

Índice general

Prólogo	VII
1. CONCEPTO DE FUNCIÓN ANALÍTICA	1
1.1. Introducción histórica	1
1.2. El cuerpo de los números complejos	4
1.3. Topología del cuerpo complejo	12
1.3.1. Introducción	12
1.3.2. Compacidad	13
1.3.3. Conexión	14
1.4. Concepto de derivada. Primeras propiedades de las funciones holomorfas	16
1.5. Series de potencias y funciones analíticas	27
1.6. La función exponencial	33
1.7. Funciones multiformes elementales	35
1.7.1. El logaritmo complejo	35
1.7.2. La función potencia de base y exponente complejo	40
1.8. Funciones trigonométricas e hiperbólicas	41
1.8.1. Funciones trigonométricas	41
1.8.2. Funciones hiperbólicas	42
2. TEORÍA DE CAUCHY LOCAL	43
2.1. Introducción histórica	43
2.2. La integral de Riemann para funciones complejas de variable real	45
2.3. Integral curvilínea. Existencia de primitivas	47
2.4. Versión elemental de teorema de Cauchy y de la fórmula integral de Cauchy	55
2.5. Desarrollo en serie de Taylor. Equivalencia entre analiticidad y holomorfía	62
2.6. Teorema de extensión de Riemann o principio de Riemann de singularidades evitables	66

3. APLICACIONES DE LA TEORÍA DE CAUCHY	69
3.1. Introducción histórica	69
3.2. Desigualdades de Cauchy, teorema de Liouville y teorema fundamental del Álgebra	70
3.3. Convergencia uniforme sobre compactos: Teoremas de Morera y Weierstrass	78
3.4. Ceros de una función holomorfa. Principio de identidad (o principio de los ceros aislados o principio fundamental de la prolongación analítica). Funciones holomorfas con ceros prefijados.	87
3.5. Funciones armónicas y subarmónicas. Principios del máximo .	98
3.6. Comportamiento local de una función holomorfa	110
3.6.1. Teorema de la aplicación abierta	110
3.6.2. Teorema de la función inversa	112
3.6.3. Comportamiento local de una función holomorfa . . .	113
3.7. Teoremas de Bloch-Landau y pequeño de Picard	116
4. TEORÍA DE CAUCHY GLOBAL	123
4.1. Introducción	123
4.2. Índice (topológico-geométrico) de un punto con respecto a una curva cerrada	124
4.3. Conceptos básicos en teoría algebraica de ciclos y cadenas . .	130
4.4. Forma general del teorema de Cauchy y de la fórmula integral de Cauchy	133
4.5. Aplicación teórica de la Teoría de Cauchy	139
4.5.1. Homología y homotopía	139
4.6. Aplicaciones prácticas de la Teoría Global de Cauchy	140
4.6.1. Desarrollo en serie de Laurent	140
4.6.2. Clasificación de las singularidades en un punto	148
4.6.3. El teorema de los residuos y aplicaciones del cálculo con residuos	152
5. TEORÍA GEOMÉTRICA DE FUNCIONES	181
5.1. Introducción histórica	181
5.2. Preliminares	182
5.3. Interpretación geométrica de la derivada: aplicaciones conformes	184
5.4. Lema de Schwarz y automorfismos conformes del disco unidad	189
5.5. Isomorfismos conformes dentro de discos y semiplanos: transformaciones de Möbius	192
5.5.1. Definición	192
5.5.2. Subgrupos del grupo lineal de Möbius	197
5.5.3. Aplicación al Análisis Complejo	199
5.6. Convergencia uniforme sobre compactos. Compacidad en espacios de funciones analíticas. Primer teorema de Montel . . .	208

5.6.1.	La topología de la convergencia uniforme sobre compactos	208
5.6.2.	La distancia de Fréchet	210
5.6.3.	Subconjuntos relativamente compactos de $\mathcal{C}(\Omega)$ y de $\mathcal{H}(\Omega)$	214
5.7.	Teorema de Riemann. Caracterizaciones de los abiertos simplemente conexos del plano	219