Teoría Axiomática de Conjuntos de Gödel, Bernays y Von Neumann

Cipri Santiago Zaragoza
Departamento de Matemáticas

7 de septiembre de 2017

Resumen

Breve exposición de los axiomas de la teoría de clases y conjuntos de Gödel, Bernays y Von Neumann, así como de su relación con la de Zermelo y Fraenkel.

1. Introducción

¿Qué es un sistema axiomático? Una contestación muy resumida la encontramos en el libro "Axiomatic Projective Geometry" de A. Heyting, North-Holland, Amsterdam, 1960: "si nos preguntan lo que es un axioma en Matemáticas, quizás la mejor respuesta es: un punto de partida para las deducciones".

Los componentes característicos de una teoría axiomática son los siguientes:

1. Se da una lista completa de las nociones fundamentales de la teoría.
2. Cualquier otra noción se reduce a las nociones fundamentales mediante definición explícita. Estas definiciones han de ser de tal naturaleza que en todas partes, excepto en la propia definición, el definiens [la noción que se está definiendo] pueda ser sustituido por el definiendum [el texto que la define]. Consecuentemente, podríamos, en principio, pasar sin las nociones definidas.
3. Se da una lista completa de teoremas fundamentales (llamados axiomas).
4. Cualquier otro teorema se deduce de los axiomas mediante razonamiento lógico.

En una primera aproximación un cojunto es una colección de objetos. Así que un conjunto se forma seleccionando ciertos objetos llamados elementos del conjunto, y el conjunto está totalmente determinado por sus elementos. Los elementos pueden ser objetos de cualquier tipo. En particular un conjunto puede ser elemento de otro conjunto. Normalmente se escribe un conjunto por una propiedad $A(x)$: los elementos del conjunto S son precisamente los que verifican la propiedad $A(x)$. Se suele notar $S = \{x : A(x)\}$. ¿Existe alguna restricción sobre las propiedades $A(x)$ que definen un conjunto? Recordemos la paradoja de Bertrand Russell: sea $S = \{x : x \text{ no es un elemento de } x\}$. Entonces, si S es un elemento de S, es porque S no es un elemento de S y viceversa. Contradicción.

La explicación de la anterior paradoja no es difícil: cuando estamos definiendo un conjunto S describiendo sus elementos, el objeto S aún no existe y por tanto no puede ser usado como elemento de S. El mismo tipo de razonamiento muestra que existen otros conjuntos que tampoco pueden ser elementos de S. Por ejemplo, si x es un elemento de S, no podemos definir S mientras no esté definido x y por ello S no puede ser un elemento de x. Llegamos a conclusión de que los conjuntos se definen en etapas. Para cada etapa existen etapas previas[1]. En cada etapa definimos los conjuntos formados por elementos de las etapas anteriores.

Las teorías axiomáticas de conjuntos formalizan estas ideas intuitivas. El primer conjunto de axiomas fué enunciado por E. Zermelo en 1908 y posteriormente desarrollado por A. Fraenkel. Por ello se le conoce como Teoría de Conjuntos de Zermelo-Fraenkel. Es quizá la más natural de las teorías de conjuntos y puede verse por ejemplo en [1], [3], [7] u [8], así como en estas mismas notas. En ella existe un sólo tipo de conjuntos, pero tiene infinitos axiomas (aunque construidos mediante un algoritmo bien definido). El objeto de esta nota es enunciar los axiomas de otra teoría desarrollada por Von Neumann, Bernays y Gödel y conocida como Teoría de Conjuntos de Gödel-Bernays-Von Neumann. Tiene el inconveniente de que hay dos clases de conjuntos: los "pequeños" o conjuntos propiamente dichos y los "grandes" o clases, pero la ventaja de que tiene solo un número finito de axiomas. Para un desarrollo más completo de esta teoría, véase [3].

Existen modificaciones de las teorías anteriores diseñadas para solucionar problemas que se presentan en campos concretos de las matemáticas. Por ejemplo, en [6] se esboza una teoría con una escala infinita de tipos de "conjuntos": conjuntos, clases, conglomerados, carteles,... adecuada para hablar de la (quasi)categoría de categorías y nociones afines. Para el mismo fin se desarrollan los universos de Grothendieck y la variante "todo en un universo", de Isbell-MacLane.

2. El lenguaje formal

Para formalizar la teoría de conjuntos se usarán predicados construidos con conectivos lógicos, cuantificadores y conceptos primitivos.

2.1. Símbolos lógicos

Usaremos los conectivos lógicos siguientes:

[1] Previas en sentido lógico no temporal.

- $=$ que es una relación binaria de igualdad.
- $\Rightarrow$ que es una relación binaria que leemos "implica".
- $\sim$ que es una relación unaria llamada negación lógica.
- $\vee$ que es una relación binaria llamada disjunción lógica.
- $\wedge$ que es una relación binaria llamada conjunción lógica.
- $\Leftrightarrow$ que es una relación binaria que leemos "equivale" o "si y solo si".

De hecho se pueden definir los cuatro últimos a partir solo de la implicación y un predicado falso (ver [1], por ejemplo).

Los cuantificadores son los usuales:

- $\forall$ el cuantificador universal que afecta a una variable y se lee "para todo".
- $\exists$ el cuantificador existencial que también afecta a una variable y se lee "existe un".
- $\exists_1$ el cuantificador existencial especial, que se puede definir en términos de los anteriores y que se lee "existe un único".

2.2. Conceptos primitivos

Este sistema tiene los siguientes conceptos primitivos:

- Variables de clases: $X, Y, ..., x, y, ...$
- Una relación binaria $x \in Y$ que interpretaremos como "x es un elemento de Y" o bien "x pertenece a Y". Su negación la escribimos como $x \notin Y$.
- Una relación unaria $\mathcal{M}(x)$ que leemos "x es un conjunto".

Los símbolos lógicos y los conceptos primitivos se combinan de la manera usual para formar predicados. Exposiciones rigurosas del cálculo de predicados pueden verse en las referencias [1] , [7] y [8] .

En la Teoría de Gödel-Bernays-Von Neumann es costumbre usar dos tipos de variables: letras mayúsculas denotan variables de clases y letras minúsculas designan variables de conjuntos.

3. Axiomas para conjuntos

Axioma I.

$$Y \in X \Rightarrow Y \text{ es un conjunto } (\mathcal{M}(Y))$$

En palabras: solo los conjuntos pueden ser elementos de otras clases.

Axioma II (de extensión).

$$X = Y \Leftrightarrow \forall u \, (u \in X \Leftrightarrow u \in Y)$$

Este axioma nos dice que dos clases son iguales si, y solo si, tienen los mismos elementos. En otras palabras, que una clase está determinada por sus elementos.

Definición 1.

$$X \subseteq Y \Leftrightarrow \forall z \left(z \in X \Rightarrow z \in Y \right); \qquad X \subset Y \Leftrightarrow X \subseteq Y \quad \wedge \quad X \neq Y$$

En palabras, $X \subseteq Y$ significa que X está contenido en Y.

Axioma III (existencia de conjunto vacío).

$$\exists x \forall y \left(y \notin x \right)$$

El conjunto definido por este axioma es el conjunto vacío y se denota por $\emptyset$.

Axioma IV (de formación de pares (no ordenados)).

$$\forall x \forall y \exists z \forall w \left(w \in z \Leftrightarrow w = z \quad \vee \quad w = y \right)$$

Denotamos al conjunto z como $\{x, y\}$ .Así que $\{x\}$ es $\{x, x\}$. Definimos $\langle x, y \rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}$. El conjunto $\langle x, y \rangle$ se llama par ordenado de x e y. Se demuestra fácilmente que $\langle x, y \rangle = \langle u, v \rangle$ implica que $x = u$ e $y = v$. No hay nada especial en la forma de definir $\langle x, y \rangle$. Es solo una manera conveniente de reducir la idea de para ordenado a la de par no ordenado. Inductivamente definimos $\langle x_1, ..., x_n \rangle = \langle x_1, \langle x_2, ..., x_n \rangle \rangle$.

Definición 2. Una función es una clase F de pares ordenados tales que $\langle x, y \rangle \in F$ y $\langle x, z \rangle \in F$ implican que $y = z$. La clase de los x tales que $\langle x, z \rangle \in F$ se llama dominio de F. La clase de los y tales que $\langle x, z \rangle \in F$ se llama rango de F. Decimos que F aplica en un conjunto u si el rango de F está contenido en u.

Axioma V (de la unión).

$$\forall x \exists y \forall z \left(z \in y \Leftrightarrow \exists w \left(z \in w \quad \wedge \quad w \in x \right) \right)$$

Este axioma dice que y es la unión de todos los conjuntos en x. Combinándolo con el axioma IV podemos deducir que dados x e y, existe un z tal que $t \in z \Leftrightarrow t \in x \vee t \in y$. Este z se llama la unión de x e y, y se representa por $x \cup y$.

Axioma VI (del infinito).

$$\exists x \left(\emptyset \in x \wedge \forall y \left(y \in x \Rightarrow y \cup \{y\} \in x \right) \right)$$

Si y es un natural, podemos definir el sucesor como $y \cup \{y\}$. El axioma del infinito asegura entonces la existencia de un conjunto que contiene a todos los naturales y por tanto es infinito.

Axioma VII (de las partes).

$$\forall x \exists y \forall z \left(z \in y \Leftrightarrow z \subseteq x \right)$$

En palabras. Para cada conjunto x existe el conjunto y de todos los subconjuntos de x. Cuando se define el cardinal de un conjunto, el cardinal de y es estrictamente mayor que el de x, así que este axioma nos permite construir cardinales de orden superior.

Axioma VIII (de sustitución).

$$\forall X\left(\left(\forall u\exists_1 v:\langle u,v\rangle\in X\right)\Rightarrow\forall u\exists v\left(\forall t\left(t\in v\Leftrightarrow\exists w\left(w\in u\wedge\langle w,t\rangle\in X\right)\right)\right)\right)$$

La última parte de la expresión (a partir de $\forall t$) nos dice que v es el rango de la función definida por X sobre u. El axioma de sustitución dice que si $y=\Phi\left(x\right)$ es una función definida por alguna "propiedad", existe el rango de Φ en cualquier conjunto u, es decir, el conjunto formado por todos los elementos de u que verifican dicha propiedad.

4. Axiomas para la formación de clases

El concepto intuitivo de clase es que una clase es la "colección" de todos los conjuntos x que satisfacen una propiedad $A\left(x\right)$. La notación normal para tal clase será $X=\left\{x:A\left(x\right)\right\}$. Por ejemplo, una propiedad trivial como $x\notin x$ determina la clase universal. El axioma de sustitución asegura la existencia de clases definidas por funciones. Pero necesitamos axiomas adicionales que permitan demostrar que cualquier propiedad bien enunciada define una clase. Ya que todo predicado está construido por un número finito de los procesos elementales tales como conjunciones, añadir, cuantificadores, etc., sólo nos hace falta un número finito de axiomas. En [3] se demuestra que bastan los siguientes:

Axioma IX.

$$\exists X\forall a\left(a\in X\Leftrightarrow\exists b\exists c\left(a=\langle b,c\rangle\wedge b\in c\right)\right)$$

Este axioma afima la existencia de la clase formada por todos los pares de conjuntos $\langle b,c\rangle$ tales que b es un elemento de c.

Axioma X (de la intersección).

$$\forall X\forall Y\exists Z\forall u\left(u\in Z\Leftrightarrow u\in X\wedge u\in Y\right)$$

La clase Z se llama intersección de X e Y y se representa por $X\cap Y$.

Axioma XI (del complemento).

$$\forall X\exists Y\forall u\left(u\in Y\Leftrightarrow u\notin X\right)$$

En palabras: Para toda clase X existe la clase complementaria Y formada precisamente por aquellos conjuntos que no son elementos de X.

Axioma XII.

$$\forall X\exists Y\forall u\left(u\in Y\Leftrightarrow\exists v\left(\langle v,u\rangle\in X\right)\right)$$

Axioma XIII.

$$\forall X \exists Y \forall u \, (u \in Y \Leftrightarrow \exists r \exists s \, (u = \langle r, s\rangle \wedge s \in X))$$

Axioma XIV.

$$\forall X \exists Y \forall a \, (a \in Y \Leftrightarrow \exists b \exists c \, (\langle b, c\rangle = a \wedge \langle c, b\rangle \in X))$$

En particular de los dos axiomas anteriores se deduce la existencia del producto cartesiano de dos clases.

Axioma XV.

$$\forall X \exists Y \forall u \, (u \in Y \Leftrightarrow \exists a \exists b \exists c \, (\langle a, b, c\rangle \in X \wedge \langle b, c, a\rangle = u))$$

Axioma XVI.

$$\forall X \exists Y \forall u \, (u \in Y \Leftrightarrow \exists a \exists b \exists c \, (\langle a, b, c\rangle \in X \wedge \langle a, c, b\rangle = u))$$

Axioma XVII (de elección).

$$\exists X \forall a \, (a \neq \emptyset \Rightarrow \exists_1 u \, (u \in a \wedge \langle a, u\rangle \in X))$$

Esta es una versión fuerte del axioma de elección, que asegura la existencia de una clase que tiene un elemento de cada conjunto. Una versión tan fuerte no puede demostrarse en la teoría de Zermelo-Fraenkel.

Axioma XVIII (de regularidad).

$$\forall X \, (X \neq \emptyset \Rightarrow \exists u \, (u \in X \wedge \forall y \, (y \in X \Rightarrow y \notin u)))$$

Este axioma es algo artificial y se incluye fundamentalmente por razones técnicas. En las matemáticas convencionales no se usa nunca. Dice que cada clase no vacía X contiene un elemento que es mínimo respecto a la relación $\in$. Intuitivamente, queremos que todos nuestros conjuntos se construyan a partir de $\emptyset$, y no queremos tener cadenas descendentes infinitas respecto a $\in$, sino mas bien que todas las cadenas descendentes acaben en $\emptyset$. En las matemáticas convencionales tratamos sólo con enteros, reales, complejos, funciones, etc. construidos explícitamente a partir de $\emptyset$.

El axioma de regularidad prohibe explícitamente que $x \in x$, porque en este caso x no tendría elemento mínimo respecto a $\dot{\in}$. Se suele decir que $\in$ es una relación "bien fundada" o que todos los conjuntos son "bien fundados".

5. Relación con la teoría de Zermelo - Fraenkel

En esta sección simplemente se enuncian resultados establecidos y demostrados en [3]. En primer lugar tenemos

Teorema 1 *Toda propiedad determina una clase.*

Naturalmente hay que aclarar qué es una propiedad. Sencillamente es cualquier predicado bien construido (ver $[1]$, $[3]$). El teorema anterior establece que para cualquier predicado bien construido $A(x)$ existe una clase cuyos elementos son exactamente los conjuntos x para los que $A(x)$ es verdad.

Llamamos ZF al sistema de axiomas de Zermelo-Fraenkel, y GBN al de Gödel-Bernays-Von Neumann.

Teorema 2 *Todo teorema ZF es un teorema GBN.*

Teorema 3 *Todo teorema GBN que hable solo de conjuntos es un teorema ZF.*

Definición 4 *Un sistema formal se llama consistente si no existe un teorema falso. En otras palabras no se puede demostrar el enunciado falso F.*

Definición 5 *Dos sistemas formales son equiconsistentes si la consistencia de uno equivale a la consistencia del otro.*

Corolario 6 *ZF y GBN son equiconsistentes*

Hemos considerado solo los axiomas básicos de la teoría. Existen axiomas superiores (e independientes) de los enunciados, como la existencia de cardinales inaccesibles, hipótesis del continuo, etc. que se estudian en las referencias citadas a continuación. Se pueden desarrollar diversas teorías de conjuntos aceptando dichos axiomas, negándolos o no considerándolos. La situación es análoga a la de la Geometría Euclídea y la No Euclídea: no existe contradicción entre ambas.

Referencias

[1] Barnes, D.W. & Mack, J.M., Una introducción algebraica a la lógica matemática, EUNIBAR.
[2] Barwise, J., Handbook of Mathematical Logic, North-Holland.
[3] Cohen, P.J., Set Theory and the Continuum Hypothesis, Benjamin.
[4] Cohn, P.M., Universal Algebra, Harper & Row.
[5] Halmos, P.R., Naive Set Theory, Van Nostrand.
[6] Herrlich, R. & Streacker, G.E., Category Theory, Allyn and Bacon.
[7] Mendelson, E., Introduction to Mathematical Logic, Van Nostrand.
[8] Monk, J.D., Mathematical Logic, Springer-Verlag.