# Tema 6

# Números reales. Topología de la recta real

## 6.1 Introducción

Existen muy diversos procedimientos para introducir el cuerpo de los números reales. En los métodos que podemos llamar constructivos, se parte de axiomas usuales de la Teoría de Conjuntos, que llevan al conjunto de los números naturales y, en tres etapas sucesivas, se construyen los números enteros, racionales y reales. La tercera etapa, de construcción de los números reales a partir de los racionales, es sin duda alguna la más complicada y es la que diferencia esencialmente unos métodos constructivos de otros hasta tal punto que, a priori, la definición concreta de número real a la que se llega es diferente en cada caso. Lo realmente importante, y en cierto modo sorprendente, es que todos estos métodos constructivos conducen a conjuntos que gozan siempre de las mismas propiedades, independientemente del método elegido. Los métodos axiomáticos, a diferencia de los constructivos, admiten la existencia de un conjunto que goza de algunas de esas propiedades, elegidas de forma que de ellas puedan deducirse todas las demás. Por la rapidez que lleva consigo y por el pequeño bagaje de conocimientos que presupone, optamos por introducir axiomáticamente el cuerpo de los números reales.

## 6.2 Axiomas de cuerpo

Admitamos la existencia de un conjunto $\mathbb{R}$, conjunto de los números reales, que tiene las siguientes propiedades:

A. En $\mathbb{R}$ hay definida una operación, llamada suma y denotada con el signo $+$, que verifica los siguientes axiomas:

**Axioma 1** *La suma es asociativa:* $(a+b)+c = a+(b+c)$ , $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$

**Axioma 2** *La suma es conmutativa:* $a + b = b + a$ , $\forall a, b \in \mathbb{R}$

**Axioma 3** *Existe un elemento neutro para la suma:* $\exists e \in \mathbb{R}$ *:* $a + e = a$ *,* $\forall a \in \mathbb{R}$

**Axioma 4** *Todo número real admite un simétrico para la suma:* $\forall a \in \mathbb{R}$ *,* $\exists b \in \mathbb{R}$ *:* $a + b = e$

Los cuatro axiomas anteriores se resumen diciendo que $\mathbb{R}$, con la operación suma, es un grupo conmutativo, *el grupo aditivo de los números reales.* Así por ejemplo es inmediato comprobar que el elemento neutro para la suma es único y lo notaremos en adelante por 0. Asímismo el simétrico, $b$, de un número real $a$, es único, lo llamaremos opuesto de $a$ y se le representa por $-a$. Es costumbre también escribir a-b en lugar de $a + (-b)$. Nótese que sólo conocemos hasta ahora la existencia de un número real, el cero.

Vamos ahora con una segunda serie de axiomas:

B. En $\mathbb{R}$ hay definida una segunda operación, llamada producto y denotada por yuxtaposición, que verifica los siguientes axiomas:

**Axioma 5** *El producto es asociativo:* $(ab)\,c = a\,(bc) \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$

**Axioma 6** *El producto es conmutativo:* $ab = ba \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$

**Axioma 7** *Existe un número real no nulo que es el elemento neutro para el producto:* $\exists u \in \mathbb{R}$*,* $u \neq 0 : au = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$

**Axioma 8** *Todo número real distinto de cero admite un simétrico para el producto:* $\forall a \in \in \mathbb{R} - \{0\}$ *,* $\exists b \in \mathbb{R}$ *:* $ab = u$

**Axioma 9** *El producto cumple la propiedad distributiva respecto de la suma:* $a\,(b + c) = = ab + ac \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$

Es fácil demostrar que el elemento neutro que aparece en los axiomas es único; lo notaremos por 1. Igualmente el simétrico, $b$, de un número real no nulo, $a$, es único, lo llamaremos inverso de $a$ y lo notaremos por $a^{-1}$ o por $\frac{1}{a}$. Si $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R} - \{0\}$ escribiremos $\frac{a}{b}$ en lugar de $ab^{-1}$.

Los axiomas A y B se resumen diciendo que $\mathbb{R}$, con las operaciones suma y producto, tiene estructura de cuerpo conmutativo, *el cuerpo de los números reales.* Conviene resaltar que los nueve axiomas introducidos hasta ahora implican muy poco sobre el cuerpo $\mathbb{R}$. Nótese que cualquier propiedad de $\mathbb{R}$ que se deduzca de estos axiomas tiene que ser válida en cualquier cuerpo conmutativo; Puesto que el conjunto $\{0, 1\}$ puede dotarse de estructura de cuerpo conmutativo, deducimos que sólo podemos asegurar, hasta ahora, la existencia de dos números reales, el cero y el uno, y aún no somos capaces de probar, por ejemplo, que $1 \neq -1$.

## 6.3 Axiomas de orden

Pasamos ahora a enunciar un tercer grupo de axiomas.

C. En $\mathbb{R}$ se tiene definida una relación binaria, $\leq$, que verifica los siguientes axiomas:

**Axioma 10** *Propiedad reflexiva:* $a \leq a \quad \forall a \in \mathbb{R}$

**Axioma 11** *Propiedad antisimétrica:* $a, b \in \mathbb{R}$ *,* $a \leq b$ *y* $b \leq a \Rightarrow a = b$

**Axioma 12** *Propiedad transitiva:* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *,* $a \leq b$ *y* $b \leq c \Rightarrow a \leq c$

Los tres axiomas anteriores se resumen diciendo que la relación binaria $\leq$ es una relación de orden.

**Axioma 13** *La relación de orden* $\leq$ *es total: dados* $a, b \in \mathbb{R}$ *se tiene que* $a \leq b$ *o* $b \leq a$

Los siguientes axiomas ligan la relación de orden con la estructura de cuerpo.

**Axioma 14** *Si se suma un mismo número real a los dos miembros de una desigualdad, la desigualdad se mantiene:* $a, b \in \mathbb{R}$ *,* $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$ $\forall c \in \mathbb{R}$

**Axioma 15** *Si se multiplican los dos miembros de una desigualdad por un mismo número real mayor o igual que cero, la desigualdad se mantiene:* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *,* $a \leq b$*,* $0 \leq c \Rightarrow ac \leq bc$

Un cuerpo en el que exista una realción binaria verificando los axiomas C recibe el nombre de cuerpo ordenado. Por tanto los axiomas A,B y C se resumen diciendo que $\mathbb{R}$ es un cuerpo conmutativo ordenado.

Para completar la axiomática del número real queda todavía un último axioma. Este axioma, que es sin duda el más importante, se dará más adelante por dos razones. En primer lugar necesitamos introducir algunos conceptos para su enunciado y por otra parte los axiomas de cuerpo ordenado, que ya tenemos, permiten deducir una amplia gama de consecuencias sin necesidad del axioma que falta.

Las siguientes notaciones son usuales:
Si $a, b$ son dos números reales:

$a < b$ sii $a \leq b$ y $a \neq b \quad ; \quad a \geq b$ sii $b \leq a \quad ; \quad a > b$ sii $b < a$

$\mathbb{R}^+ := \{a \in \mathbb{R} \ / \ 0 < a\}$

$\mathbb{R}^- := \{a \in \mathbb{R} \ / \ a < 0\}$

$\mathbb{R}_0^+ := \{a \in \mathbb{R} \ / \ 0 \leq a\}$

$\mathbb{R}^* := \mathbb{R} - \{0\}$

Las primeras consecuencias de los axiomas de cuerpo ordenado son las que justifican el manejo de las desigualdades. Las resumimos a continuación:

Si $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, entonces:

1) $a \leq b \Leftrightarrow -b \leq -a$

2) $a < b$ y $c \leq d \Rightarrow a + c \leq b + d$

3) $a \leq b$ y $c \leq 0 \Rightarrow bc \leq ac$

4) $a < b$ y $c > 0 \Rightarrow ac < bc$

5) $aa > 0 \quad \forall a \in \mathbb{R} - \{0\}$

6) $0 < 1 < 1 + 1$ (Esto sugiere ya que $\mathbb{R}$ tiene "muchos" elementos)

7) $a \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow a^{-1} \in \mathbb{R}^+$

8) $0 < a < b \Rightarrow 0 < b^{-1} < a^{-1}$

9) $0 < a < b$ y $0 < c < d \Rightarrow ac < bd$

## 6.4 Valor absoluto

**Definición 16** *Dado un número real $a$ se define su valor absoluto, $|a|$, de la siguiente manera:*

$$|a| := \begin{cases} a & si\ a \geq 0 \\ -a & si\ a < 0 \end{cases}$$

Enunciamos algunas propiedades básicas del valor absoluto:

1) $|a| \geq 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}$

2) $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$

3) $a \leq |a| \quad \forall a \in \mathbb{R}$

4) $|a| = |-a| \quad \forall a \in \mathbb{R}$

5) $|ab| = |a|\,|b| \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$

6) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$ con $b \neq 0$

**Proposición 17** *i) Si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $|a| \leq b \Leftrightarrow -b \leq a \leq b$*

*ii)* $|a + b| \leq |a| + |b| \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$

*iii)* $||a| - |b|| \leq |a - b| \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$

**Demostración:**

($i$) Supongamos que $|a| \leq b$. Entonces, se tiene $a \leq |a| \leq b$ y también $-a \leq |-a| = |a| \leq b$, de donde $-b \leq a \leq b$. Recíprocamente, si $-b \leq a \leq b$, puede ocurrir $a \geq 0$ y entonces $|a| = a \leq b$ o bien $a < 0$ y $|a| = -a \leq b$ porque $-b \leq a$, luego en cualquier caso $|a| \leq b$ como se quería demostrar.

($ii$) Se tiene claramente $-|a| \leq a \leq |a|$ y $-|b| \leq b \leq |b|$ y por consiguiente $-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|$ con lo que,aplicando la parte i) obtenemos $|a + b| \leq |a| + |b|$.

($iii$) En virtud de ii) tenemos $|a| = |(a - b) + b| \leq |a - b| + |b|$ y $|b| = |(b - a) + a| \leq |b - a| + |a| = |a - b| + |a|$, de donde obtenemos $-|a - b| \leq |a| - |b| \leq |a - b|$, luego por la parte i) queda $||a| - |b|| \leq |a - b|$. c.q.d.$\square$

Por verificar $|\bullet|$ las propiedades 1),2),5) y ii) se tiene que $(\mathbb{R}, |\bullet|)$ es un e.v.n., luego $(\mathbb{R}, d)$ es un espacio métrico, donde $d(x,y) = |x-y|$, y por tanto $(\mathbb{R}, \tau)$ es un espacio topológico métrico, siendo $\tau$ la topología asociada a la métrica $d$.

## 6.5 Números naturales

**Definición 18** *Un subconjunto $A$ de $\mathbb{R}$ se llama inductivo si verifica que $1 \in A$ y que si $x \in A$ entonces $x+1 \in A$.*

Por ejemplo $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^+$ son inductivos mientras que $\mathbb{R}^-$ y $\mathbb{R}^*$ no lo son.

Se define el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales como la intersección de todos los subconjuntos inductivos de $\mathbb{R}$.

Es inmediato que $\mathbb{N}$ es un conjunto inductivo. El hecho de que sea el más pequeño de todos los subconjuntos inductivos de $\mathbb{R}$ se justifica a continuación.

**Teorema 19** ***(Principio de inducción):****Si $A$ es un conjunto inductivo de números reales y $A \subset \mathbb{N}$ entonces $A = \mathbb{N}$.*

En el siguiente resultado se resumen las propiedades más inmediatas de los números naturales.

**Corolario 20** *(i)* $1 \leq n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
*(ii) Si* $m, n \in \mathbb{N} \Rightarrow m+n,\ mn \in \mathbb{N}$
*(iii) Si* $n \in \mathbb{N} \Rightarrow -n \notin \mathbb{N}$
*(iv) Si* $n \in \mathbb{N}$ *y* $\frac{1}{n} \in \mathbb{N} \Rightarrow n = 1$

**Lema 21** *Si $n \in \mathbb{N} - \{1\}$ entonces $n-1 \in \mathbb{N}$*

**Proposición 22** *Dados dos números naturales $m$ y $n$ se tiene que: $n < m \Leftrightarrow m-n \in \mathbb{N}$.*

La proposición anterior es una caracterización algebraica del orden de los naturales.

**Corolario 23** *Si $m$ y $n$ son dos números naturales verifcando $n < m$, entonces $n+1 \leq m$.*

Esta propiedad se enuncia a veces diciendo que el orden de los naturales es discreto.

**Definición 24** *Se dice que $A \subset \mathbb{R}$ tiene máximo si $\exists x \in A$ t.q. $x \geq a \quad \forall a \in A$. Es inmediato que el elemento $x$ es único, se denomina máximo del conjunto $A$ y se nota $Max(A)$. Análogamente, diremos que $A$ tiene mínimo si $\exists y \in A$ t.q. $y \leq a \quad \forall a \in A$. Es igualmente inmediato que $y$ es único, se le llama mínimo de $A$ y se le nota $Min(A)$.*

Resaltamos que un conjunto de números reales puede no tener ni máximo ni mínimo. El siguiente resultado asegura la existencia de mínimo en determinadas circunstancias.

**Teorema 25** ***(Principio de la buena ordenación de los naturales)****. Todo conjunto no vacío de números naturales tiene mínimo.*

**Demostración:**

Sea $\emptyset \neq A \subset \mathbb{N}$. Si $1 \in A$ no hay nada que demostrar pues entonces $1 = \min A$. Supongamos que $1 \notin A$ y sea $B = \{n \in \mathbb{N} : n < a \quad \forall a \in A\}$. Claramente $1 \in B$. Si $B$ fuese inductivo, sería $B = \mathbb{N}$ y como consecuencia $A$ sería vacío, luego $B$ no es inductivo y por tanto $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $n+1 \notin B$. Por el corolario anterior tiene $n+1 \leq a \quad \forall a \in A$ y como $n+1 \in A$, pues en otro caso $n+1$ pertenecería a $B$, concluimos que $n+1 = \min A$. c.q.d.□

## 6.6 Conjuntos finitos e infinitos

De manera intuitiva, cabría decir que dos conjuntos tienen el mismo número de elementos cuando existe una aplicación biyectiva de uno sobre otro. Es igualmente intuitivo que el conjunto $\{m \in \mathbb{N} : m \leq n\}$ tiene $n$ elementos. Estas ideas intuitivas se formalizan a continuación.

**Definición 26** *Un conjunto $A$ es equipotente a otro conjunto $B$ si existe una aplicación biyectiva de $A$ sobre $B$. En tal caso escribiremos $A \sim B$.*

Es inmediato que $A \sim A$ para cualquier conjunto $A$, que si $A \sim B$ entonces $B \sim A$, y que si $A \sim B$ y $B \sim C$ entonces $A \sim C$.

Dado un natural $n$ notaremos $S(n) := \{m \in \mathbb{N} : m \leq n\}$.

**Proposición 27** *Sean $m$ y $n$ números naturales tales que $S(m) \sim S(n)$. Entonces, $m = n$.*

**Definición 28** *Un conjunto $A$ se dice finito si es vacío o si existe un natural $n$ tal que $A \sim S(n)$ donde $S(n) := \{m \in \mathbb{N} : m \leq n\}$. La proposición anterior asegura que tal natural es único y diremos que $n$ es el número de elementos de $A$. Convendremos que el conjunto vacío tiene 0 elementos.*

*Un conjunto se dice infinito si no es finito.*

La propiedad de los conjuntos finitos de números reales que más nos interesa es la siguiente:

**Proposición 29** *Todo conjunto finito no vacío de números reales tiene máximo y mínimo.*

**Corolario 30** $\mathbb{R}$ *y* $\mathbb{N}$ *son conjuntos infinitos.*

El siguiente enunciado se usa con frecuencia para decidir si un conjunto de números reales es finito.

**Proposición 31** *i) Si $n$ es un número natural, todo subconjunto de $S(n)$ es finito.*

*ii) Todo subconjunto de un conjunto finito es finito.*

*iii) Si $A$ es un conjunto no vacío y existe un natural $n$ y una aplicación inyectiva de $A$ en $S(n)$, entonces $A$ es finito.*

*iv) Si $A$ es un conjunto no vacío y existe un natural $n$ y una aplicación sobreyectiva de $S(n)$ en $A$, entonces $A$ es finito.*

## 6.7 Conjuntos numerables

Hasta ahora hemos clasificado los conjuntos en finitos e infinitos. A su vez los conjuntos finitos se han clasificado atendiendo a su número de elementos. Pretendemos ahora iniciar una clasificación de los conjuntos infinitos atendiendo también a su "tamaño". De hecho en este apartado van a aparecer los conjuntos infinitos más "pequeños".

**Definición 32** *Un conjunto $A$ se dice numerable si es vacío o si existe una aplicación inyectiva de $A$ en $\mathbb{N}$. (Equivalentemente si es vacío o es equipotente a un subconjunto de $\mathbb{N}$).*

Obviamente todo conjunto finito es numerable, $\mathbb{N}$ es infinito numerable e igual le ocurre a cualquier conjunto equipotente a $\mathbb{N}$. Veremos en seguida que no existen más conjuntos numerables que los citados.

**Lema 33** *Todo conjunto infinito de números naturales es equipotente a $\mathbb{N}$. De hecho si $A$ es un tal conjunto, existe una biyección $f : \mathbb{N} \to A$ tal que si $m < n$ entonces $f(m) < f(n)$.*

**Teorema 34** *Sea $A$ un conjunto numerable. Entonces $A$ es finito o equipotente a $\mathbb{N}$.*

Como consecuencia de lo anterior todo conjunto infinito numerable es equipotente a $\mathbb{N}$. Intuitivamente esto significa que $\mathbb{N}$ es el más "pequeño" conjunto infinito que existe. Aún no es posible mostrar la existencia de conjuntos no numerables. Se demostrará mas adelante que $\mathbb{R}$ no es numerable.

Resaltamos también que $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ son conjuntos numerables.

## 6.8 Mayorantes, minorantes, supremo e ínfimo

Existen conjuntos no vacíos de números reales que no tienen máximo ni mínimo, como por ejemplo $\mathbb{R}$. El conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$ no tiene máximo ni mínimo como se puede comprobar, pero, a diferencia de $\mathbb{R}$, existen números reales mayores o iguales que todos los de $A$ y números reales menores o iguales que todos los de $A$. A continuación damos nombre a estos números reales. Merece la pena recordar que estas definiciones pueden hacerse en cualquier cuerpo ordenado.

**Definición 35** *Sea $A$ un conjunto no vacío de números reales. Diremos que un número real $x$ es mayorante de $A$ si $x \geq a \quad \forall a \in A$. Diremos que un número real $x$ es minorante de $A$ si $x \leq a \quad \forall a \in A$.*

Nótese que, a diferencia del máximo y del mínimo, un mayorante o minorante de un conjunto no tiene porqué pertenecer a dicho conjunto. De hecho es claro que el máximo (resp. mínimo) de un conjunto, si existe, es un mayorante (resp. minorante) de dicho conjunto, y que un mayorante (resp. minorante) de un conjunto $A$ es máximo (resp. mínimo) de $A$ si, y sólo si, pertenece a $A$.

**Definición 36** *Si un conjunto admite un mayorante diremos que está mayorado. Si un conjunto admite un minorante diremos que está monirado. Si un conjunto está a la vez mayorado y minorado diremos que está acotado.*

Dado un conjunto $A$ de números reales, notaremos $M(A)$ al conjunto de los mayorantes de $A$, $m(A)$ al conjunto de sus minorantes. Nótese que si $A$ está mayorado ($M(A) \neq \emptyset$), entonces $M(A)$ es un conjunto infinito. Análogamente, si $A$ está minorado, entonces $m(A)$ es infinito.

A título de ejemplo, el conjunto $\{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$ está acotado, $\mathbb{R}$ no está mayorado ni minorado, $\mathbb{R}^+$ está minorado pero no mayorado y $\mathbb{R}^-$ está mayorado pero no minorado. El siguiente lema puede ayudar a determinar todos los mayorantes y minorantes de un conjunto.

**Lema 37** *Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y supongamos que $a < b + \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$. Entonces $a \leq b$.*

**Definición 38** *Sea $A$ un conjunto no vacío de números reales. Si $A$ está mayorado y $M(A)$ tiene mínimo, se define el supremo de $A$ por:*

$$\sup(A) = \min(M(A))$$

*Análogamente, se define el ínfimo de $A$ por:*

$$\inf(A) = \max(m(A))$$

*supuesto que exista.*

Claramente el supremo y el ínfimo de un conjunto, si existen, son únicos y son respectivamente un mayorante y un minorante del mismo.

La relación entre supremo y máximo de un conjunto y la relación entre ínfimo y mínimo, se especifican a continuación.

**Proposición 39** *Sea $A$ un conjunto no vacío de números reales.*

*i) Si $A$ tiene máximo, entonces tiene supremo y* $\sup A = \max A$

*ii) Si $A$ tiene mínimo, entonces tiene ínfimo e* $\inf A = \min A$

*iii) Supongamos que $A$ tiene supremo. Entonces:*

- *Si* $\sup A \in A$, *$A$ tiene máximo y* $\max A = \sup A$
- *Si* $\sup A \notin A$, *$A$ no tiene máximo*

*iv) Supongamos que $A$ tiene ínfimo. Entonces:*

- *Si* $\inf A \in A$, *$A$ tiene mínimo y* $\min A = \inf A$
- *Si* $\inf A \notin A$, *$A$ no tiene mínimo*

La siguiente proposición es una importante caracterización del supremo y del ínfimo de un conjunto de números reales.

**Proposición 40** *Sea $A$ un conjunto no vacío de números reales y sea $x \in \mathbb{R}$. Entonces:*

*i)* $x = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq a \quad \forall a \in A \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in A : a > x + \varepsilon \end{cases}$

*ii)* $x = \inf A \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq a \quad \forall a \in A \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in A : a < x + \varepsilon \end{cases}$

## 6.9 El último axioma

El siguiente axioma, en unión de los axiomas A, B y C, que se resumían afirmando que $\mathbb{R}$ era un cuerpo conmutativo ordenado, completa la axiomática que define el cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales.

**Axioma 41** ***(Axioma del supremo)****. Todo conjunto de números reales no vacío y mayorado tiene supremo.*

Nótese que para que un conjunto de números reales tenga supremo debe ser necesariamente no vacío y mayorado. El axioma anterior nos asegura que estas dos condiciones, trivialmente necesarias, son también suficientes. Cabría preguntarse por qué no se exige análogamente que todo conjunto de números reales no vacío y minorado tenga ínfimo. A continuación veremos que esto ya se deduce a partir de nuestra axiomática.

**Proposición 42** *Todo conjunto de números reales no vacío y minorado tiene ínfimo.*

Como consecuencia, si $A$ es un conjunto de números reales no vacío y minorado, entonces $-A$ está mayorado y se tiene:

$$\inf A = -\sup(-A)$$

Cambiando $A$ por $-A$, si $A$ es un conjunto de números reales no vacío y mayorado, entonces $-A$ está minorado y se tiene:

$$\sup A = -\inf(-A)$$

**Corolario 43** *Todo conjunto de números reales no vacío y acotado tiene supremo e ínfimo.*

Como consecuencia fundamental del axioma del supremo obtenemos a continuación el llamado Principio de Arquímedes, según el cuál un número real cualquiera puede ser superado por el procedimiento de sumar la unidad consigo misma suficientes veces.

**Teorema 44** ***(Principio de Arquímedes).*** *El conjunto de los números naturales no está mayorado. Equivalentemente:*

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{N} : x < n$$

**Demostración:**

Si $\mathbb{N}$ estuviese mayorado, sea $h = \sup \mathbb{N}$. Si $n \in \mathbb{N}$, $n+1 \in \mathbb{N}$, luego $n+1 \leq h$ y $n \leq h-1$. Como $n$ es arbitrario, hemos probado que $h-1$ es mayorante de $\mathbb{N}$, lo cual es absurdo, pues $h$ era el mínimo de los mayorantes y $h-1 < h$. c.q.d.$\square$

El papel de la unidad en el Principio de Arquímedes puede ser desempeñado por cualquier real positivo, obteniéndose el siguiente enunciado que no es más que una **fórmulación equivalente del Principio de Arquímedes**.

**Corolario 45** *Dados un real $x$ y un real positivo $\varepsilon$ puede encontrarse un número natural $n$ (que dependerá de $x$ y de $\varepsilon$) tal que $x < n\varepsilon$.*

Enunciaremos a continuación propiedades importantes relativas al conjunto de los números enteros.

**Proposición 46** *i) Todo conjunto de números enteros no vacío y mayorado (resp. minorado) tiene máximo (resp. mínimo).*

*ii) Si $A$ es un conjunto no vacío de números enteros, entonces $A$ está acotado si, y sólo si, $A$ es finito.*

Como segunda consecuencia fundamental del axioma del supremo, vamos ahora a probar la existencia de números irracionales, es decir, números reales que no son racionales.

**Proposición 47** $\exists \alpha \in \mathbb{R}^+ : \alpha^2 = 2$

**Demostración:**

Sea $A = \left\{x \in \mathbb{R}_0^+ : x^2 < 2\right\}$; $A$ es no vacío $(1 \in A)$ y si $x \in A$ tenemos $x^2 < 2 < 2^2$ de donde usando que $x \geq 0$ se deduce fácilmente que $x < 2$. Por tanto $A$ está mayorado; sea $\alpha = \sup(A)$. Claramente $\alpha \geq 1$ y queda probar que $\alpha^2 = 2$.

Sea $n$ un natural arbitrario. Como $\alpha + \frac{1}{n} > \alpha$, tenemos que $\alpha + \frac{1}{n} \notin A$ esto es

$$2 \leq \left(\alpha + \frac{1}{n}\right)^2 = \alpha^2 + \frac{2\alpha}{n} + \frac{1}{n^2} \leq \alpha^2 + \frac{2\alpha + 1}{n}$$

obteniéndose

$$\frac{2-\alpha^2}{2\alpha+1} \leq \frac{1}{n}$$

Por otra parte, al ser $\alpha - \frac{1}{n} < n$ tenemos, por definición de supremo, que existe $x \in A$ verificando que $\alpha - \frac{1}{n} < x$, pero como $\alpha - \frac{1}{n} \geq 0$ también se tiene que $\left(\alpha - \frac{1}{n}\right)^2 < x^2$ y por tanto que $\left(\alpha - \frac{1}{n}\right)^2 < 2$. Así pues

$$2 > \left(\alpha - \frac{1}{n}\right)^2 = \alpha^2 - \frac{2\alpha}{n} + \frac{1}{n^2} > \alpha^2 \frac{2\alpha}{n}$$

de donde $\frac{\alpha^2-2}{2\alpha} < \frac{1}{n}$ y con mayor motivo

$$\frac{\alpha^2-2}{2\alpha+1} < \frac{1}{n}$$

En resumen, si notamos $\beta = \frac{\left|\alpha^2-2\right|}{2\alpha+1}$, se tiene $\beta \leq \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$; si fuese $\beta \neq 0$ existiría, por el principio de Arquímedes, un natural $n_0$ tal que $\frac{1}{\beta} < n_0$, es decir, $\beta > \frac{1}{n_0}$ lo cual es una contradicción. Así pues $\beta = 0$ y $\alpha^2 = 2$. c.q.d.$\Box$

Puesto que no existe ningún número racional cuyo cuadrado sea 2, deducimos que el número real $\alpha$ que aparece en la proposición anterior, es irracional.

Si tenemos en cuenta que la suma de un racional y un irracional es irracional y que el producto de un racional no nulo por un irracional es también irracional, la abundancia de números irracionales está asegurada, de hecho se tiene el siguiente resultado.

**Proposición 48** *Dados $x, y \in \mathbb{R}$ verificando $x < y$, existe un número irracional $\beta$ tal que $x < \beta < y$.*

La abundancia de irracionales queda aún más resaltada por el hecho de que $\mathbb{R}$ no es numerable, y como consecuencia $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ tampoco es numerable, y esto nos da idea de que existen "muchos más" números irracionales que racionales.

Terminamos esta parte del tema poniendo de manifiesto un importante hecho, a pesar de la abundancia de irracionales, entre dos números reales siempre existe un racional o equivalentemente todo número real puede "aproximarse" por racionales.

**Teorema 49** ***(Densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$).*** *Dados $x, y \in \mathbb{R}$ verificando $x < y$, existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $x < r < y$.*

**Demostración:**

Supongamos primeramente que $0 \leq x$. Por el principio de Arquímedes $\exists n_0 \in$ $\in \mathbb{N}$ tal que $1 < n_0 (y - x)$ y por tanto $\frac{1}{n_0} < y - x$. Sea

$$m_0 = \min\{m \in \mathbb{N} : n_0 x < m\}$$

(por el Principio de Arquímedes, el conjunto anterior es no vacío y por el principio de la buena ordenación de los naturales tiene mínimo). Veamos que $m_0 - 1 \leq n_0 x$; si $m_0 \neq 0 \Rightarrow m_0 - 1 \in \mathbb{N}$ y por tanto $m_0 - 1 \notin \{m \in \mathbb{N} : n_0 x < m\}$ y si $m_0 = 1$, se tiene $m_0 - 1 = 0 \leq n_0 x$. Se tiene entonces

$$x < \frac{m_0}{n_0} = \frac{m_0 - 1}{n_0} + \frac{1}{n_0} \leq x + \frac{1}{n_0} < x + (y - x) = y$$

y basta tomar $r = \frac{m_0}{n_0}$.

Supongamos ahora $x < 0$. Si $y > 0$ podemos tomar $r = 0$ y si $y \leq 0$, por la primera parte de la demostración existe un racional $s$ tal que $-y < s < -x$, y basta tomar $r = -s$. c.q.d.□

Resaltamos que el teorema anterior es consecuencia del Principio de Arquímedes. Hemos retrasado su enunciado pues al conocer la abundancia de números irracionales resulta más expectacular el resultado.

## 6.10 Topología de la recta real

### 6.10.1 Intervalos y entornos

Sean $a$ y $b$ dos números reales tales que $a \leq b$. Se llama **intervalo abierto de extremos $a$ y $b$** y se designa por $]a, b[$ al conjunto de números reales estrictamente comprendidos entre $a$ y $b$:

$$]a, b[ = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

Los **intervalos semiabiertos (o semicerrados) de extremos $a$ y $b$** se definen de la siguiente forma:

$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}, \quad [a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$$

Se llama **intervalo cerrado de extremos $a$ y $b$** y se designa por $[a, b]$ al conjunto de números reales que son mayores o iguales que $a$ y menores o iguales que $b$:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

Obsérvese que si $a = b$, el intervalo $[a, b]$ se reduce a un punto.

Los intervalos de los tipos anteriores son acotados. Definiremos ahora los **intervalos no acotados**.

Para cada $a \in \mathbb{R}$ se definen los **intervalos abiertos**

$$]-\infty, a[ = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}, \quad ]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$$

y los **intervalos semiabiertos**

$$] - \infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}, \quad [a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$$

Se define también el **intervalo abierto**

$$]-\infty, +\infty[ = \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < \infty\} = \mathbb{R}$$

Un conjunto de números reales no vacío y acotado inferiormente (superiormente) tiene ínfimo (supremo). Si un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ no está acotado inferiormente, suele ponerse $inf A = -\infty$. De manera análoga, si $A$ no está acotado superiormente, se pone $supA = +\infty$. Hecho este convenio, vamos a establecer una proposición que caracteriza los intervalos.

**Proposición 50** *Un conjunto $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo si, y sólo si, cualesquiera que sean los puntos $x, y \in I$ tales que $x < y$ se verifica $[x, y] \subset I$.*

Dado un número real $x$, se llama **entorno** de $x$ a todo intervalo abierto de la forma $]x - r, x + r[$ donde $r > 0$. El número positivo $r$ se llama radio del entorno.

En lo que sigue designaremos por $N(x)$ un entorno cualquiera de $x$. A veces es conveniente especificar el radio del entorno de que se habla y en lugar de escribir $N(x)$, se escribe $N(x; r)$.

Es evidente que la intersección de un número finito de entornos de $x$ es un entorno de $x$ : la intersección de los entornos $N(x; r_1), N(x; r_2), \ldots, N(x; r_n)$ es el entorno $N(x; r)$ donde $r = min\{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$.

También está claro que si $x$ e $y$ son dos números reales distintos, existen un entorno de $x$ y otro de $y$ disjuntos: basta considerar los entornos $N(x; r)$ y $N(y; r)$ con $r = \frac{|x-y|}{2}$.

Si $N(x)$ es un entorno de $x$, el conjunto $N^*(x) = N(x) \backslash \{x\}$ se llama **entorno reducido** del punto $x$.

### 6.10.2 Conjuntos abiertos y conjuntos cerrados

**Definición 51** *Se dice que un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es abierto cuando para cada $x \in A$ existe un intervalo abierto que contiene a $x$ y esté contenido en $A$.*

Como todo intervalo abierto que contenga a $x$ contiene también un entorno de $x$ y todo entorno de $x$ es un intervalo abierto que contiene a $x$, resulta que un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es abierto si, y sólo si, para cada $x \in A$ existe un entorno $N(x)$ contenido en $A$.

**Ejemplos:**
1. Todo intervalo abierto en un conjunto abierto.
2. Un intervalo cerrado $[a, b]$ no es un conjunto abierto pues, por ejemplo, todo entorno de $a$ contiene puntos que no están en $[a, b]$.

**Proposición 52** *Se verifican las siguientes propiedades:*

(1) $\emptyset$ *y* $\mathbb{R}$ *son abiertos*

(2) *La unión de cualquier colección de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.*

(3) *La intersección de cualquier colección finita de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.*

La intersección de una colección infinita de conjuntos abiertos puede no ser un conjunto abierto como lo prueba el siguiente:

**Contraejemplo:**

Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $A_n = ]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$. Se tiene que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{0\}$$

y $\{0\}$ no es un conjunto abierto, pues todo entorno de 0 contiene puntos distintos de cero.

La siguiente proposición caracteriza los conjuntos abiertos de $\mathbb{R}$.

**Proposición 53** *Un conjunto* $A \subset \mathbb{R}$ *es abierto si, y sólo si, es unión de una colección finita o numerable de intervalos abiertos disjuntos.*

**Definición 54** *Se dice que un conjunto* $A \subset \mathbb{R}$ *es* ***cerrado*** *cuando su complementario* $\mathbb{R} \setminus A$ *es abierto.*

**Ejemplos:**

1. Todo intervalo cerrado $[a, b]$ es un conjunto cerrado, pues su complementario es abierto por ser la unión de los conjuntos abiertos $]-\infty, a[$ y $]b, +\infty[$.
2. Todo intervalo semiabierto no acotado es cerrado.

De las leyes de De Morgan sobre el complentario de la unión y sobre el complementario de la intersección y de las propiedades de los abiertos, resultan inmediatamente las propiedades de los cerrados.

**Proposición 55** *Se verifican las siguientes propiedades:*

(1) $\emptyset$ *y* $\mathbb{R}$ *son cerrados*

(2) *La intersección de cualquier colección de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.*

(3) *La unión de cualquier colección finita de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.*

### 6.10.3 Puntos interiores, exteriores y puntos frontera

Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ clasifica los puntos de $\mathbb{R}$ en tres clases: puntos interiores a $A$, puntos exteriores y puntos frontera de $A$.

**Definición 56** *Se dice que un punto $x \in \mathbb{R}$ es **interior** a un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ cuando existe un entorno $N(x)$ contenido en $A$. El conjunto de los puntos interiores a $A$ se llama interior de $A$ y se designa por* $\mathrm{int}(A)$.

**Definición 57** *Se dice que un punto $x \in \mathbb{R}$ es **exterior** a un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ cuando existe un entorno $N(x)$ contenido en el complementario de $A$. El conjunto de los puntos exteriores a $A$ se llama exterior de $A$ y se designa por* $\mathrm{ext}(A)$.

**Definición 58** *Se dice que un punto $x \in \mathbb{R}$ es un punto **frontera** de un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ cuando todo entorno de $x$ contiene puntos de $A$ y del complementario de $A$. El conjunto de los puntos frontera de $A$ se llama frontera de $A$ y se designa por* $\mathrm{fr}(A)$.

**Ejemplo:**
Si $A$ es un intervalo cerrado de extremos $a$ y $b$, entonces $int\,(A) = \left]a, b\right[$, $ext\,(A) = \left]-\infty, a\right[ \cup \left]b, +\infty\right[$ y $fr\,(A) = \{a, b\}$.

**Proposición 59** *Para cada $A \subset \mathbb{R}$ los conjuntos $int\,(A)$, $ext\,(A)$ y $fr\,(A)$ son disjuntos y se verifica:*

$$\mathbb{R} = int\,(A) \cup ext\,(A) \cup fr\,(A)$$

*Además, los conjuntos $int\,(A)$ y $ext\,(A)$ son abiertos y el conjunto $fr\,(A)$ es cerrado.*

### 6.10.4 Puntos adherentes y puntos de acumulación

**Definición 60** *Un punto $x \in \mathbb{R}$ es **adherente** a un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ cuando todo entorno $N(x)$ contiene puntos de $A$. El conjunto de los puntos adherentes a $A$ se llama adherencia de $A$ y se designa por* $\mathrm{adh}(A)$.

**Proposición 61** *Para cada conjunto $A \subset \mathbb{R}$ el conjunto $adh\,(A)$ es el mínimo cerrado que contiene a $A$.*

De esta proposición resulta inmediatamente que un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es cerrado si, y sólo si, $A = \mathrm{adh}(A)$.

**Definición 62** *Se dice que un $x \in \mathbb{R}$ es **punto de acumulación** de un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ cuando todo entorno reducido $N^*(x)$ contiene puntos de $A$. El conjunto de los puntos de acumulación de $A$ se llama conjunto derivado de $A$ y se designa por* $\mathrm{ac}(A)$.

**Definición 63** *Los puntos que son adherentes pero no de acumulación se llaman* ***puntos aislados****.*

**Ejemplo:**

Sea $\mathbb{Z}$ el conjunto de los números enteros. Cualquier $x \in \mathbb{Z}$ es adherente a $\mathbb{Z}$, pero no es de acumulación de $\mathbb{Z}$ pues $N\left(x; \frac{1}{2}\right) \cap \mathbb{Z} = \{x\}$.

**Proposición 64** *Para cada $A \subset \mathbb{R}$ se verifica que $adh\,(A) = A \cup ac\,(A)$*

**Corolario 65** *Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es cerrado si, y sólo si, contiene todos sus puntos de acumulación*

### 6.10.5 Conjuntos compactos

**Definición 66** *Se dice que una colección $\mathcal{A}$ de conjuntos cubre a un conjunto $A$ o que es un* ***recubrimiento*** *de $A$ cuando la unión de todos los conjuntos de $\mathcal{A}$ contiene a $A$.*

**Definición 67** *Un* ***subrecubrimiento*** *de un recubrimiento $\mathcal{A}$ de $A$ es una subcolección $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ que cubre también al conjunto $A$. Un* ***recubrimiento abierto*** *de $A$ es un recubrimiento formado por conjuntos abiertos.*

Por **ejemplo**, el conjunto de todos los intervalos abiertos es un recubrimiento abierto de cualquier conjunto $A \subset \mathbb{R}$. El conjunto de todos los intervalos abiertos de la forma $\left]\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right[$ donde $n$ es un número natural mayor que 2 es un recubrimiento abierto del intervalo $]0, 1[$. Un subrecubrimiento de éste esté formado por los intervalos de la forma $\left]\frac{1}{2n}, 1 - \frac{1}{2n}\right[$ donde $n$ es un número natural mayor que 1.

**Definición 68** *Se dice que un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es* ***compacto*** *cuando de todo recubrimiento abierto de $A$ se puede extraer un subrecubrimiento finito.*

**Proposición 69** *Todo intervalo cerrado $[a, b]$ es compacto.*

El siguiente resultado caracteriza los subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$.

**Teorema 70** ***(Heine-Borel-Lebesgue):*** *Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es compacto si, y sólo si, es cerrado y acotado.*

**Demostración:**

Supongamos en primer lugar que $A$ es compacto y sea $x \in \mathbb{R} - A$. Para cada $y \in A$ existen dos entornos $N\,(x)$ y $N\,(y)$ disjuntos. La colección de todos los $N\,(y)$ para $y \in A$ es un recubrimiento abierto del compacto $A$ y de él se podrá extraer un subrecubrimiento finito $N\,(y_1)\,, ..., N\,(y_k)\,.$ Sean $N_1\,(x)\,, ..., N_k\,(x)$ los entornos de $x$ correspondientes. La intersección de éstos últimos es un entorno de $x$ contenido en $\mathbb{R} - A$. Así, para cada $x \in \mathbb{R} - A$ existe un entorno de $x$ contenido en $\mathbb{R} - A$, luego $\mathbb{R} - A$ es abierto y $A$ es cerrado.

Para ver que $A$ es acotado consideremos el recubrimiento abierto de $A$ formado por todos los intervalos $]-n, n[$ con $n \in \mathbb{N}$. De él podrá extraerse un subrecubrimiento finito $]-n_1, n_1[, ..., ]-n_k, n_k[$. Si llamamos $n_0 = max\{n_1, ..., n_k\}$ se tiene que $A \subset ]-n_0, n_0[$ y por tanto, que $A$ es acotado.

Recíprocamente, si $A$ es cerrado y acotado, entonces $A$ estará contenido en algún intervalo cerrado $[a, b]$ y si $\mathcal{A}$ es un recubrimiento abierto del compacto $A$, adjuntándole el abierto $\mathbb{R} - A$ obtendremos un recubrimiento abierto del compacto $[a, b]$ del que se podrá extraer un subrecubrimiento finito. Este subrecubrimiento estará formado por un número finito de conjuntos $A_1, .., A_k$ de $\mathcal{A}$ y tal vez $\mathbb{R} - A$. Entonces, los conjuntos $A_1, ..., A_k$ cubren $A$. Así pues, de todo recubrimiento abierto de $A$ se puede extraer un subrecubrimiento finito, luego $A$ es compacto. C.Q.D. $\Box$

**Teorema 71** ***(Bolzano-Weierstrass):*** *Todo conjunto infinito y acotado $A \subset$ $\subset \mathbb{R}$ tiene al menos un punto de acumulación.*

**Demostración:**

Probaremos que todo conjunto acotado $A \subset \mathbb{R}$ sin puntos de acumulación es finito.

Si $A$ es acotado estará contenido en un intervalo cerrado $[a, b]$. Si $A$ no tiene puntos de acumulación, ningún punto de $[a, b]$ será de acumulación de $A$, lo cual implica que para cada $y \in [a, b]$ existe un entorno $N(y)$ tal que el entorno reducido $N^*(y)$ no contiene puntos de $A$. La colección de todos los $N(y)$ para $y \in [a, b]$ es un recubrimiento abierto del compacto $[a, b]$ del que se podrá extraer un subrecubrimiento finito $N(y_1), ..., N(y_k)$. Estos $k$ entornos cubren también a $A$ y ninguno de los entornos reducidos $N^*(y_1), ..., N^*(y_k)$ tiene puntos de $A$, luego $A$ consta a lo sumo de $k$ puntos $y_1, ..., y_k$. C.Q.D. $\Box$

## 6.11 Teorema de completitud de $\mathbb{R}$

A continuación enunciaremos los conceptos (sin entrar en más detalles ya que el tema 8 está dedicado a las sucesiones) imprescindibles de sucesiones para poder demostrar el teorema de completitud de los números reales.

**Definición 72** *Si $A$ es un conjunto no vacío, llamaremos sucesión de elementos de $A$ a toda aplicación $f : \mathbb{N} \to A$.*

Nótese que para definir una sucesión de números reales basta con asociar a cada número natural un número real. Si para natural $n$, $x_n$ es un número real, notaremos $\{x_n\}$ a la sucesión $f : \mathbb{N} \to A$ definida por $f(n) = x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

**Definición 73** *Se dice que la sucesión $\{x_n\}$ es convergente a $x$ sii $\forall \varepsilon > 0$ $\exists m \in \mathbb{N}$ : si $n \geq m \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon$.*

Dicho número $x$, caso de existir, es único.

**Definición 74** *Se dice que una sucesión de números reales $\{x_n\}$ es de Cauchy sii $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists m \in \mathbb{N}$ : si $p, q \geq m \Rightarrow |x_p - x_q| < \varepsilon$.*

Es inmediato comprobar que toda sucesión convergente es una sucesión de Cauchy.

**Definición 75** *Se dice que una sucesión de números reales* $\{x_n\}$ *está acotada (resp. mayorada, minorada) si el conjunto de sus términos* $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ *está acotado (resp. mayorado, minorado).*

**Teorema 76** *(**Versión sucesiones del teorema de Bolzano-Weierstrass**). Toda sucesión de números reales acotada admite una sucesión parcial convergente.*

El siguiente resultado nos dice que en el caso de sucesiones de números reales son equivalentes los dos conceptos.

**Teorema 77** *(**Completitud de** $\mathbb{R}$). Una sucesión de números reales es convergente si, y sólo si, es una sucesión de Cauchy.*

**Demostración:**

Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales.

$\Rightarrow$) Supongamos que $\{x_n\} \to x$; dado $\varepsilon > 0$ tenemos

$$\exists m \in \mathbb{N} : \text{si } n \geq m \Rightarrow |x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$$

así, para $p, q \geq m$ tenemos

$$|x_p - x_q| \leq |x_p - x| + |x - x_q| < \varepsilon$$

lo que prueba que $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy.

$\Leftarrow$) Supongamos que $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy; entonces

$$\exists m \in \mathbb{N} : \text{si } p, q \geq m \Rightarrow |x_p - x_q| < 1$$

en particular, si $k = x_m$ y tomamos $q = m$, tenemos

$$p \geq m \Rightarrow k - 1 < x_p < k + 1$$

luego $\{x_n : n \geq m\}$ es un conjunto acotado. Ello implica que la sucesión $\{x_n\}$ está acotada. Por el teorema de Bolzano - Weierstrass $\{x_n\}$ admite una sucesión parcial convergente $\left\{x_{\sigma(n)}\right\}$; sea $x = \lim \left\{x_{\sigma(n)}\right\}$. Entonces, dado $\varepsilon > 0$, tenemos:

$$\begin{aligned}
\exists m_1 &\in \mathbb{N} : \text{si } n \geq m_1 \Rightarrow \left|x_{\sigma(n)} - x\right| < \frac{\varepsilon}{2} \\
\exists m_2 &\in \mathbb{N} : \text{si } p, q \geq m_2 \Rightarrow |x_p - x_q| < \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

con lo que finalmente

$$|x_n - x| \leq \left|x_n - x_{\sigma(n)}\right| + \left|x_{\sigma(n)} - x\right| < \varepsilon$$

lo que prueba que $\{x_n\} \to x$. c.q.d.$\square$