversión de centro O *y potencia* r.

Veamos la justificación de esta nomenclatura.

(a) Sea $r > 0$. Entonces

$$\begin{array}{l} |z'| = \left|\frac{r}{\overline{z}}\right| = \frac{|r|}{|\overline{z}|} = \frac{r}{|z|} \Rightarrow |z|\,|z'| = r \\ Arg(z') = Arg(r) - Arg(\overline{z}) = \{0\} - (-Arg(z)) = Arg(z) \end{array}$$

Luego los afijos de z y z' están en la misma semirecta partiendo de O. Además, si P, P' son los afijos de z y z' respectivamente, es $\left|\overrightarrow{OP}\right|\left|\overrightarrow{OP'}\right| = r$. Luego, efectivamente, es una inversión de polo el origen y potencia r.

(b) Sea $r < 0$. Entonces:

$$\begin{array}{l} |z'| = \left|\frac{r}{\overline{z}}\right| = \frac{|r|}{|\overline{z}|} \Rightarrow |z|\,|z'| = |r| \\ Arg\,(z') = Arg\,(r) - Arg\,(\overline{z}) = \{\pi\} - (-Arg\,(z)) = \{\pi\} - Arg\,(z) \end{array}$$

Luego los afijos P, P' de z, z' están alineados con O pero a distinto lado. Además $\left|\overrightarrow{OP}\right|\left|\overrightarrow{OP'}\right| = |r|$. Luego, efectivamente, es una inversión de polo el origen y potencia r.

Igualando partes reales y partes imaginarias en ambos miembros de $z' = \frac{r}{\overline{z}}$ obtenemos las ecuaciones de la inversión en $\mathbb{R}^2$ de forma rápida y elegante.

Proposición 20 ***(Producto de una inversión por una simetría axial)****:* *Dado $r \in \in \mathbb{R}^*$, la transformación*

$$\begin{array}{r} f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^* \\ f\,(z) = \frac{r}{z} \end{array}$$

es la composición de una simetría axial respecto al eje de abscisas con una inversión de polo O y potencia r :

$$z \to \overline{z} \to \frac{r}{\overline{\overline{z}}} = \frac{r}{z}$$

9.10 Justificación de la construcción de $\mathbb{C}$

Como consecuencia de las propiedades del orden en $\mathbb{R}$, no existe un número real x tal que $x^2 = -1$.

Intentemos encontrar un cuerpo conmutativo que contenga un subcuerpo isomorfo a $\mathbb{R}$ y tal que en dicho cuerpo la ecuación $x^2 + 1 = 0$ admita al menos una solución.

Suponiendo que exista un tal cuerpo conmutativo $\mathbb{K}$, sea $\mathbb{K}'$ el subcuerpo isomorfo a $\mathbb{R}$ y sea $i \in \mathbb{K}$ tal que $i^2 = -1$.

Identificando los elementos de $\mathbb{R}$ con los de $\mathbb{K}'$ (por el isomorfismo de $\mathbb{R}$ y $\mathbb{K}'$) se tendrá que $a + ib \in \mathbb{K} \quad \forall a, b \in \mathbb{R} \equiv \mathbb{K}'$.

Teniendo en cuenta que $\mathbb{K}$ es un cuerpo conmutativo, se ha de verificar $\forall a, b, a', b' \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{c} (a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i\,(b + b') \\ (a + ib)\,(a' + ib') = aa' + ab'i + a'bi + bb'i^2 = (aa' - bb') + i\,(ab' + a'b) \end{array}$$

se verificarán:

(1) $a + ib = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$

La implicación $\Leftarrow$ es evidente porque en un cuerpo el producto de 0 por cualquier elemento es 0.

Vamos a demostrar $\Rightarrow$:

Si $b = 0 \Rightarrow a + i0 = 0 \Rightarrow a = 0$

Si $b \neq 0,\;\; a + ib = 0 \Rightarrow b^{-1}(a + ib) = 0 \Rightarrow ab^{-1} + i = 0 \Rightarrow i = ab^{-1} \in \mathbb{R}$, lo cual es absurdo.

En consecuencia: $a + ib = 0 \Rightarrow a = b = 0$

(2) $a + ib = c + id \Leftrightarrow a = c \;\wedge\; b = d$

Basta tener en cuenta que $a - c + (b - d)\,i = 0$ y aplicar (1).

(3) Los elementos de $\mathbb{K}$ de la forma $a + ib$, con $a, b \in \mathbb{R} \equiv \mathbb{K}'$ constituyen un subcuerpo conmutativo de $\mathbb{K}$ (la demostración es trivial), con las definiciones:

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i\,(b + d)$$
$$(a + ib)\,(c + id) = (ac - bd) + i\,(ad + bc)$$

(4) La aplicación $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ definida por $f\,(a) = a + i0$ es un monomorfismo de cuerpos (la demostración es elemental). Luego se pueden identificar $\mathbb{R}$ y $f\,(\mathbb{K}')$ siendo $f\,(\mathbb{K}')$ un subcuerpo de $\mathbb{K}$.

(5) La aplicación $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{K}$ definida por $g\,(a, b) = a + ib$ es una aplicación inyectiva. Además

$$g\left(\mathbb{R}^2\right) = \{a + ib : a, b \in \mathbb{R}\}$$

es un cuerpo (aplicando 3).

Teniendo en cuenta que g es inyectiva y que $g\left(\mathbb{R}^2\right)$ es un subcuerpo de $\mathbb{K}$, podemos definir una estructura de cuerpo conmutativo en $\mathbb{R}^2$ con las siguientes operaciones:

$$\left.\begin{array}{l} (a, b) + (c, d) = (a + b, c + d) \\ (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc) \end{array}\right\}[1]$$

Resumiendo, $\mathbb{K}$ contendría un cuerpo isomorfo a $\mathbb{R}^2$ con las operaciones [1]. Pero si $\left(\mathbb{R}^2, +, \cdot\right)$ es un cuerpo conmutativo habremos encontrado un $\mathbb{K}$ de los que buscábamos. Además $\left(\mathbb{R}^2, +, \cdot\right)$ sería un cuerpo minimal (para la relación de contenido) y por tanto, salvo isomorfismos habremos encontrado el cuerpo minimal $\mathbb{K}$.