Teorías Axiomáticas de Clases y Conjuntos

Cipri Santiago Zaragoza
Departamento de Matemáticas

13 de octubre de 2017

Resumen

Se expondrán la teoría axiomática de conjuntos de Zermelo, Fraenkel y Skolem junto con el axioma de elección, que es la más usada hoy en día, y la teoría axiomática de clases y conjuntos de Von Neumann, Bernays y Gödel, y la relación entre ambas. Como complemento se estudian otras teorías axiomáticas de conjuntos y, de clases y conjuntos. Por último se introducen algunos axiomas adicionales, que "completan" la teoría de Zermelo, Fraenkel y Skolem.

1. Introducción

La teoría de conjuntos surgió a raíz de los trabajos de Georg Cantor (1845-1918) en Análisis. En 1874 publicó un artículo en el Crelle's Journal (*Journal für die reine und angewandte Mathematik*) que marca el nacimiento de la teoría de conjuntos. En dicho artículo, da la siguiente definición "intuitiva" de conjunto:

> "Se entiende por conjunto la agrupación en un todo de objetos bien diferenciados de nuestra percepción o de nuestro pensamiento"

Un segundo artículo fue presentado por Cantor en el Crelle's Journal en 1878, pero la teoría de conjuntos ya estaba en el centro de la controversia matemática. En este estudio, Cantor también descubrió que no todos los subconjuntos del conjunto de los números reales tienen el mismo "tamaño", e introdujo la jerarquía (infinita) de los cardinales transfinitos. Con el fin de clasificar los conjuntos infinitos, empezó a estudiar la noción de conjunto en sí misma. En particular, en 1878 enunció la hipótesis del continuo (Si χ_0 es el cardinal de $\mathbb{N}$ y, $c = card(\mathbb{R})$, la hipótesis del continuo afirma que $c = \chi_1$). La respuesta a dicha hipótesis fue dada en dos partes: por una parte Kurt Gödel (1906–1978) demostró que si la axiomática de la teoría de conjuntos de Zermelo-Faenkel-Skolem con el axioma de elección (ZFSC; nomenclatura no universal) es consistente, también lo es con la hipótesis del continuo, y por otra, Paul Cohen (1934–2007, medalla Fields 1966) en 1963, demostró que si ZFSC es consistente, también lo es con negación de la hipótesis del continuo.

Rápidamente, Cantor y sus sucesores entendieron que la noción de conjunto era tan general que permitía reconstruir todos los objetos matemáticos conocidos como conjuntos puros. En 1872, Richard Dedekind (1831–1916) ya había dado un paso notable, mostrando cómo construir los números reales como conjuntos particulares de números racionales: las cortaduras de Dedekind. La teoría de conjuntos permitía de esta forma realizar un antiguo sueño de los matemáticos: unificar todas las ramas de la matemática en una teoría única. Sin embargo, la teoría de conjuntos naciente todavía contenía paradojas (en particular: la paradoja de Buralli-Forti, 1897), que se trató de eliminar mediante una axiomatización adecuada.

La primera axiomatización de la teoría de conjuntos (un sistema de axiomas a partir de los cuales podrían demostrarse rigurosamente todos los resultados básicos aceptados por los matemáticos y, a partir de ellos, todos los teoremas matemáticos) fue propuesta en 1903 por Gottlob Frege (1848–1925) -el fundador de la lógica moderna, a quién se debe el cálculo de predicados. Desgraciadamente, esta primera axiomatización era inconsistente, como mostró Bertrand Russell (1872–1970).

El mismo Russell, junto con A. N. Whitehead, presentó un tiempo después otra teoría axiomática que, al menos en apariencia, estaba exenta de contradicciones, si bien era tan inútil como la de Frege, esta vez no por contradictoria sino por complicada. Dicha axiomática se expone en sus "*Principia Mathematica*".

Como indica el profesor C. Ivorra, la primera teoría axiomática construida por un matemático a gusto de los matemáticos fue la propuesta por Ernst Zermelo (1871–1953) en 1908 -a quién se debe el axioma de elección- y completada en 1922 por Abraham Fraenkel (1891–1965) y posteriormente por Thoralf Skolem (1887–1963) en 1923 -que introdujeron independientemente el esquema de reemplazo. Así nació la moderna teoría de conjuntos: Teoría de Conjuntos de Zermelo-Fraenkel-Skolem (notación no universal: ZFS). Dicha teoría no solo elimina la paradoja de Russell, sino también todas las que surgieron con las axiomáticas de Cantor y de Frege.

A día de hoy, no se sabe si la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel-Skolem es consistente o no usando dicha teoría -y no se puede demostrar que es consistente en razón de los límites impuestos por el segundo teorema de incompletitud de Gödel (1931)-, pero en sus años de existencia, no se ha encontrado ninguna contradicción en dicha teoría.

El punto de partida de la teoría de conjuntos moderna consiste en admitir que no podemos dar ninguna definición operativa de "conjunto". El paso siguiente es darse cuenta de que no necesitamos hacerlo.

A continuación, se introducen varias teorías axiomáticas de conjuntos y, de clases y conjuntos. La de Zermelo-Fraenkel-Skolem con el axioma de elección es la más usada hoy día. La justificación para dicha elección es que dicha axiomática es la más apropiada para un primer contacto con la Teoría de Conjuntos y lo más importante es que los números reales, sus operaciones aritméticas y sus demostraciones pueden ser expresadas a partir de ella. Pero no solo el sistema de los números reales encuentra sustento en la Axiomática de ZFSC, la mayor parte de las matemáticas contemporáneas (posiblemente la única excepción es la Teoría de Categorías) puede desarrollarse dentro de la Teoría de Conjuntos así axiomatizada. Por ejemplo, los objetos fundamentales de Topología, Álgebra o Análisis (espacios topológicos, espacios vectoriales, grupos, anillos, espacios de Banach...) son apropiadamente definidos como conjuntos de una clase específica. Propiedades topológicas, algebraicas o analíticas de estos objetos son entonces derivadas a partir de las propiedades de conjuntos, las cuales se pueden obtener usando los axiomas ZFSC. En este sentido, la Teoría de Conjuntos así axiomatizada sirve como una fundamentación satisfactoria para otras ramas de la matemática [Fernando Hernández Hernández "*Teoría de Conjuntos*". Sociedad Matemática Mexicana, 2003 Sexagésimo Aniversario].

Las teorías que se exponen en este artículo son las siguientes:
- Teorías axiomáticas de conjuntos
    * Zermelo
    * Zermelo-Fraenkel
    * Zermelo-Fraenkel-Skolem
- Teorías axiomáticas de clases y conjuntos
    * Von Neumann-Bernays-Gödel
    * Predicativa de clases y conjuntos
    * Impredicativa de clases y conjuntos
    * Morse-Kelley

Para finalizar, se introducen algunos axiomas adicionales, así como su cadena de implicaciones.

Sin embargo, la teoría de conjuntos no es el único marco unificador posible para la Matemática, ya que esta se puede basar también en la teoría de tipos (Russell 1910, Martin-Löf 1984), cuyos objetos fundamentales son las funciones.

2. Axiomáticas de la Teoría de Conjuntos

2.1. Teoría axiomática de Zermelo

Axioma I: (de extensión)
Si dos conjuntos tienen los mismos elementos, entonces son iguales.

Axioma II: (esquema de separación o de especificación)
Existe el conjunto cuyos elementos son los elementos de un conjunto que cumplen una determinada propiedad.

Axioma III: (del par)

Si a y b son conjuntos, entonces existe un conjunto cuyos únicos elementos son a y b.

Axioma IV: (de amalgamación o de la gran unión)

Si a es un conjunto, existe el conjunto cuyos elementos son los elementos de los elementos de a.

Axioma V: (del conjunto de las partes o del conjunto potencia)

Si a es un conjunto, existe el conjunto cuyos elementos son los subconjuntos de a.

Axioma VI: (del infinito)

Existe un conjunto infinito

2.2. Teoría axiomática de Zermelo-Fraenkel

Axioma I: (de extensión)

Si A y B son conjuntos tales que $(\forall x)\,(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$, entonces $A = B$.

Axioma II: (del conjunto vacío)

Existe un conjunto, que denominaremos conjunto vacío (cuya unicidad resulta del axioma anterior) tal que carece de elementos; es decir, $(\exists A)\,(\forall x)\,(x \notin A)$. Dicho conjunto se denota por el símbolo $\emptyset$.

Axioma III: (de la unión)

Si A es un conjunto entonces existe un conjunto B tal que $(\forall A)\,(\exists b)\,(\forall x)$ $(x \in B \Leftrightarrow (\exists y)\,(y \in A \wedge x \in y))$.

Axioma IV: (del conjunto de partes)

Para cada conjunto A existe un conjunto, que notaremos $P\,(A)$ y denominaremos conjunto de partes de A, verificando: x es un elemento de $P\,(A)$ si, y sólo si, es un subconjunto de A.

Axioma V: (de regularidad)

Si A es un conjunto no vacío, entonces existe un elemento x del conjunto A tal que $A \cap x = \emptyset$.

Axioma VI: (de reemplazamiento para una función proposicional)

Si $F\,(x, y)$ es una función proposicional tal que para cada x existe un único y verificando $F\,(x, y)$, entonces para cada conjunto A existe un conjunto B tal que x pertenece a B si, y sólo si, existe $y \in A$ verificando $F\,(y, x)$.

Axioma VII: (del infinito)

Existe un conjunto A que verifica: $(\emptyset \in A \wedge (\forall x)\,(x \in A \Rightarrow x \cup \{x\} \in A))$

Axioma VIII: (de la elección)

Para cada conjunto A existe, al menos, una aplicación $\varphi : P(A) - \{\emptyset\} \to A$ tal que para cada $B \in P(A) - \{\emptyset\}$ se verifica $\varphi(B) \in B$.

ZF denota los axiomas 1 a 7.
ZFC denota ZF + Axioma de Elección

2.3. Teoría axiomática de Zermelo-Fraenkel-Skolem

Axioma I: (de existencia)

Hay un conjunto que no tiene elementos.

Axioma II: (de extensión)

Si dos conjuntos tienen los mismos elementos, entonces son iguales.

Axioma III: (esquema de comprensión)

Sea P una fórmula. Para cualquier conjunto a hay un conjunto b tal que $x \in b$ si, y solo si, $x \in a$ y x verifica la fórmula P.

Axioma IV: (del par)

Para cualesquiera conjuntos a y b hay un conjunto c tal que $x \in C$ si, y solo si, $x \in a$ o $x \in b$.

Axioma V: (de unión)

Para cualquier conjunto a, existe un conjunto b tal que $x \in b$ si, y solo si, $x \in c$ para algún $c \in a$.

Axioma VI: (del conjunto de las partes o del conjunto potencia)

Si a es un conjunto, existe el conjunto cuyos elementos son los subconjuntos de a.

Axioma VII: (de fundación)

En cada conjunto no vacío a existe $A \in a$ tal que A y a son ajenos.

Axioma VIII: (del infinito)

Existe un conjunto infinito.

$$(\exists a)\left(\emptyset \in a \wedge \forall x\left(x \in a \Rightarrow x \cup \{x\} \in a\right)\right)$$

Definición:

Una fórmula $\varphi(x, y, u_1, ..., u_n)$ es funcional en las variables x e y si las tiene libres y se puede demostrar

$$(\forall u_1, ..., u_n)(\forall x, y, z)\left(\varphi(x, y, u_1, ..., u_n) \wedge \varphi(x, z, u_1, ..., u_n) \Rightarrow y = z\right)$$

Axioma IX: (esquema de substitución o de reemplazamiento)

Si φ es una fórmula funcional en x e y, entonces

$$(\forall u_1, ..., u_n)\,(\forall a)\,(\exists b)\,(\forall y)\,(y \in b \Leftrightarrow \exists x\,(x \in a \wedge \varphi\,(x, y, u_1, ..., u_n)))$$

Axioma X: (de elección)
Todo conjunto no vacío tiene una función de elección.

ZFS denota los axiomas 1 a 9.
ZFSC denota ZFS + Axioma de Elección

2.4. Axiomáticas de la Teoría de Clases y Conjuntos

La primera teoría axiomática de clases y conjuntos que presentaremos ahora es debida a Von Neumann (1925), Bernays (1937) y Gödel (1938), en la cual los conceptos primitivos son los de "clase" y "pertenencia", mientras que el concepto de "conjunto" es definido a partir de éstos, de tal manera que los "conjuntos" de la teoría Von Neumann-Bernays-Gödel (NBG) corresponden en la teoría Zermelo-Fraenkel (ZF) a las colecciones de objetos matemáticos caracterizados por una propiedad "colectivizante". Más aún, la teoría axiomática NBG asocia a cada propiedad o predicado universal una "colección" (una clase en la teoría NBG).

Como no vamos a entrar en detalles, señalamos simplemente que las teorías NBG y ZF coinciden sobre los conjuntos, es decir, que todo teorema de la teoría ZF es un teorema de la teoría NBG y recíprocamente, todo teorema de la teoría NBG en el que intervengan únicamente conjuntos es un teorema de la teoría ZF.

2.5. Axiomática de Von Neumann, Bernays y Gödel

Definición: Una clase x diremos que es un conjunto sii existe una clase y tal que $x \in y$.

Dicho con otras palabras, por definición un conjunto es una clase que pertenece a alguna clase; si una clase no es un conjunto entonces diremos que es una clase propia.

Axioma I: (de clasificación)
Un objeto matemático a pertenece a la clase $\{x : F\,(x)\}$ si, y sólo si, la proposición $F\,(a)$ es verdadera y, además, a es un conjunto.

Definición: Diremos que la clase a es una subclase o una parte de la clase b, y lo notaremos $a \subset b$ o también $b \supset a$, si, y sólo si, $(\forall x)\,(x \in a \Rightarrow x \in b)$.

Axioma II: (de extensión)
Dos clases a y b son iguales si, y sólo si, $(a \subset b) \wedge (b \subset a)$.

Axioma III: (del conjunto de partes)

Si a es un conjunto, entonces existe un conjunto, que notaremos $P(a)$ y denominaremos conjunto de partes de a, que verifica la siguiente condición: una clase x es subclase de a si, y sólo si, $x \in P(a)$.

Definición: Si a y b son clases, definimos la clase unión de a y b, que notaremos $a \cup b$, por:

$$a \cup b = \{x : (x \in a) \vee (x \in b)\}.$$

Axioma IV: (de la unión)

Si las clases a y b son conjuntos entonces la clase $a \cup b$ es un conjunto.

Definición: Si a y b son clases, definimos la clase intersección de a y b, que notaremos $a \cap b$, por:

$$a \cap b = \{x : (x \in a) \wedge (x \in b)\}.$$

Definición: Definimos la clase vacía, que notaremos por $\emptyset$, a la clase

$$\emptyset = \{x : x \neq x\}.$$

Axioma V: (de regularidad)

Si a es una clase no vacía, entonces existe un elemento x de la clase a tal que $a \cap x = \emptyset$.

Definición: Si a y b son clases, definimos la clase diferencia de a y b, que notaremos $a - b$, por:

$$a - b = \{x : (x \in a) \wedge (x \notin b)\}.$$

Axioma VI: (de la elección)

Para cada conjunto A existe, al menos, una aplicación $\varphi : P(A) - \{\emptyset\} \to A$ tal que para cada $B \in P(A) - \{\emptyset\}$ se verifica $\varphi(B) \in B$.

Definición: Sea a una clase. Definimos la clase unión de los elementos de a, que notaremos $\cup a$, a la clase $\cup a = \{x : (\exists y)(y \in a \wedge x \in y)\}$.

Axioma VII: (de amalgamación)

Si A es un conjunto, entonces la clase $\cup A$ es un conjunto.

Definición: Si a y b son clases entonces definimos el par ordenado de primera componente a y segunda componente b, que notaremos (a, b), a la clase

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

Definición: Si a y b son clases entonces definimos la clase producto cartesiano de a y b, que notaremos $a \times b$, a la clase

$$a \times b = \{x : (\exists y)\,(\exists z)\,(y \in a \wedge z \in b \wedge x = (y, z))\}\,.$$

Definición: Una gráfica de la clase a en la clase b es una subclase de $a \times b$.

Definición: Si G es una gráfica de la clase a en la clase b, entonces definimos el dominio de la gráfica G, que notaremos $dom\,(G)$, y el recorrido de la gráfica G, que notaremos $rec\,(G)$, como las clases siguientes:

$$\begin{aligned} dom\,(G) &= \{x : (\exists y)\,((x, y) \in G)\} \\ rec\,(G) &= \{x : (\exists y)\,((y, x) \in G)\} \end{aligned}$$

Definición: Una gráfica G de la clase a en la clase b diremos que es funcional si, y sólo si, $(\forall x)\,(\forall y)\,(\forall z)\,\left((x, y) \in G \wedge (x, z) \in G \Rightarrow y = z\right).$

Axioma VIII: (de sustitución)
Si G es una gráfica funcional entre dos clases y $dom\,(G)$ es un conjunto, entonces $rec\,(A)$ es un conjunto.

Proposición: Si $(A, \leq)$ es una clase bien ordenada, entonces para cada elemento x de A, distinto del elemento máximo de A, si lo hubiere, existe un único $x^+ \in A$ tal que
i) $x < x^+$
ii) $(\forall y)\,(y \in A \wedge x < y \leq x^+ \Rightarrow y = x^+)\,.$

Axioma IX: (del infinito)
Existe un conjunto A_0 que verifica $(\emptyset \in A_0 \wedge (\forall x)\,(x \in A_0 \Rightarrow x^+ \in A_0))\,.$

2.6. Teoría predicativa de clases y conjuntos

Axioma I: (de extensión)
Si dos clases tienen los mismos elementos, entonces son iguales.

$$(\forall X)\,(X \in A \Leftrightarrow X \in B) \Rightarrow A = B$$

Axioma II: (del conjunto vacío)
Existe un conjunto que no tiene elementos.

$$(\exists a)\,(\forall x)\,(x \notin a)$$

Axioma III: (del par)

Si a y b son conjuntos, existe un conjunto cuyos elementos son a y b.

$$(\forall a, b)\,(\exists c)\,(\forall x)\,(x \in c \Leftrightarrow (x = a \vee x = b))$$

Axiomas IV: (de existencia de clases)

$$(\exists X)\,(\forall u, v)\,((u, v) \in X \Leftrightarrow u \in v)$$

$$(\forall X, Y)\,(\exists Z)\,(\forall u)\,(u \in Z \Leftrightarrow u \in X \wedge u \in Y)$$
$$(\forall X)\,(\exists Y)\,(\forall u)\,(u \in Y \Leftrightarrow u \notin X)$$
$$(\forall X)\,(\exists Y)\,(\forall u)\,(u \in Y \Leftrightarrow \exists v\,(\langle u, v\rangle \in X))$$
$$(\forall X)\,(\exists Y)\,(\forall u, v)\,(\langle u, v\rangle \in Y \Leftrightarrow u \in X)$$
$$(\forall X)\,(\exists Y)\,(\forall u, v, w)\,(\langle u, v, w\rangle \in Y \Leftrightarrow \langle v, w, u\rangle \in X)$$
$$(\forall X)\,(\exists Y)\,(\forall u, v, w)\,(\langle u, v, w\rangle \in Y \Leftrightarrow \langle u, w, v\rangle \in X)$$

Axioma V: (de amalgamación o de la gran unión)

Si a es un conjunto, existe el conjunto cuyos elementos son los elementos de los elementos de a.

$$(\forall a)\,(\exists b)\,(\forall x)\,(x \in b \Leftrightarrow \exists y\,(x \in y \wedge y \in a))$$

Axioma VI: (del conjunto de las partes o del conjunto potencia)

Si a es un conjunto, existe el conjunto cuyos elementos son los subconjuntos de a.

$$(\forall a)\,(\exists b)\,(\forall x)\,(x \in b \Leftrightarrow \forall y\,(y \in x \Rightarrow y \in a))$$

Axioma VII: (de subconjuntos)

La intersección de un conjunto y de una clase es un conjunto.

$$(\forall a \in A)\,(\mathcal{C}\,(a \cap A))$$

Axioma VIII: (de reemplazamiento)

Si F es una función y a es un conjunto, entonces $F\,[a]$ es un conjunto.

$$(\forall a \in F)\,(\mathcal{F}un\,(F) \Rightarrow \mathcal{C}\,(F\,[a]))$$

2.7. Teoría impredicativa de clases y conjuntos

Axioma I: (de extensión)
Si dos clases tienen los mismos elementos, entonces son iguales.

$$(\forall x)\,(x \in a \Leftrightarrow x \in b) \Rightarrow a = b$$

Axioma II: (de comprehensión)
Existe la clase de todos los conjuntos que verifican una determinada propiedad $\varphi\,(x, u_1, ..., u_n)$.
Si $\varphi\,(x, u_1, ..., u_n)$ es una fórmula con la variable x libre, entonces:

$$(\forall u_1, ..., u_n)\,(\exists a)\,(\forall x)\,(x \in a \Leftrightarrow (x \in \mathcal{U} \wedge \varphi\,(x, u_1, ..., u_n)))$$

Axioma III: (del conjunto vacío)
La clase vacía es un conjunto.

$$\emptyset \in \mathcal{U}. \quad \mathcal{C}\,(\emptyset)$$

Axioma IV: (de las partes o de la potencia)
Si a es un conjunto, su clase potencia es un conjunto.

$$a \in \mathcal{U} \Rightarrow \mathcal{P}\,(a) \in \mathcal{U}$$

Axioma V: (del par)
Si a y b son conjuntos, la clase $\{a, b\}$ es un conjunto.

$$(a, b \in \mathcal{U}) \Rightarrow (\{a, b\} \in \mathcal{U})$$

Axioma VI: (de amalgamación)
Si a es un conjunto, su gran unión $\cup a$ también lo es.

$$(a \in \mathcal{U} \Rightarrow \cup a \in \mathcal{U})$$

Axioma VII: (de reemplazamiento)
Si f es una función y a es un conjunto, entonces $f\,[a]$ es un conjunto.

$$\mathcal{F}un\,(f) \Rightarrow (a \in \mathcal{U} \Rightarrow f\,[a] \in \mathcal{U})$$

Axioma VIII: (del infinito)
ω es un conjunto.

$$\omega \in \mathcal{U}$$

Axioma IX: (de regularidad o de buen funcionamiento)

$$(\forall a)\,(a \neq \emptyset \Rightarrow \exists x\,(x \in a \wedge x \cap a = \emptyset))$$

Axioma X: (de elección)

Una función de elección sobre una clase a es una función $f : a \to \mathcal{U}$ tal que para todo $x \in a$, $x \neq \emptyset$ se cumple $f\,(x) \in x$.

Para cada conjunto a existe una función de elección sobre él.

Axioma XI: (Lema de Zorn)

Todo conjunto inductivo $(a, <)$ posee un elemento maximal.

Axioma XII: (Ley de tricotomía de Cantor)

Dados dos conjuntos a y b, se tiene que $a < b$ o $b < a$.

Axioma XIII: (Principio del buen orden o de Zermelo)

Para cada conjunto a existe una relación R que lo bien ordena.

Axioma XIV: (Hipótesis del continuo)

Dado un conjunto numerable, no existe conjunto más potente que él y menos potente que el conjunto de sus partes.

$$(\forall a)\,(a \simeq \omega \Rightarrow \nexists x\,(a \leftrightarrow x \leftrightarrow \mathcal{P}\,(a)))$$

Axioma XV: (Hipótesis generalizada del continuo)

Dado un conjunto infinito, no existe ningún conjunto más potente que él y menos potente que el conjunto de sus partes.

$$(\forall a)\,(Inf\,(a) \Rightarrow \nexists x\,(a \leftrightarrow x \leftrightarrow \mathcal{P}\,(a)))$$

3. Teoría de Morse-Kelley

Es similar a la de NBG, pero MK (Morse-Kelley) es más potente, y no son equivalentes.

Axioma I: (extensionalidad)

Dos clases son iguales si, y solo si, tienen los mismos elementos.

$$\forall XY,\; X = Y \longleftrightarrow \forall Z\,(Z \in X \leftrightarrow Z \in Y)$$

Axioma II: (del par)

Dados dos conjuntos, existe un tercero que los contiene solo a ambos.

$$\forall xy \exists z,\; \forall w\,(w \in z \leftrightarrow w = z \vee w = y)$$

Axioma III: (de la unión)

Dados dos conjuntos, existe un tercero que contine a los elementos de ambos.

$$\forall xy \exists z,\ \forall w \left(w \in z \leftrightarrow w \in z \vee w \in y\right)$$

Axioma IV: (del conjunto vacío)

Existe un conjunto sin elementos.

$$\exists x \forall y,\ y \notin x$$

Axioma V: (De reemplazo)

Dado un conjunto x y una clase unívoca A, existe el conjunto dado por la imagen de x por A.

$$\forall x A,\ UnA \rightarrow \exists y \forall u \left(u \in y \leftrightarrow \exists v \in x\ \ (v, u) \in A\right)$$

La principal diferencia entre MK y NBG es que en MK se adopta un esquema de formación de clases sin restringirse a fórmulas normales.

Axioma VI: (esquema de formación de clases)

Para toda fórmula $\varphi\left(x_i\right)$ donde Y no está libre,

$$\exists Y \forall x_i,\ x_i \in Y \leftrightarrow \varphi\left(x_i\right)$$

es un axioma de MK.

Axioma VII: (Del conjunto de partes)

Dado un conjunto, existe otro formado por la totalidad de los subconjuntos del primero.

$$\forall x \exists y,\ \forall z \left(z \in y \leftrightarrow z \subseteq x\right)$$

Axioma VIII: (del conjunto infinito)

Existe un conjunto que es biyectable con un subconjunto propio de sí mismo.

$$\exists x f,\ Fnf \wedge Df = x \wedge Rf \subset x \wedge f \text{ inyectiva}$$

Axioma IX: (de regularidad)

Toda clase no vacía contine una clase disjunta consigo misma.

$$\forall X \exists Y \in X \forall z,\ \neg\left(z \in X \wedge z \in Y\right)$$

Axioma X: (de elección)

Dado un conjunto, existe una función de elección sobre sus elementos no vacíos.

$$\forall x \exists f, Fnf \wedge Df = x \wedge \forall u \in x \, (u \neq \varnothing \rightarrow f\,(u) \in u)$$

Es obvio que todo teorema de NBG es un teorema de MK: la axiomatización de MK es prácticamente idéntica a la de NBG con esquema de formación de clases, pero con una versión más fuerte de éste último.

El inverso no es cierto. En teoría de modelos puede probarse que la consistencia de NBG es un teorema de MK, lo que suponiendo la consistencia de NBG no puede ser un teorema de NBG, por el segundo teorema de incompletitud de Gödel

4. Axiomas adicionales y axiomas de cardinales grandes

Axioma AI (Hipótesis del continuo; HC): $2^{\chi_0} = \varkappa_1$.

Axioma AII (Hipótesis generalizada del continuo; HGC): Para cualquier $\alpha \in Ord$, se tiene que $2^{\chi_\alpha} = \varkappa_{\alpha+1}$.

Axioma AIII (Axioma de Martin, AM): Si $(P, \leq)$ es un conjunto preordenado que satisface la c.c.c. y si $\mathcal{D}$ es una familia de menos que 2^{χ_0} subconjuntos densos de P, entonces existe un filtro $\mathcal{D}-$ genérico en P.

Axioma AIV (Hipótesis de Souslin, HS): No existen líneas de Souslin.

Las implicaciones entre estos axiomas están dadas en la siguiente cadena:

$$\text{HGC} \Rightarrow \text{ HC} \Rightarrow \text{ AM} \Rightarrow \text{ HS}$$

Por último, se enuncian los axiomas de cardinales grandes:

Axioma CGI (CI): Existen cardinales inaccesibles.

Axioma CGII (CFI): Existen cardinales fuertemente inaccesibles.

Axioma CGIII (CM): Existen cardinales medibles.

Axioma CGIV (CdC): Existen cardinales débilmente compactos.

Axioma CGV (CC): Existen cardinales compactos.

Axioma CGVI (CMa): Existen cardinales de Mahlo.

Las implicaciones que relacionan estos axiomas son:

$$\text{CC} \Rightarrow \ \text{CM} \Rightarrow \ \text{CdC} \Rightarrow \ \text{CMa} \Rightarrow \ \text{CFI} \Rightarrow \ \text{CI}$$

Se termina con una muestra del poder de estos axiomas: sabemos que la consistencia de ZFSC no puede demostrarse a partir de ZFSC (teorema de Gödel); sin embargo, sí puede ser demostrada a partir de ZFSC+CI.