PROBLEMAS

DE

SELECTIVIDAD

MATEMÁTICAS II

2.000-2.018

PAU:

Pruebas de Aptitud para el Acceso a la Universidad

PAEG:

Pruebas de Acceso a Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado

EvAU:

Evaluación para el Acceso a la Universidad

Junio de 2000

Primer bloque

A) El coste de producción de x unidades de un producto viene dado por la expresión $C = x^2 - 300x + 100$ ptas. Y el precio de venta de una unidad es $U = 1000 - x$ ptas. ¿Cuántas unidades se deben vender para que el beneficio sea máximo?

B) Hallar la distancia del punto $P(2,4,1)$ al plano

$$\alpha \equiv 3x + 4y + 12z - 8 = 0$$

y encontrar el punto del plano que da la mínima distancia a P.

Segundo bloque

A) Calcular $\int \frac{x+1}{x^3 + x^2 - 6x} dx$

B) Estudiar la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones lineales según los diferentes valores del parámetro a, y resolverlo cuando sea posible: $\begin{cases} x - y = 5 \\ y + z = a \\ x - 2z = 3 \\ 2x - 3z = a \end{cases}$

Tercer bloque

A) Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad x \le 0 \\ a + bx & si \quad 0 < x \le 1 \\ 3 & si \quad x > 1 \end{cases}$, determinar a y b de modo que sea continua.

Para los valores que se obtengan estudiar la derivabilidad.

B) Hallar el punto simétrico del punto $A(1,2,3)$ respecto de la recta $r \equiv \left\{ \begin{matrix} x - y + 1 = 0 \\ 2x - z - 1 = 0 \end{matrix} \right\}$.

Cuarto bloque

A) Calcular el área del recinto limitado por las curvas $y = x^2 - 1$, $y = 11 - x$, y el eje OX. Dibujar el recinto.

B) Resolver el sistema de ecuaciones matriciales $3X - 2Y = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 16 & 4 \end{pmatrix}$ y $X + 3Y = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ -2 & 27 \end{pmatrix}$.

Septiembre de 2000

Primer bloque

A) Hallar el área del recinto plano delimitado por la ecuación $y = x^2 - 2$ e $y = |x|$. Dibujar el recinto.

B) Dados los puntos $A(-2,-4,-3)$, $B(2,6,5)$ y la recta $r \equiv \left\{ \begin{matrix} x - y + z = 1 \\ 2x + y - 3z = 2 \end{matrix} \right\}$. Averiguar si existe alguna recta tal que contenga los puntos A y B y corte a la recta r. Razonar la respuesta.

Segundo bloque

A) Calcular $\lim_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{\operatorname{tg} x-\sin x}$

B) Hallar el punto simétrico del punto $A(2,-3,5)$ y respecto del plano $\alpha \equiv x-3y+4z+21=0$

Tercer bloque

A) Estudiar la continuidad y la derivabilidad de la siguiente función

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2-x} & si \quad x\le 1\\ -x^2+4x-2 & si \quad x>1\end{cases}$$

B) Hallar una matriz X que verifique la condición $A+BX=C$ siendo: $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ -1 & 6 & -2\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$

$$B=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix} \text{ y } C=\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 3\end{pmatrix}$$

Cuarto bloque

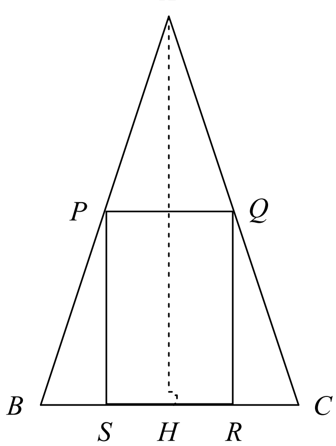
A) Calcular $\displaystyle\int \frac{3x}{x^2+2x+3}dx$

B) Estudiar la posición relativa de los planos $\alpha \equiv x+y=1$, $\beta \equiv ax+z=0$ y $\gamma \equiv x+y+z=2$ según los diferentes valores del parámetro a .

Otra propuesta 1 (de 2000)

Primer bloque

A) El triángulo BAC es isósceles en A . La base BC mide 12 cm y la altura AH mide 18 cm. Se quiere inscribir un rectángulo $PQRS$ de superficie máxima. Hallar las dimensiones de este rectángulo.



B) Determinar la ecuación de un plano que contenga al punto $P(1,-1,3)$ y sea paralelo al plano determinado por los puntos $A(1,1,2)$, $B(1,1,1)$ y $C(2,-2,1)$. Hallar la distancia entre los dos planos.

Segundo bloque

A) Estudiar la continuidad y la derivabilidad de la función

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{2x+1} & si \quad x\le -1 \\ x^2-2x-5 & si \quad -1<x\le 4 \\ 5 & si \quad x>4 \end{cases}$$

B) Las rectas $r\equiv\begin{cases} x+y-z=4 \\ x+2y=7 \end{cases}$ y $s\equiv\begin{cases} x=2 \\ y=-3 \end{cases}$ se cruzan. Hallar las ecuaciones de la perpendicular común.

Tercer bloque

A) Calcular el área de la región plana limitada por la curva $f(x)=|x^2-4x|$ y la recta $y=12$. Dibujar el recinto.

B) Estudiar la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones según los distintos valores del parámetro a y resolverlo cuando sea posible $\begin{cases} 2x-y+2z=1 \\ x+4y+z=1 \\ 2x-5y+az=-2 \end{cases}$.

Cuarto bloque

A) Calcular $\displaystyle\int \frac{x^4-3x^3-3x-2}{x^3-x^2-2x}dx$

B) Resolver la ecuación $ABX-CX=2A$, siendo

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Otra propuesta 2 (de 2000)

Primer bloque

A) Hallar los puntos en que la función $f(x)=|x^2-4x-5|$ no es derivable. Razonar la respuesta.

B) Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

resolver la ecuación matricial $AX-BCX=4A$.

Segundo bloque

A) Calcular $\int \frac{6x+10}{-x^3+x^2+x-1}dx$

B) Estudiar la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones lineales según los diferentes valores del parámetro a y resolverlo cuando sea posible $\begin{cases} ax+y+z=4 \\ x+ay+z=4 \\ x+3y+z=5 \end{cases}$.

Tercer bloque

A) Hallar el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x)=-2x^2+4x$ y las tangentes a dicha grafica en los puntos en que esta corta al eje de abscisas. Dibujar el recinto.

B) Hallar un punto A perteneciente a la recta $r \equiv \begin{cases} x-y+1=0 \\ 2x-z-1 \end{cases}$ que equidiste de los planos $\alpha \equiv x+y=1$ y $\beta \equiv x=z$.

Cuarto bloque

A) Calcular $\lim_{x\to 0}\left(\frac{5}{\log(1+x)}-\frac{5}{x}\right)$

B) Hallar el valor que debe tener b para que las rectas $r \equiv \begin{cases} x+y=b \\ x+z=-3 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x-y=3 \\ 2x-z=1 \end{cases}$ estén situadas en el mismo plano, y determinar la ecuación general de dicho plano.

Junio de 2001

Primer bloque

A) Dada la parábola $y=\frac{x^2}{4}$ y la recta $y=x$: a) Dibuja las gráficas de la parábola y de la recta; b) Señala el recinto plano comprendido entre las dos graficas anteriores; c) Calcula el área del recinto plano señalado

B) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

a) Halla paso a paso la inversa de la matriz A.
b) Calcula la matriz X que verifique la ecuación $AX=B$.

Segundo bloque

A) Resuelve $\int \frac{x^2-1}{x(x^2+1)}dx$

B) Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=\lambda \\ z=-\lambda \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x=\mu \\ y=2+2\mu \\ z=0 \end{cases}$

a) Estudia la posición relativa de las rectas r y s

b) Halla la ecuación de la recta que sea perpendicular simultáneamente a r y s

Tercer bloque

A) Dada la función $f(x)=\begin{cases} 2x+5 & si \quad x\le 1 \\ x^2+k & si \quad x>1 \end{cases}$ a) Determina k para que $f(x)$ sea continua en $x=1$; b) ¿Es la función $f(x)$ para el valor de k calculado derivable en $x=1$?

B) Determina las coordenadas del punto simétrico del $A(-2,1,6)$ respecto de la recta $r\equiv \frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+1}{2}$.

Cuarto bloque

A) Calcula $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\left(e^x-1\right)^2}$

B) Discute y resuelve, en los casos que sea posible, el siguiente sistema $\begin{cases} ax+y-z=1 \\ x+2y+z=2 \\ x+3y-z=0 \end{cases}$

Septiembre de 2001

Primer bloque

A) Halla las dimensiones de un depósito abierto superiormente, en forma de prisma recto de base cuadrada de 1000 metros cúbicos de capacidad que tenga un revestimiento interior de coste mínimo. El precio del m^2 de revestimiento lateral es 100 euros, el precio del m^2 de revestimiento de fondo es 200 euros. Halla también el coste mínimo.

B) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$:

1º) Halla la inversa de $A-BC$.
2º) Resuelve la ecuación matricial $AX-BCX=A$.

Segundo bloque

A) Dada la función $f(x)=\begin{cases} 2x+1 & \text{si} \quad x\le -2 \\ ax^2+bx & \text{si} \quad -2<x\le 4 \\ x-4 & \text{si} \quad x>4 \end{cases}$, determina a y b de modo que sea continua. Para los valores que se obtengan, estudia la derivabilidad.

B) Halla el valor de k para que las rectas $r\equiv\begin{cases} x+y=2 \\ y-z=3 \end{cases}$ y $s\equiv\begin{cases} y-3z=k \\ y-2z=2 \end{cases}$ se corten. Halla el punto de corte.

Tercer bloque

A) Enuncia la regla de L'Hôpital y calcula el siguiente limite $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4\left(x-\log(1+x)\right)}{x\log(1+x)}$

B) Clasifica el sistema $\begin{cases} x+2y+3z=2 \\ 2x+5y+4z=-1 \\ x+3y+m^2z=3m \end{cases}$ según los valores de m y resuelve cuando $m=-1$.

Cuarto bloque

A) Calcula $\int \frac{x+2}{x^3-4x^2+4x}dx$

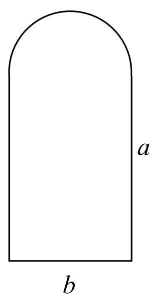
B) Halla λ para que el plano $\pi \equiv 2x+\lambda-z=1$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x+y=1 \\ 2x+y-z=2 \end{cases}$ sean paralelos.

Encuentra otro valor de λ para que sean perpendiculares

Otra propuesta 1 (de 2001)

Primer bloque

A) Se considera una ventana rectangular en la que el lado superior ha sido sustituido por una semicircunferencia. Sabiendo que el perímetro de la ventana es 6 m, halla las dimensiones a y b para que la superficie sea máxima.



B) Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \text{ y } C=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1º) Halla la inversa de $2A-BC$.

2º) Resuelve la ecuación matricial $2AX = BCX + A^2$.

Segundo bloque

A) Estudia la continuidad y la derivabilidad de la función

$$f(x)=\begin{cases} \frac{4}{x+2} & si \quad x\le 0 \\ x^2-x+2 & si \quad x>0 \end{cases}$$

B) Dada la recta $r \equiv \begin{cases} x+y+z=0 \\ x-2y-1=0 \end{cases}$ y el punto $A(-1,3,2)$:

a) Halla unas ecuaciones paramétricas de la recta s que pasa por A y es paralela a r

b) Calcula la distancia de s a r

Tercer bloque

A) Halla el polinomio $P(x)$ cuya derivada sea $6x^2-6x-36$ y que además $P(x)$ alcance un máximo y un mínimo relativos tales que el valor máximo del polinomio sea doble que el valor mínimo. Halla también esos valores máximo y mínimo

B) Clasifica según los valores del parámetro a y resuelve cuando sea posible $\begin{cases} x-2y=5 \\ y+z=a \\ 2x-4y=10 \\ x-3z=a+1 \end{cases}$.

Cuarto bloque

A) Dibuja el recinto delimitado por las curvas $y=-x^2+2x+3$ e $y=|x+1|$. Halla el área del recinto.

B) Dado el punto $A(1,1,0)$ y el plano $\pi \equiv 2x+y+z=1$ calcula: a) Las ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por A y es perpendicular a π; b) La ecuación del plano que pasa por A y es paralelo a π; c) El punto simétrico de A respecto a π.

Otra propuesta 2 (de 2001)

Primer bloque

A) Dada la función $y=xe^x$ y las rectas $x=1$ e $y=0$: a) Dibuja la gráfica de la función para $x>0$ y la de las rectas; b) Señala el recinto plano comprendido entre las tres graficas anteriores; c) Calcula el área del recinto plano señalado

B) Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x=2-3\lambda \\ y=3+5\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x=1-\mu \\ y=2\mu \\ z=5 \end{cases}$

a) Estudia la posición relativa de las rectas r y s; b) En el caso de que r y s se corten calcula las coordenadas del punto de corte.

Segundo bloque

A) Resuelve $\int \frac{x^2-x+1}{x^3+x}dx$

B) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Halla paso a paso la inversa de la matriz A; b) Resuelve la siguiente ecuación matricial $AX-B=AB$.

Tercer bloque

A) Dada la función $f(x)=\begin{cases} x+b & \text{si} \quad x<0 \\ ax^2+3 & \text{si} \quad x\geq 0 \end{cases}$ determina a y b para que $f(x)$ sea continua y no derivable en $x=0$

B) Discute y resuelve si es posible el siguiente sistema

$$\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=1 \\ x+y+az=1 \end{cases}$$

Cuarto bloque

A) Enuncia la Regla de L'Hôpital y calcula $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^4-2x^2+1}$

B) Dadas las rectas $s\equiv\frac{x}{4}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{2}$ y $r\equiv\frac{x-1}{1}=\frac{y-a}{a-1}=\frac{z-3}{3}$

a) Calcula el valor de a para que las rectas r y s se corten, en el caso de que r y s se corten.
b) Calcula las coordenadas del punto de intersección de las rectas r y s.
c) Halla la ecuación del plano que determinan las rectas r y s.

Junio de 2002

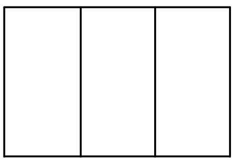
Primer bloque

A) La función $f:R\to R$ dada por $f(x)=\begin{cases} x^2+bx+c & si \quad x\le 0 \\ \frac{\log(1+x)}{x} & si \quad x>0 \end{cases}$ es derivable en el punto $x=0$. Calcula cuánto valen las constantes b y c.

B) Considera el plano $\pi\equiv x-y+1=0$ y el punto $A(2,0,1)$. a) Determinar la ecuación de la recta que es perpendicular al plano π y pasa por el punto A; b) Halla las coordenadas del punto B que es simétrico del punto A respecto del plano π.

Segundo bloque

A) Un solar rectangular de 11250 m^2 se divide en tres zonas rectangulares iguales para venderlo (como muestra la figura). Se valla el borde del campo y la separación de las zonas. Calcula las dimensiones del solar para que la longitud de valla utilizada sea mínima.



B) Discute según los valores del parámetro a el sistema

$$\begin{cases} ax+y+z=0 \\ x+ay+z=1 \\ x+y+az=1 \end{cases}$$

¿Para qué valores de a se puede aplicar la regla de Cramer para resolver el sistema?

Tercer bloque

A) Halla la ecuación de la recta tangente a la curva de ecuación $y=x^3-3x$ en el punto de abscisa $x=-1$. Calcula el área del recinto limitado por la recta y la curva dada.

B) Determina la ecuación del plano que pasa por el punto $P(1,0,2)$, es paralelo a la recta

$r \equiv \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{3} = z-3$ y perpendicular al plano $\pi \equiv 2x - y + z = 0$

Cuarto bloque

A) Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^3}$ calcula: a) Máximos y mínimos relativos; b) Asíntotas; c) Puntos de inflexión.

B) Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 5$ calcula el valor de:

a) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a+2 & b+2 & c+2 \\ \dfrac{x}{3} & \dfrac{y}{3} & \dfrac{z}{3} \end{vmatrix}$

Septiembre de 2002

Primer bloque

A) La capacidad de concentración de una saltadora de altura en una reunión atlética de tres horas de duración viene dada por la función $f(t) = 300t(3-t)$ donde t mide el tiempo en horas.

a) Calcula los intervalos en los cuales la capacidad de concentración aumenta y en los que disminuye. Cuando es nula también.

b) Cual es el mejor momento en términos de su capacidad de concentración para que la saltadora pueda batir su propia marca; c) Representa gráficamente la función capacidad de concentración.

B) Sea π el plano que pasa por los puntos $(1,0,0)$, $(0,1,1)$ y $(1,1,1)$; A el punto $(1,2,3)$ y B el simétrico de A respecto del plano π. a) Halla la ecuación de la recta que pasa por A y por el punto medio del segmento $\overline{AB}$; b) Halla la ecuación de la recta paralela a la anterior que pasa por el punto $(2,2,2)$.

Segundo bloque

A) Calcula $\displaystyle\int \frac{x^2-2}{x^3-3x+2}dx$

B) Resuelve la ecuación matricial $XA - 2B + 3C = D$ siendo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } D = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

Tercer bloque

A) El alcalde de un pueblo quiere preparar un recinto rectangular para celebrar fiestas. Aprovecha para uno de los lados una tapia existente y dispone de 300 m de tela metálica para cercar los otros tres lados. a) halla las dimensiones del recinto máximo que se puede acotar; b) calcula el área de dicho recinto.

B) Considera el plano $\pi \equiv ax+2y-4z+b=0$ y la recta $r \equiv \frac{x-3}{4}=\frac{y-1}{-4}=\frac{z+3}{1}$. a) Halla los valores de a y b para que la recta r este contenida en π; b) ¿Existe algún valor de a y b para que la recta r sea perpendicular a π?

Cuarto bloque

A) Dadas las funciones $y=-x^2+4$ e $y=|x+2|$. a) Dibuja ambas graficas; b) Señala el recinto plano comprendido entre ambas; c) Calcula el área del recinto plano señalado.

B) Halla el valor del parámetro k para que el sistema $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+3y+z=5 \\ 4x+5y+3z=k \end{cases}$ sea compatible indeterminado. Calcula la solución general y verifica si las ternas $(1,1,0)$, $(-5,4,3)$ y $(1,2,-1)$ son soluciones particulares.

Reserva 1 de 2002

Primer bloque

A) Calcula $\int (x^2+2x+1)\log(x)\,dx$

B) Calcula x para que el volumen del tetraedro determinado por los vectores $\vec{u}(3,-3,1)$, $\vec{v}(2,1,2)$ y $\vec{w}(1,5,x)$ sea igual a 30 unidades de volumen. Halla el área de la cara determinada por $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Segundo bloque

A) Se toma una cuerda de 5 metros de longitud y se unen los extremos. Construimos con ella triángulos isósceles de diferentes medidas. Calcula las dimensiones del que tiene mayor área.

B) Si $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=5$. a) Calcula el valor de $\begin{vmatrix} 3a-b & 6a+2b \\ 3c-d & 6c+2d \end{vmatrix}$; b) Enuncia las propiedades de los determinantes que has usado en el apartado anterior.

Tercer bloque

A) Enuncia la regla de L'Hôpital y calcula el siguiente limite $\lim_{x\to 0}\frac{2x\cos(2x)-\operatorname{sen}(2x)}{x^3}$.

B) Dados los puntos $A(2,0,3)$, $B(-4,0,5)$ y el plano $\pi \equiv y-z=0$ halla la distancia entre los puntos A' y C, siendo A' el simétrico de A respecto del plano π y C el punto medio del segmento $\overline{AB}$.

Cuarto bloque

A) La función $f:[0,5]\to R$ dada por

$$f(x)=\begin{cases} ax+bx^2 & si \quad 0\le x<2 \\ c+\sqrt{x-1} & si \quad 2\le x\le 5 \end{cases}$$

es derivable en el intervalo $(0,5)$ y verifica que $f(0)=f(5)$. ¿Cuánto valen a, b y c?

B) Considera el sistema de ecuaciones que depende del parámetro real λ: $\begin{cases} x+2y-z=2 \\ 2x+3y+z=2 \\ 5x+\lambda y+z=6 \end{cases}$

a) Discute el sistema según los valores de λ.
b) Resuelve para $\lambda=8$.

Reserva 2 de 2002

Primer bloque

A) Considera la función $f(x)$ definida para $x\neq 0$ por la relación $f(x)=\dfrac{4x^2+3x+4}{x}$

a) Halla las ecuaciones de sus asíntotas.
b) Determina los máximos y mínimos locales.
c) Dibuja la gráfica de $f(x)$.

B) Resuelve la ecuación $\begin{vmatrix} 2x-1 & 3x & x-2 \\ 2x+1 & x & 2x+1 \\ 2x-1 & 3x & 3x-2 \end{vmatrix}=0$.

Segundo bloque

A) Con una lámina rectangular de 30 cm de largo por 15 cm de ancho se quiere construir una caja sin tapa. Para ello se recortan unos cuadrados de los vértices y se doblan en ángulo recto las pestañas resultantes. a) calcula el lado del cuadrado recortado para que el volumen sea máximo; b) calcula el volumen máximo.

B) Considera el triángulo de vértices $A(0,0,1)$, $B\left(3,-\sqrt{30},0\right)$ y $C\left(3,\sqrt{30},0\right)$.

a) Calcula cuánto vale cada uno de sus ángulos.
b) Justifica si se trata de un triángulo isósceles.

Tercer bloque

A) Dada la curva de ecuación $y=x^2-4x+3$ y la recta $y=-x+3$

a) Dibuja la gráfica de la parábola y de la recta
b) Señala el recinto plano comprendido entre ambas.
c) Calcula el área de ese recinto.

B) Considera las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Calcula una matriz X tal que $A^2+AX=I$
b) Existe la inversa de la matriz X, justifica tu respuesta

Cuarto bloque

A) Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{4}{x^2+2} & si \quad x\leq 0 \\ x^2-4x+2 & si \quad x>0 \end{cases}$$

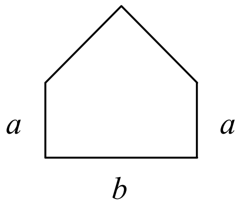
a) Determina los intervalos de continuidad.
b) Determina los intervalos de derivabilidad

B) Dados los puntos $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$ y $C(0,0,3)$ sean A' el simétrico de A respecto de B, B' el simétrico de B respecto de C y C' el simétrico de C respecto de A. Halla la ecuación del plano que pasa por los puntos A' B' y C'

Junio de 2003

Primer bloque

A) El perímetro de la ventana del dibujo mide 6 metros. Los dos lados superiores forman entre si un ángulo de 90°. Calcula la longitud de los lados a y b para que el área de la ventana sea máxima.



B) Utiliza las propiedades de los determinantes y enúncialas para desarrollar:

$$\begin{vmatrix} x & 2x+1 & 3x+2 \\ x & 2x+3 & 3x+4 \\ x & 2x+5 & 3x+6 \end{vmatrix}.$$

Segundo bloque

A) Enuncia la regla de L'Hôpital. Calcula el siguiente límite: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\log(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)$.

B) Las rectas de ecuaciones $r\equiv\begin{cases} x+y-z=4 \\ x+2y=7 \end{cases}$, $s\equiv\begin{cases} x=2 \\ y=-5 \end{cases}$ se cruzan en el espacio.

a) Escribe las ecuaciones paramétricas de ambas rectas; b) Halla un punto de r y otro de s tales que el vector origen en uno y extremo en el otro sea perpendicular a ambas rectas.

Tercer bloque

A) Dada la curva $y=x^2-4x$ y la recta $y=3x-6$

a) Dibuja la gráfica de ambas; b) Señala el recinto plano comprendido entre ellas; c) Calcula el área del recinto señalado.

B) Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \lambda & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ donde λ es un número real.

Encuentra los valores de λ para los que la matriz $A.B$ es invertible.

Cuarto bloque

A) Determina las ecuaciones de la recta tangente y de la recta normal en el punto de abscisa 0 a la gráfica de la función f dada por $f(x)=2xe^x+\dfrac{x^3-2}{x^2+4}$.

B) Considera la recta r dada por $r \equiv \begin{cases} x-4y+9=0 \\ 3y-z-9=0 \end{cases}$

a) Determina el plano que pasa por el punto $P(1,4,0)$ y contiene a r.

b) ¿Para cualquier valor de λ el plano

$$x-4y+9+\lambda(3y-z-0)=0$$

contiene a r?

c) Determina los valores de λ para que el plano diste 3 unidades del origen de coordenadas.

Septiembre de 2003

Primer bloque

A) En un semicírculo de radio 10 m se quiere inscribir un rectángulo, uno de cuyos lados este sobre el diámetro y el opuesto a él tenga sus extremos en la parte curva. Calcula las dimensiones del rectángulo para que su área sea máxima.

B) Considera la matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Comprueba que se verifica $A^3+I=O$ siendo I la matriz identidad y O la matriz nula.
b) Justifica que A tiene inversa.

Segundo bloque

A) Calcula la siguiente integral $\int_e^{e^3} \frac{\log x}{x}\,dx$.

B) Estudia, según los valores de a, la compatibilidad del sistema y resuélvelo para el valor de a que lo haga compatible indeterminado $\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=1 \\ x+y+az=-2 \end{cases}$.

Tercer bloque

A) Dada la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^3-6x^2+5x$.

a) Halla las coordenadas del punto de inflexión; b) Halla las coordenadas de los puntos de corte con el eje de abscisas; c) Determina las ecuaciones de las rectas tangentes a $f(x)$ en el punto de inflexión y en el origen de coordenadas.

B) Sea el plano π de ecuación $3x-2y-6z=1$ y la recta r dada por

$$(x,y,z)=(1,0,1)+\lambda(2,-1,1).$$

a) Define la relación de paralelismo entre una recta y un plano; b) Averigua si la recta y el plano son paralelos; c) Define la relación de perpendicularidad entre recta y plano; d) Averigua si la recta y el plano son perpendiculares.

Cuarto bloque

A) Sea la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x)=\begin{cases} x^2-4x+3 & si \quad x\le 3 \\ 2x-4 & si \quad x>3 \end{cases}$$

a) Define continuidad de una función en un punto; b) ¿En qué puntos es continua la función?;

c) ¿En qué puntos es derivable la función?; d) Si una función no es continua en un punto ¿puede ser derivable en él?

B) Dados los planos $\pi \equiv x+y+z=1$ y $\pi' \equiv x-y=0$.

a) Calcula el ángulo que forman; b) Determina las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por $P(1,2,3)$ y es perpendicular al plano π.

Reserva 1 de 2003

Primer bloque

A) De la función f de R en R definida por

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$$

se sabe que tiene un máximo relativo en $x=1$ y un punto de inflexión en $(0,0)$ y que $\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{5}{4}$. Calcula a, b, c y d.

B) Consideramos las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) Determina si A y B son invertibles; b) Resuelve la ecuación matricial $BA-A^2=AB-X$

Segundo bloque

A) Dada la función f de R en R definida por

$$f(x)=\begin{cases} x-1 & si \quad x\le 1 \\ x^2-1 & si \quad 1<x\le 2 \\ x^2 & si \quad x>2 \end{cases}$$

a) Representa gráficamente la función; b) Estudia su continuidad en los puntos de abscisa $x=1$ y $x=2$

B) Determina la ecuación del plano que pasa por el punto $A(1,1,2)$ y es paralelo a las rectas r y s dadas por $r\equiv \frac{x-2}{-1}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{2}$ $s\equiv \begin{cases} 2x-y+z=-2 \\ -x+y+3z=1 \end{cases}$ ¿Pertenece el punto $P(2,1,4)$ a ese plano?

Tercer bloque

A) Resuelve la siguiente integral $\int \frac{x^2+1}{x^3-3x+2}dx$

B) Estudia según los valores de k la compatibilidad del sistema y resuélvelo para $k=1$

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+2y+3z=k \\ 2x+3y+4z=k \end{cases}$$

Cuarto bloque

A) Supongamos que el rendimiento $r(t)$ de una alumna en un examen que dura dos horas viene dado por la relación $r(t)=75t(2-t)$ donde t con $0 \le t \le 2$ es el tiempo en horas. a) ¿En qué intervalos aumenta el rendimiento y en que intervalos disminuye?; b) ¿En qué momento se obtiene mayor rendimiento?; c) ¿En qué momento el rendimiento es nulo?

B) Considera el plano π y la recta r de ecuaciones $\pi \equiv x+y=2$ $r \equiv \begin{cases} x+z=4 \\ y=0 \end{cases}$.

a) Halla el punto de intersección de π y r.
b) Halla la ecuación del plano que contiene a r y es perpendicular a π.

Reserva 2 de 2003

Primer bloque

A) Una compañía de venta a domicilio ha determinado que sus beneficios anuales dependen del número de vendedores verificando la expresión $B(x)=-9x^2+360x+1875$ donde $B(x)$ es el beneficio en miles de euros para x vendedores. a) ¿Qué número de vendedores ha de tener la empresa para que sus beneficios sean máximos?; b) ¿Cuál será el valor máximo de los beneficios?

B) Considera la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \lambda & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$ y el sistema lineal en forma matricial $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. a) Determina para que valores del parámetro λ no tiene inversa la matriz A; b) Resuelve el sistema para $\lambda=1$.

Segundo bloque

A) Dada la función $f(x)=2x^3-9x^2+12x+3$ a) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$; b) Halla los puntos máximos mínimos y de inflexión de $f(x)$; c) Representa su gráfica.

B) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 6 & k & 2 \\ 12 & 4 & k \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcula los valores de k para que no tenga inversa; b) Determina paso a paso la inversa de la matriz A para el valor de $k=3$

Tercer bloque

A) Determina los números reales a y b para que la función $f: R \to R$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} ae^{\frac{\sin^2 x}{x}}+b\cos x & si \quad x<0 \\ 6 & si \quad x=0 \\ 3a\dfrac{\sin x}{x}+b(x-1) & si \quad x>0 \end{cases}$$

sea continua en toda la recta real.

B) Considera el plano π y la recta r dados por sus ecuaciones $\pi \equiv ax+2y-4z+b=0$, $r \equiv \dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y-1}{-4}=\dfrac{z+3}{1}$.

a) Calcula los valores de a y b para que r este contenida en π.

b) ¿Existen valores de a y b para los que la recta r sea perpendicular a π?

Cuarto bloque

A) Dadas las curvas de ecuaciones $y=\sqrt{3x}$ e $y=\dfrac{1}{3}x^2$:

a) Dibuja las gráficas
b) Señala el recinto plano comprendido entre ambas.
c) Calcula el área de dicho recinto.

B) Dados los planos de ecuaciones $\pi \equiv x+2y-z+4=0$, $\pi' \equiv 2x+y+Cz-3=0$ ¿para qué valores de C el ángulo formado por π y π' es de 60°?

Junio de 2004

Primer bloque

A) La curva $y=2x^2$ divide al cuadrado de vértices $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(1,1)$ y $D(0,1)$ en dos recintos.

a) Dibuja dichos recintos.
b) Halla el área de cada uno de ellos.

B) a) Determina la matriz X para que tenga solución la ecuación $C\left(A+X\right)B=I$, donde A,B y C son matrices con inversa de orden *n* e *I* es la matriz identidad de orden *n*.

b) Aplica el resultado anterior para

$$A=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 1 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Segundo bloque

A) Un alambre de 100 metros de largo se divide en dos trozos. Con uno de los trozos se forma un cuadrado y con el otro una circunferencia. Halla la longitud de los trozos para que la suma de las áreas del cuadrado y del círculo sea mínima.

B) Se considera el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases}(m+2)x+(m-1)y-z & = & 3\\ mx-y+z & = & 2\\ x+my-z & = & 0\end{cases}$$

a) Discútelo para los distintos valores de *m*.
b) Resuélvelo para $m=1$.

Tercer bloque

A) Dada la curva $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$, se pide:

a) Dominio de definición de la función y puntos de corte con los ejes, si los hay.
b) Asíntotas, si las hay.
c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
d) Máximos y mínimos, si los hay.
e) Una representación aproximada de la misma.

B) Se considera la recta $r \equiv \begin{cases} x+2z = 3 \\ y+4z = 5 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv 3x-y+2z=1$. Se pide:

a) Comprueba que *r* y π son paralelos.
b) Calcula la distancia entre *r* y π.
c) Determina dos rectas distintas que estén contenidas en π y sean paralelas a *r*.

Cuarto bloque

A) Determina *b* y *c* para que la función

$$f(x)=\begin{cases} x^3 & si \quad x \le 2 \\ -x^2+bx+c & si \quad x>2 \end{cases}$$

a) Sea derivable en todos los puntos de R. (R = números reales)
b) Calcula la ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa *x* = 1.

B) Considera los puntos A(2,0,0), B(0,2,0), C(2,2,1) y D(1,1,2), y calcula:

a) El volumen del tetraedro que determinan.
b) La ecuación cartesiana o implícita del plano que contiene al punto *D* y es paralelo al que contiene a los puntos *A*, *B* y *C*.

Septiembre de 2004

Primer bloque

A) Considera la función siguiente $f(x)=\begin{cases} x^3-x^2 & si \quad x \le 1 \\ ax+b & si \quad x>1 \end{cases}$.

a) Determina los valores de *a* y *b* para que sea derivable en todos los puntos
b) Esboza la gráfica de la curva representativa de la función para los valores de *a* y *b* calculados.

B) Sean *A* y *B* las matrices siguientes

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ambas son de rango 3.
¿Qué ocurre si las combinamos linealmente? En concreto, estudia el rango de la matriz $A+\lambda B$ según los valores del parámetro λ.

Segundo bloque

A) Considera la función $f(x)=-x^4+4x^3$. Calcula:

a) Puntos de corte con los ejes.
b) Máximos y mínimos.
c) Puntos de inflexión.
d) Halla el área de la región encerrada por la gráfica y el eje OX

B) Dadas las matrices:

a) Halla la matriz inversa de $(A-I)$, siendo *I* la matriz unidad de orden 3.
b) Halla la matriz *X* solución de la ecuación $XA-2B=X$:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Tercer bloque

A) Expresa el número 60 como suma de tres números positivos de forma que el segundo sea el doble del primero.
Si el producto de los tres es máximo, determina el valor de dicho producto.

B) Halla la distancia del plano $\pi_1 \equiv 4x - 10y + 2z = -1$ al plano $\pi_2 \equiv \begin{cases} x = 2\lambda + 3\mu \\ y = \lambda + \mu \\ z = \lambda - \mu \end{cases}$.

Cuarto bloque

A) Considera la función $f(x) = \begin{cases} x^3 & si \quad x < 1 \\ -x^2 + 2x & si \quad x \geq 1 \end{cases}$.

a) Haz un dibujo aproximado de su gráfica.
b) Calcula el área encerrada por la gráfica y el eje X.

B) Considera la recta *r* que pasa por los puntos *A*(2,1,0) y *B*(-4,-2,0) y la recta *s* determinada por el punto *C*(2,3,5) y el vector dirección $\vec{v} = (1,3,0)$.

a) Calcula el ángulo formado por *r* y *s*.
b) Calcula la distancia de *r* a *s*.

Reserva 1 de 2004

Primer bloque

A) a) Estudia la continuidad y derivabilidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} 5x + b & si \quad x < 1 \\ ax^2 + 3x + 5 & si \quad x \geq 1 \end{cases}$$

b) Determina los valores de *a* y *b* para que sea continua y derivable en todo número real.

B) a) Estudia según los valores del parámetro *a* el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x - 2y - z & = & -1 \\ ax - y + 2z & = & 2 \\ x + 2y + az & = & 3 \end{cases}$$

b) Resuelve el sistema para *a* = 3.

Segundo bloque

A) Considera las funciones $f(x) = x^2 - 2x + 8; \qquad g(x) = -x^2 + 8x$.

a) Dibuja sus gráficas utilizando los mismos ejes.
b) Halla el área de la región encerrada por ellas.

B) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, calcula, si es posible, una matriz X de números enteros tal que $XA = (10, 6, 2)$.

Tercer bloque

A) En un concurso se da a cada participante un alambre de dos metros de longitud para que, doblándolo convenientemente, haga con el mismo un cuadrilátero con los cuatro ángulos

rectos. Aquellos que lo logren reciben como premio tantos euros como decímetros cuadrados tenga de superficie el cuadrilátero construido.
Calcula la cuantía del máximo premio que se puede obtener en ese concurso.

B) Se consideran las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x - ay & = & 1 \\ y - z & = & 1 \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} x - 2y - z & = & 0 \\ x + y + z & = & 8 \end{cases}$$

Prueba que, para ningún valor de *a*, *r* y *s*, pueden ser paralelas y averigua el único valor de *a* para el que se cortan.

Cuarto bloque

A) Considera la función $f(x) = \begin{cases} x^3 & si \quad x \le 2 \\ -x^2 + 6x & si \quad x > 2 \end{cases}$

a) ¿Cumple las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo [0, 3]?
b) ¿Hay algún punto de la gráfica en el que la recta tangente sea paralela a la recta que pasa por los puntos $(0, f(0))$, $(3, f(3))$?

B) Halla la ecuación de la recta que pasa por *A*(2,-1,3) y es perpendicular al plano que pasa por los puntos *B*(1,1,0), *C*(0,-1,2) y *D*(-2,2,1). Calcula también el volumen del tetraedro *ABCD*.

Reserva 2 de 2004

Primer bloque

A) a) Enuncia la regla de L'Hôpital.

b) Calcula $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1}$.

B) Resuelve la ecuación matricial $AX - B + C = 0$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Segundo bloque

A) Calcula las dimensiones de 3 campos cuadrados de modo que: el perímetro del mayor sea el doble del perímetro del menor, se necesiten exactamente 1120 metros de valla para vallar los tres campos y las sumas de sus áreas sea la mínima posible. Cada campo tiene su propia valla.

B) Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Determina los valores de c tales que la matriz $A + cB$ no tenga rango 2.
b) Calcula, para los valores hallados de c, la matriz $A(A + cB)$ y su rango.

Tercer bloque

A) Determina un polinomio $P(x)$ de segundo grado sabiendo que:

$$P(0) = P(2) = 1.$$

y que

$$\int_0^2 P(x)dx = \frac{1}{3}.$$

B) Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$, estudia:

a) Asíntotas.
b) Máximos y mínimos.
c) Intervalos de concavidad y convexidad.
d) Haz un dibujo aproximado de la gráfica aprovechando los apartados anteriores.

Cuarto bloque

A) Dada la recta $r\equiv\begin{cases}3x-y+z&=&0\\ x-y&=&1\end{cases}$.

a) Determina la ecuación de la recta *s* que pasa por el punto $P(2,-1,0)$ y corta perpendicularmente a *r*.
b) Calcula el punto *Q* intersección de *r* y *s*.
c) Calcula el simétrico de *P* respecto a *r*.

B) Considera los cuatro puntos $A(1,0,1)$, $B(1,1,0)$, $C(0,1,1)$ y $D(1,k,k-1)$.

a) Halla *k* para que los cuatro puntos sean coplanarios (estén en el mismo plano).
b) ¿Qué valores de *k* hacen que el volumen del tetraedro determinado por los cuatro puntos sea 30 unidades de volumen?

Junio de 2005

Primer bloque

A) Estudia si la función $f(x)=\begin{cases}x & (x\le -1)\\ 1-x^2 & (-1<x\le 2)\\ -3 & (2<x)\end{cases}$

es continua en los puntos $x=-1$ y $x=2$.
Representa gráficamente dicha función.

B) Determina $f(x)$ sabiendo que

$$f'''(x)=24x;\ f''(0)=2,\ f'(0)=1\ \text{ y }\ f(0)=0$$

Segundo bloque

A) Una imprenta recibe el encargo de diseñar un cartel con las siguientes características: la zona impresa debe ocupar 100 cm², el margen superior debe medir 3 cm, el inferior 2 cm, y los márgenes laterales 4 cm cada uno.
Calcula las dimensiones que debe tener el cartel de modo que se utilice la menor cantidad de papel posible.

B) a) Enuncia la regla de L'Hôpital.

b) Resuelve el límite siguiente: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{sen}x}{\operatorname{tg}x-\operatorname{sen}x}$

Tercer bloque

A) Dado el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro a:

$$\begin{cases} x+2y+z=a \\ x+y-az=a \\ 2x+3y+z=a \end{cases}$$

se pide:

a) Discusión del mismo en función del valor del parámetro a.

b) Resolución en el caso de que $a \neq 0$.

B) Si la matriz $A = \begin{pmatrix} \mathrm{a} & \mathrm{b} & \mathrm{c} \\ \mathrm{d} & \mathrm{e} & \mathrm{f} \\ \mathrm{g} & \mathrm{h} & \mathrm{i} \end{pmatrix}$ tiene su determinante igual a n, averigua, utilizando las propiedades de los determinantes, el valor del determinante de las matrices siguientes:

$$B = \begin{pmatrix} 6\mathrm{d} & 4\mathrm{e} & 2\mathrm{f} \\ 3\mathrm{g} & 2\mathrm{h} & \mathrm{i} \\ 9\mathrm{a} & 6\mathrm{b} & 3\mathrm{c} \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} \mathrm{d}+\mathrm{f} & \mathrm{e} & \mathrm{f}+\mathrm{e} \\ \mathrm{a}+\mathrm{c} & \mathrm{b} & \mathrm{c}+\mathrm{b} \\ \mathrm{g}+\mathrm{i} & \mathrm{h} & \mathrm{i}+\mathrm{h} \end{pmatrix}$$

Cuarto bloque

A) a) Halla la ecuación del plano que contiene a la recta $r \equiv \begin{cases} x = 2t \\ y = 3+t \\ z = 1-t \end{cases}$ y al punto $P(2,-1,2)$.

b) Calcula la distancia desde el plano obtenido al punto $Q(0,1,0)$.

B) Halla el área y las longitudes de las tres alturas de un triángulo cuyos vértices son: $A(1,1,1)$, $B(0,3,5)$ y $C(4,0,2)$.

Septiembre de 2005

Primer bloque

A) De todos los prismas rectos de base cuadrada y tales que el perímetro de una cara lateral es de 30 cm, halla las dimensiones del que tiene volumen máximo.

B) Estudia el crecimiento y la concavidad de la función $f:(0,+\infty) \to R$ definida por $f(x) = \dfrac{Lx}{x}$.

(L = logaritmo neperiano)

Segundo bloque

A) a) Halla los valores de los coeficientes b, c y d para que la gráfica de la función $y = x^3 + bx^2 + cx + d$ corte al eje OY en el punto (0,-1), pase por el punto (2,3) y, en ese punto, tenga tangente paralela al eje OX.

b) Una vez hallados esos valores, halla los máximos y mínimos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la citada función.

B) Calcula la primitiva de $\displaystyle\int \frac{x+\sqrt{x}}{x^2}\,dx$.

Tercer bloque

A) a) Discute, en función de los valores de m, el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x-3y=0 \\ x-y+z=0 \\ x+2y+mz=m \end{cases}$$

b) Resuelve, en los casos de compatibilidad, el sistema anterior.

B) Se consideran las matrices: $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$,

donde $\underline{m}$ es un número real. Encuentra los valores de $\underline{m}$ para los que $A\cdot B$ tiene inversa.

Cuarto bloque

A) Calcula la ecuación de una recta que pasa por el punto de intersección del plano $\pi \equiv x+y-z+6=0$ con la recta $s \equiv \frac{x}{3}=y-2=z+1$ y es paralelo a la recta

$$r \equiv \begin{cases} 3x+y-4=0 \\ 4x-3y+z-1=0 \end{cases}$$

B) Dados los puntos $A(1,-2,3)$ y $B(0,2,1)$, se pide:

a) la ecuación paramétrica de la recta que pasa por ambos puntos;
b) la ecuación del plano π que está a igual distancia de A y B;
c) la distancia al origen de la recta intersección del plano $2y-z=0$ con el plano π del apartado b).

Reserva 1 de 2005

Primer bloque

A) Dada la función $f(x)=(2x+1)e^{x^2+x}$, determina la función $g(x)$ tal que $g'(x)=f(x)$, con la condición de que su gráfica pase por el punto (0,2).

B) Se desea construir una lata de conservas en forma de cilindro circular recto, de área total 150 cm² y volumen máximo. Determina el radio de la tapa y la altura del cilindro.

Segundo bloque

A) Se sabe que la función $f:[0,5]\to R$ dada por $f(x)=\begin{cases} ax+bx^2 & \text{si} \quad 0\le x<2 \\ c+\sqrt{x-1} & \text{si} \quad 2\le x\le 5 \end{cases}$ es derivable en el intervalo (0,5), y verifica que $f(0)=f(5)$. ¿Cuánto valen a,b y c?

B) Considera la función $f:R\to R$ definida por $f(x)=(x-2)e^x$.

a) Determina los intervalos en los que la función f es creciente.
b) Dibuja la región limitada por la gráfica de f, el eje de abscisas y las rectas de ecuaciones $x=1$ y $x=3$.
c) Halla el área de la región descrita en el apartado anterior.

Tercer bloque

A) Se considera el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 3x+4y+3z=9 \\ mx+2y+z=5 \\ x+y+z=2 \end{cases}$

a) Determina los valores de *m* para que el sistema dado tenga solución única.
b) Resuelve para $m = 1$.

B) Encuentra las matrices A y B, sabiendo que verifican las siguientes ecuaciones matriciales:

$$2A+3B=M \qquad -A+B=N$$

siendo $M=\begin{pmatrix} 8 & 4 & 7 \\ 18 & 11 & -6 \\ 8 & 3 & 13 \end{pmatrix}$ y $N=\begin{pmatrix} 9 & -2 & 16 \\ 17 & 1 & -10 \\ 9 & 4 & 13 \end{pmatrix}$

Cuarto bloque

A) Halla la ecuación del haz de planos que tienen por eje o arista la recta

$$r \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=2\lambda \\ z=-1+3\lambda \end{cases}$$

y calcula, después, el que pasa por el punto $P(1,1,1)$.

B) Calcula el volumen del tetraedro que tiene como vértices el punto $D(10,10,10)$ y los puntos en que el plano $\pi \equiv 2x+3y+z-12=0$ corta los ejes de coordenadas.

Reserva 2 de 2005

Primer bloque

A) Un objeto se lanza hacia arriba, verticalmente, desde un determinado punto. La altura, en metros, alcanzada al cabo de *t* segundos viene dada por $h(t)=5-5t-5e^{-2t}$.
Calcula el tiempo transcurrido hasta alcanzar la altura máxima y el valor de ésta.

B) De la función $f: R \to R$ definida por $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ se sabe que tiene un máximo relativo en $x=1$, un punto de inflexión en (0,0) y que $\int_0^1 f(x)dx=\frac{5}{4}$.

Calcula *a*, *b*, *c* y *d*.

Segundo bloque

A) La función $f: R \to R$ dada por

$$f(x)=\begin{cases} x^2+bx+c & \text{si} \quad x\le 0 \\ \dfrac{L(x+1)}{x} & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$

es derivable en el punto $x=0$. ¿Cuánto valen *b* y *c*?

B) a) Halla el valor positivo de a para que $\int_0^{a-1}(x+1)dx=\frac{9}{2}$.

b) Calcula el área de la superficie comprendida entre el eje $\overline{OX}$, la recta $y=x+1$ y las rectas $x=0$ y $x=2$.

Tercer bloque

A) Se considera el sistema de ecuaciones siguiente: $\begin{cases} (m+2)x+(m-1)y-z=3 \\ mx-y+z=2 \\ x+my-z=1 \end{cases}$

Se pide:
a) Discutirlo para los distintos valores de *m*.
b) Resolverlo para *m* = 1.

B) Estudia para qué valores de *m* la matriz siguiente tiene inversa:

$$\begin{pmatrix} \mathrm{m} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ \mathrm{m} & 0 & \mathrm{m} \end{pmatrix}$$

y, en el caso de ser posible, halla su inversa para $m=-1$.

Cuarto bloque

A) Encuentra un punto R perteneciente a la recta $r \equiv \begin{cases} 2x-y-z+3=0 \\ -2x+3y-z-1=0 \end{cases}$ tal que los segmentos $\overline{PQ}$ y $\overline{PR}$ formen un ángulo recto, siendo *P*(1,0,0) y *Q*(0,-1,5).

B) Dada la recta de ecuaciones paramétricas: $r \equiv \begin{cases} x=-1+2\alpha \\ y=-1+\alpha \\ z=1 \end{cases}$

y los puntos *P*(1,1,2) y *Q*(1,-1,2), se pide que:
a) Encuentres la posición relativa de *r* y la recta determinada por los puntos *P* y *Q*;
b) Halla el punto R de *r* para los que el triángulo *PQR* sea isósceles de lados iguales $\overline{PR}$ y $\overline{QR}$.

Junio de 2006

Primer Bloque

A) Determina los valores $a,b,c \in R$ para que la función $f(x)=x^3+ax^2+c$ pase por el origen de coordenadas, tenga un punto de inflexión en $x=-1$, y su recta tangente en $x=1$ tenga pendiente 3.

B) Enuncia el teorema de Rolle. En los ejemplos siguientes $f(-2)=f(2)$ pero no hay ningún valor $c \in (-2,2)$ tal que $f'(c)=0$. Justifica en cada caso porque no contradicen el teorema de Rolle.

a) $f(x)=\dfrac{1}{x^4}$ b) $g(x)=2-|x|$

Segundo Bloque

A) Calcula la integral indefinida $\int \dfrac{x+2}{x^2-2x+1}dx$

B) Dadas las funciones $f(x)=x^2-1$ y $g(x)=1-x$ a) Esboza el recinto encerrado entre sus gráficas. b) Calcula el área de dicho recinto.

Tercer Bloque

A) Despeja la matriz X en función de A e I_2 en la ecuación $(X+A)^2 = X^2 + X\cdot A + I_2$ siendo X y A matrices cuadradas de orden dos, e I_2 la matriz identidad de orden dos.

B) A un compañero le piden que clasifique y resuelva el sistema $\begin{cases} 3x-ky=3 \\ y+3z=6 \\ x+kz=5 \end{cases}$ para el valor del parámetro $k\in R$ que el desee. Obtiene que el sistema es compatible determinado y que una expresión de sus soluciones en forma paramétrica es $x=1+2t$ $y=...$ $z=...$ Determina para qué valor del parámetro k ha clasificado y resuelto el sistema y calcula las expresiones de las incógnitas y y z que le faltan.

Cuarto Bloque

A) El plano α de ecuación general $x+y+z=10$ corta a las rectas $r_1: x=y=1$ $r_2: y=z=2$ y $r_3: x=z=3$ en los puntos A B y C respectivamente. a) Halla el volumen del tetraedro cuyos vértices son los puntos y $D(1,2,3)$ b) Determina la distancia desde el vértice D hasta la cara opuesta del tetraedro.

B) a) Halla un punto de la recta $r\equiv\begin{cases} x=1+2t \\ y=-t \\ z=-1 \end{cases}$ equidistante de los puntos $P(-1,2,1)$ y $Q(0,3,1)$

b) Calcula la ecuación implícita de un plano π de modo que el simétrico del punto P respecto del plano π sea Q.

Septiembre 2006

Primer Bloque

A) Determina, si es posible, los valores del parámetro $k\in R$ para que la función definida por

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x+1-e^x}{2x+1-e^{2x}} & si \quad x<0 \\ (2x-k)^2-6 & si \quad x\geq 0 \end{cases}$$ sea continua en $x=0$

B) Para la función $f(x)=(x+2)e^x$ se pide

a) Estudia su dominio y continuidad
b) Determina sus puntos de corte con los ejes
c) Obtén las coordenadas de los máximos y mínimos relativos
d) Determina las coordenadas de los puntos de inflexión

Segundo Bloque

A) Calcula la siguiente integral $\int \dfrac{x^3+1}{x^2+4}dx$

B) Dibuja aproximadamente las gráficas de las funciones $f(x)=x^2-3$ y $g(x)=2x$, y sombrea el área que queda encerrada entre ellas. Calcula el valor de dicho área.

Tercer Bloque

A) Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = x$ y además

$$\begin{vmatrix} 3b & 6c & 6a \\ e & 2f & 2d \\ 5h & 10i & 10g \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a+2b & b-c & 7c \\ d+2e & e-f & 7f \\ g+2h & h-i & 7i \end{vmatrix} = 50x+6$$

hallar el valor de x

B) Clasifica en función del parámetro $a \in R$ el sistema de ecuaciones $\begin{cases} ax-3y-2z=0 \\ -x+(5+a)z=0 \\ 2x+3y+4z=0 \end{cases}$ y resuélvelo si es posible para $a=-4$.

Cuarto Bloque

A) Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x=3+t \\ y=5+t \\ z=6+t \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x=1 \\ -2y+z=2 \end{cases}$ se pide

a) Analiza su posición relativa
b) Halla la ecuación general del plano π que contiene a s y es paralelo a r

B)

a) Calcula unas ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $P(2,-1,3)$ y es perpendicular a la recta $r \equiv \begin{cases} x=-1+2\lambda \\ y=3-\lambda \\ z=0 \end{cases}$

b) Halla las coordenadas del punto P' simétrico del punto P respecto de la recta r.

Reserva 1 de 2006

Primer Bloque

A) Enuncia el teorema de Bolzano. Aplícalo para demostrar que la ecuación $2^{x-1} = 1+(1+x)^2$ tiene al menos una solución, determinando un intervalo (a,b) con $a \in R$, $b \in R$ y $a<b$ en el cual se encuentre dicha solución.

B) De entre todos los rectángulos de perímetro 20, ¿Cuál tiene diagonal menor?

Segundo Bloque

A) Calcula el valor de la integral $\int_0^1 \frac{2\arctan x}{1+x^2}dx$ siendo $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ y $\arctan 0 = 0$

B) Para la función $f(x) = \frac{\log x}{x^2}$ se pide: a) Determina las asíntotas horizontales de la función. b) Calcula el área comprendida entre la gráfica de la función $f(x)$ el eje de abscisas y las rectas $x=e$ y $x=e^2$.

Tercer Bloque

A) a) Resuelve el sistema matricial $\begin{cases} 2X-Y=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\ X-Y=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$

b) Resuelve la ecuación matricial $X\cdot A-X=B$ donde

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

B) a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a\in R$

$$\begin{cases} x+ay+(1-a)z=2+a \\ x+2az=a \\ 2x+ay-z=a \end{cases}.$$

b) Cuando $a=-2$ obtén una solución tal que $z=0$.

Cuarto Bloque

A) a) Halla la ecuación general del plano π que contiene a la recta $r\equiv\begin{cases} x=2+\lambda \\ y=-\lambda \\ z=-3+2\lambda \end{cases}$ y es perpendicular al plano $\pi'\equiv x=3$.

b) Discute en función del parámetro $a\in R$ la posición relativa de los planos $\pi_1\equiv x-2y+5z=1$ y $\pi_2\equiv -a^2x+2y-5z=a$.

B) Dado el plano $\alpha\equiv 2x+3y-2z=4$ y la recta

$$s\equiv\begin{cases} -x-y-az=2 \\ 3x+5y-6z=a \end{cases}$$

se pide:

a) Analiza su posición relativa según los valores del parámetro $a\in R$.

b) Calcula la distancia de la recta al plano en los casos $a=2$ y $a=0$.

Reserva 2 de 2006

Primer Bloque

A) Se dispone de 1200 metros cuadrados de chapa para construir un depósito en forma de prisma recto de base cuadrada, que no incluya la tapa superior. Halla el lado de su base x y su altura y de manera que el volumen que se pueda almacenar sea máximo. Calcula dicho volumen.

B) Dada la función $f:R\to R$ definida por $f(x)=\frac{1}{4}x^4-2x^2+3$ se pide

a) Determina sus intervalos de crecimiento y decrecimiento

b) Calcula las coordenadas de sus puntos de inflexión

Segundo Bloque

A) Halla el área encerrada entre la curva $y=x^3-4x^2+3x+2$ y la recta $y=2$

B) Sea la función $f(x)=axe^x+b$ con $a,b\in R$ y $a,b>0$. Calcula a y b para que la recta tangente a la función en $x=0$ tenga pendiente 1 y que además se cumpla que el área comprendida entre la función, el eje de abscisas, y las rectas $x=0$ y $x=1$ sea 3

Tercer Bloque

A) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}\alpha & 0 & 1\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\\ 2 & \alpha\end{pmatrix}$ se pide

a) Encuentra para que valores de $\alpha \in R$ la matriz $A\cdot B$ tiene inversa

b) Razónese si el sistema $A\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$ puede ser compatible determinado, y si $B\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$ puede ser un sistema incompatible

B) Si $T=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & 3 & 3\end{pmatrix}$ halla en función de $\lambda \in R$ el rango de la matriz $M=\lambda\cdot T+(1-\lambda)\cdot T^2$

Cuarto Bloque

A) Discute según los valores del parámetro $a \in R$ la posición relativa de las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x+2y-z=0\\ -x+y+2z=1\end{cases} \text{ y } s \equiv \begin{cases} 3y+z=1\\ 2x-ay-3z=a\end{cases}$$

B) Dados el plano $\alpha \equiv x+3y+z=1$ el plano $\beta \equiv x-y+2z=3$ y el punto $P(2,-1,5)$

a) Calcula el ángulo que forman los planos α y β

b) Halla unas ecuaciones en forma continua de la recta que es paralela a ambos planos y que contiene al punto P

Junio de 2007

Primer Bloque

A) a) Define el concepto de función continua en un punto.

b) Si $f(x)=\dfrac{e^{3x}-e^{-3x}}{4x}$, indica de forma razonada en qué valor $x=a$ no está definida $f(x)$.

c) Calcula el valor de $b \in \mathbb{R}$ para que la función $g(x)=\begin{cases} f(x) & \text{si } x\neq a\\ b & \text{si } x=a\end{cases}$ sea continua.

B) Dada la función $f(x)=9x+6x^2-x^4$, se pide: a) Halla los puntos en los que la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ tiene pendiente 1. B) Calcula los puntos de inflexión de $f(x)$.

Segundo Bloque

A) Calcula la siguiente integral: $\displaystyle\int \frac{2}{1+\sqrt{x}}\,dx$

B) Dadas las funciones $f(x)=\frac{1}{x}$ y $g(x)=-x+\frac{5}{2}$, se pide: a) Esboza sus gráficas y sombrea el recinto encerrado entre ellas. b) Calcula el área de dicho recinto.

Tercer Bloque

A) Calcula el rango de la matriz $A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ -1 & 2\lambda & -2\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$ en función del parámetro $\lambda\in\mathbb{R}$. ¿Para qué valores del parámetro $\lambda\in\mathbb{R}$ tiene inversa la matriz *A*? (No se pide hallarla)

B) Discute y resuelve, en función del parámetro $a\in\mathbb{R}$, el sistema $\begin{cases}ax+y=0\\ -y+2az=0\\ -x+ay=0\end{cases}$.

Cuarto Bloque

A) Consideramos las rectas: $r_1\equiv\begin{cases}x+y=5\\ y+z=2\end{cases}$, $r_2\equiv\begin{cases}y=1\\ x+y+z=6\end{cases}$ y $r_3\equiv\begin{cases}x-y=1\\ y-z=3\end{cases}$. Se pide:

a) Demuestra que las rectas r_1 y r_2 se cortan en un único punto.

b) Halla las ecuaciones en forma continua de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas r_1 y r_2, y es paralela a r_3.

B) Dados los planos $\alpha\equiv x+y-z=1$ y $\beta\equiv\begin{cases}x=1+t+s\\ y=1-t\\ z=2+s\end{cases}$, con $t,s\in\mathbb{R}$, se pide:

a) Determina su posición relativa.

b) Calcula la distancia entre ellos.

Septiembre de 2007

Primer Bloque

A) En agosto de 1548 el matemático Ludovico Ferrari le propuso a su colega Niccolo Fontana, apodado Tartaglia, el siguiente problema: "Halla dos números reales no negativos cuya suma sea 8 de manera que su producto multiplicado por su diferencia sea máximo". Obtén las soluciones de este problema con dos decimales de aproximación.

B) De la función $f(x)=\frac{ax^2+b}{a-x}$, con $a,b\in\mathbb{R}$, sabemos que pasa por el punto $(1,2)$, y que tiene una asíntota oblicua cuya pendiente es -6. a) Determina los valores a y b de la función. b) Determina, si existen, las asíntotas verticales de dicha función.

Segundo Bloque

A) Calcula la siguiente integral: $\int\frac{x}{(x+1)^3}dx$

B) Esboza las gráficas de las funciones parabólicas $f(x)=2x^2$ y $g(x)=-x^2+3$, sombreando el recinto cerrado que determinan. Calcula el área de dicho recinto.

Tercer Bloque

A) Enuncia el Teorema de Rouché-Fröbenius. Contesta razonadamente a las siguientes preguntas para un sistema $AX = B$ en forma matricial:

a) ¿Puede un sistema homogéneo ser incompatible?

b) Si la matriz 2×3, ¿puede ser el sistema $AX = B$ compatible determinado?

B) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Resuelve la ecuación matricial $AX + X = B$, donde X es una matriz 2×2.

b) Resuelve el sistema $\begin{cases} 2X + 2Y = A \\ 4X + 3Y = B \end{cases}$, siendo X e Y dos matrices de orden 2×2.

Cuarto Bloque

A) Consideramos los planos $\pi_1 \equiv x + 2y - z = 1$, $\pi_2 \equiv 3x - z = 3$ y $\pi_3 \equiv -x + 2y + z = 7$.

a) Determina su posición relativa.

b) Halla el ángulo que forman los planos π_1 y π_2.

B) Dados los puntos de coordenadas $A(3,1,1)$, $B(0,2,2)$ y $C(-1,-1,-1)$, se pide:

a) Determina la ecuación general del plano que los contiene.

b) Calcula la distancia desde el punto $P(0,0,4)$ a dicho plano.

Reserva 1 de 2007

Primer Bloque

A) Enuncia el Teorema de Bolzano. Aplícalo para probar que la ecuación $\operatorname{sen} x = x^2 - 1$ tiene al menos una solución. (Indicación: El ángulo x lo consideraremos en radianes).

B) De entre todos los triángulos rectángulos cuya hipotenusa mide 3 metros, determina la medida de los catetos de aquél que tenga área máxima.

Segundo Bloque

A) Sea $a \in \mathbb{R}$ una constante real no nula, y considera la parábola $f(x) = ax^2 - 4a$. Encuentra el valor de a para que se verifiquen simultáneamente las dos siguientes condiciones: 1ª, que el área comprendida entre la parábola y el eje de abscisas sea de 32 unidades cuadradas. 2ª, que la función $f(x)$ sea cóncava hacia arriba $(\cup)$.

B) Encuentra una primitiva de $f(x) = x^2 \cdot \operatorname{sen} x$ que pase por el origen de coordenadas.

Tercer Bloque

A) Razona si existe la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y, en caso afirmativo, calcúlala.

Resuelve la ecuación matricial $AX + 2A = I$, donde X es una matriz de orden 3×3 e I es la matriz identidad de orden 3×3.

B) Discute el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + y = 4 \\ ax - y = 6 \\ x - ay = -6 \end{cases}$ en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$, resolviéndolo cuando sea compatible.

Cuarto Bloque

A) Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} z = 4 \\ x - y = 0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} z = 0 \\ x + y = 2 \end{cases}$, se pide:

a) Estudia su posición relativa.

b) Determina los puntos, $R \in r$ y $S \in s$ de cada recta, entre los que se alcanza la distancia mínima entre ambas rectas.

B) Dado el plano $\pi \equiv x + y + z = 2$ y las rectas $r_1 \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = 2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ y $r_2 \equiv \begin{cases} x = 1 + s \\ y = -s \\ z = 2 \end{cases}$, $s \in \mathbb{R}$,

a) ¿Existe algún plano paralelo a π que contenga a la recta r_1?

b) ¿Existe algún plano paralelo a π que contenga a la recta r_2?

c) Si en algún caso la respuesta es afirmativa, halla la ecuación general de dicho plano.

Reserva 2 de 2007

Primer Bloque

A) Enuncia el Teorema del valor medio de Lagrange. Dada la función $f(x) = \dfrac{1+x}{2-x}$, se pide:

a) ¿Se puede aplicar dicho teorema a la función dada en el intervalo $[1,6]$?

b) ¿Se puede aplicar dicho teorema a la función dada en el intervalo $[3,11]$?

c) Si en algún caso se cumplen las hipótesis del teorema, calcula el valor para el cual se verifica la tesis del mismo.

B) Dada la función $f(x) = 2 - x^2 \cdot e^{-x}$, se pide:

a) Halla las coordenadas de sus máximos y mínimos relativos.

b) Calcula, si existe, la ecuación de la asíntota horizontal por la derecha (cuando $x \to +\infty$).

Segundo Bloque

A) Se considera la parábola $f(x) = -x^2 + 4$. Se pide: a) Calcula las ecuaciones de las rectas tangentes a $f(x)$ en $x = 2$ y en $x = -2$, esbozando una gráfica con la parábola y las dos rectas tangentes. B) Calcula el área comprendida entre la parábola y dichas rectas tangentes.

B) Calcula la siguiente integral: $\displaystyle\int \frac{-x+3}{4x^2+9}\,dx$.

Tercer Bloque

A) Consideramos las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} k \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Se pide:

a) Calcula, si es posible, la matriz

$$M = BB^t - A^t A, \text{ donde } B^t \text{ y } A^t$$

son las matrices traspuestas de las matrices B y A.

b) Determina el rango de la matriz M en función del parámetro $k \in \mathbb{R}$.

B) a) Clasifica en función del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$ el sistema

$$\begin{cases} \lambda x + y + z = 0 \\ x + \lambda y = 0 \\ 3x + \lambda z = 0 \end{cases}.$$

b) Resuélvelo, si es posible, para los valores $\lambda = -2$ y $\lambda = -3$.

Cuarto Bloque

A) Dadas la recta $\dfrac{x-1}{2} = y + 2 = \dfrac{z-2}{-1}$ y el punto $P(1,1,2)$, se pide:

a) Ecuación general del plano que contiene a la recta y al punto.
b) Distancia desde el punto P a la recta r.

B) Dados los puntos de coordenadas

$$A(3,2,2),\ B(1,3,3),\ C(0,0,2) \text{ y } D(0,0,-1)$$

se pide:

a) Calcula el área del triángulo de vértices A, B y C.
b) Analiza si los cuatro puntos forman un tetraedro y en caso afirmativo halla su volumen.

Junio de 2008

Primer Bloque

A) Calcula los siguientes límites:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^3 - 8x^2 + 7x}{x^2 - x}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{2x}{\pi} + \cos x\right)^{\frac{1}{\cos x}}$

B) Definición de punto de inflexión de una función. Calcula el valor de los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$ para que la función $f(x) = (x^2 - a)e^x + bx$ tenga un punto de inflexión en $x = 0$ y un mínimo relativo en $x = 1$.

Segundo Bloque

A) Calcula la integral $\displaystyle\int \frac{2x^3 - 9x^2 + 9x + 6}{x^2 - 5x + 6}\,dx$.

B) Calcula la integral definida: $\displaystyle\int_0^{\pi} e^x \operatorname{sen} x\,dx$.

Tercer Bloque

A) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Encuentra la expresión general de la potencia n- ésima de A. En otras palabras, calcula la expresión de A^n donde n es un número natural cualquiera.
b) Razona que la matriz A^n tiene inversa para cualquier $n \in \mathbb{N},\ n \geq 1$, y calcula dicha matriz inversa.

B) Encuentra, si es posible, un valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ de modo que el sistema

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ x-y+2z=2 \\ 2x+z=a \end{cases}.$$

a) Sea compatible determinado.
b) Sea compatible indeterminado.
c) Sea incompatible.

Cuarto Bloque

A) Dados los vectores $\vec{u}=(a,b,1)$, $\vec{v}=(-3,4,1)$ y $\vec{w}=(1,2,c)$, determina el valor de los parámetros $a,b,c\in\mathbb{R}$ de manera que los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ sean perpendiculares y además $\vec{u}\times\vec{w}=\vec{v}$, donde $\times$ denota el producto vectorial. ¿Qué ángulo forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en dicho caso?

B) Dados los puntos de coordenadas $A(1,1,1)$, $B(1+\lambda,2,1-\lambda)$ y $C(1+\lambda,1+\lambda,2+\lambda)$, donde $\lambda\in\mathbb{R}$.

a) Prueba que los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ forman un ángulo de 90º, independientemente del valor de λ.
b) Determina los valores de λ para que la longitud de la hipotenusa del triángulo rectángulo de vértices A, B y C sea igual a 3.

Septiembre de 2008

Primer Bloque

A) Dadas las funciones $f(x)=\ln(1-x^2)$ y $g(x)=\ln(1+x^2)$, se pide:

a) Determina el dominio de cada una de ellas.
b) Estudia si dichas funciones tienen puntos de inflexión.

B) Determina los valores de los parámetros $a,b\in\mathbb{R}$ para que la función $f(x)=(ax^2+bx)e^{-x}$ tenga un extremo relativo en el punto de abscisa $x=3$ y además pase por el punto $\left(1,-\frac{1}{e}\right)$. Halla la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto de abscisa $x=0$.

Segundo Bloque

A) De la función $f(x)=(x+a)\operatorname{sen}x$ donde a es un número real, se sabe que la integral definida $\int_0^{\pi} f(x)\,dx$ es tres veces el valor de la pendiente de la recta tangente a $f(x)$ en $x=0$. Calcula el valor de a.

B) Definición de primitiva de una función. Sabiendo que $F(x)=e^{x^2}$ es una primitiva de la función $f(x)$:

a) Comprueba que la función $f(x)$ es creciente en $\mathbb{R}$.
b) Calcula el área determinada por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas, y las rectas $x=-1$ y $x=1$.

Tercer Bloque

A) Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & -3 & 1 \\ y & 0 & 1 \\ z & 7 & 1 \end{vmatrix} = 6$, calcula el valor de $\begin{vmatrix} \frac{z}{2} & z+7 & 3 \\ \frac{y}{2} & y & 3 \\ \frac{x}{2} & x-3 & 3 \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} x & -3 & 1 & 2 \\ y & 0 & 1 & 2 \\ z & 7 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 0 & 2 \end{vmatrix}$.

B) Clasifica el sistema $\begin{cases} x-2y+az=0 \\ -ay+2z=0 \\ 2x-y+(a+1)z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$

en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$, y resuélvelo para $a=-2$.

Cuarto Bloque

A) Dados el plano $\pi \equiv x-y+z+k=0$, donde $k \in \mathbb{R}$, y la recta $r \equiv \frac{x-3}{2} = y+1 = -z$, se pide:

a) Demuestra que para cualquier $k \in \mathbb{R}$, la recta r es paralela al plano π.
b) Determina el valor de $k \in \mathbb{R}$, de forma que la recta r esté contenida en el plano π.

B) Dado el punto $P(2,2,1)$ y el plano $\pi \equiv \begin{cases} x=1+t-s \\ y=1-t+s \\ z=t \end{cases}$, se pide:

a) Distancia desde el punto P al plano π.
b) Ecuaciones generales de la recta que pasa por el punto P y es perpendicular a π.

Reserva 1 de 2008

Primer Bloque

A) Enuncia el Teorema del valor medio de Lagrange. Explica su interpretación geométrica. Determina los valores de los parámetros $k, p \in \mathbb{R}$ para que la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{k+x}{x-1} & \text{si} \quad x \le 0 \\ e^x + p & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

verifique las hipótesis de dicho teorema en el intervalo $[-1,3]$

B) Determina los valores $a,b \in \mathbb{R}$ para que la función $f(x) = a\,\text{sen}\,x + b\cos x$ pase por el punto $\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$ y además cumpla que la pendiente de la recta tangente en el punto de abscisa $x = \frac{\pi}{2}$ sea 5. Calcula la derivada de orden 2008 de dicha función.

Segundo Bloque

A) Enuncia la Regla de Barrow. Calcula la integral definida $\int_0^1 (x^2+x)e^x dx$.

B) Calcula la integral $\int \frac{e^{2x}+e^x}{1+e^{2x}} dx$. Indicación: Puede ayudarte hacer un cambio de variable adecuado.

Tercer Bloque

A) Considera las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 1\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$, donde $\lambda \in \mathbb{R}$.

a) Estudia, en función del parámetro λ, el rango de $A\cdot B$.

b) Razona que la matriz $B\cdot A$ tiene inversa para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$, y calcula dicha matriz inversa.

B) Considérese el sistema de ecuaciones lineales en forma matricial $AX=B$, donde:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 2a & a & -1\\ 1 & -a & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix} \text{ y } X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

siendo a un parámetro real. Se pide:

a) Clasifica el sistema en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

b) Para $a=0$, obtén las soluciones mediante el cálculo de $X=A^{-1}B$.

Cuarto Bloque

A) Dados los planos $\pi_1 \equiv 2x+y+\sqrt{k}z=3$, donde $k\in\mathbb{R}^+$, y $\pi_2\equiv 3x+4y=-5$, se pide:

a) ¿Es posible hallar k para que π_1 y π_2 formen un ángulo de 60º? En caso afirmativo, calcúlalo.

b) ¿Es posible hallar k para que π_1 y π_2 sean perpendiculares? En caso afirmativo, calcúlalo.

B) Considera los puntos $A(1,2,1)$, $B(3,6,3)$, $C(0,-1,5)$ y la recta $r\equiv\begin{cases}x-y=-1\\ z-y=4\end{cases}$.

a) Halla un punto D de la recta r de forma que los puntos A, B, C y D estén en un mismo plano.

b) Determina un punto D' de la recta r para que el volumen del tetraedro determinado por los vértices A, B, C y D' sea $\frac{10}{3}$.

Reserva 2 de 2008

Primer Bloque

A) Determina el valor de $k\in\mathbb{R}$, $k\neq 0$, para que se cumpla que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{kx}-kx-1}{kx^2}=\lim_{x\to 0}\frac{8\operatorname{sen}x+2\tan x}{x+\operatorname{sen}x}$$

B) Determina los valores de $a,b,c\in\mathbb{R}$ para que la función $f(x)=ax^3+bx+c$ pase por el punto $(2,8)$, tenga un mínimo relativo en $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ y además la recta tangente a $f(x)$ en el punto de abscisa $x=1$ tenga pendiente 4. Calcula la ecuación de la recta normal a $f(x)$ en el punto de abscisa $x=1$.

Segundo Bloque

A) Calcula el área determinada por la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 9x$ y el eje de abscisas.

B) Calcula las siguientes integrales: a) $\int \ln x \, \mathrm{d}x$, b) $\int \operatorname{tg} x \, \mathrm{d}x$.

Tercer Bloque

A) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Calcula A^2.

b) Resuelve la ecuación matricial $6A^{10}X = 3X + I_3$, siendo I_3 la matriz identidad de orden 3.

B) Enuncia el Teorema de Rouché-Fröbenius.
Sea $AX = B$ un sistema de ecuaciones lineales, escrito en forma matricial, con *m* ecuaciones y *n* incógnitas. Contesta razonadamente las siguientes preguntas:

a) Si $n > m$, ¿puede el sistema ser compatible determinado?

b) Si $n = m$ y $|A| \neq 0$, ¿cuál es el rango de la matriz ampliada $A|B$? Clasifica el sistema en este caso.

Cuarto Bloque

A) Dados los planos $\pi_1 \equiv x + y - z = 1$, $\pi_2 \equiv 2x + 2z = 0$ y $\pi_3 \equiv x + 3y + kz = 3$, donde $k \in \mathbb{R}$.

a) Analiza su posición relativa en función del parámetro $k \in \mathbb{R}$.

b) En el caso en que los tres planos se cortan en una recta, calcula las ecuaciones paramétricas de la misma.

B) Encuentra el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ sabiendo que la proyección del punto $P(a, 2a, 3a)$ sobre el plano $\pi \equiv 2x + y - z = 12$ es $P'(8, 13, 17)$.

Junio de 2009

Primer Bloque

A) Encuentra el punto de la recta $x + y = 4$, que cumpla que la suma de los cuadrados de sus coordenadas sea mínima.

B) Enuncia el Teorema de Bolzano. Como aplicación de este teorema, demuestra que las gráficas de las funciones $f(x) = e^{x^2}$ y $g(x) = 2\cos(x^2)$ se cortan en, al menos, un punto.

Segundo Bloque

A) Encuentra una primitiva de la función $f(x) = \dfrac{x + 36}{4 + 9x^2}$.

B) Calcula la integral definida: $\int_1^4 \dfrac{\sqrt{x} + e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ (Puede ayudarte hacer un cambio de variable).

Tercer Bloque

A) a) Sean A, B y X matrices cuadradas de tamaño *n*. Despeja X de la ecuación $AXB = B^2$:

b) Calcula la matriz X siendo

$$A=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&1&-1\\1&-1&0\end{pmatrix} \text{ y } B=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&3\\1&0&1\end{pmatrix}.$$

B) a) Calcula, en función del parámetro $a\in\mathbb{R}$, las soluciones de la ecuación:
b) ¿Para qué valor de a la ecuación anterior tiene una única solución?

Cuarto Bloque

A) a) Estudia, en función del parámetro $k\in\mathbb{R}$, la posición relativa de los planos $\pi_1\equiv x+y-z=1$ y $\pi_2\equiv x+y-k^2z=k$.
b) ¿Existe algún valor de k para el que los planos π_1 y π_2 sean perpendiculares?

B) a) Halla la ecuación general de un plano π que contenga a la recta $r\equiv\begin{cases}x+z=1\\y+z=0\end{cases}$ y pase por el origen de coordenadas.
b) Halla las ecuaciones paramétricas de una recta r' contenida en dicho plano, que sea perpendicular a r y que pase por el punto $P(1,0,0)$.

Septiembre de 2009

Primer Bloque

A) Un depósito cilíndrico construido sin la tapa superior tiene una capacidad de 27π m^3. Determina cuánto miden el radio de su base y su altura sabiendo que se ha construido de forma que su superficie sea mínima.

B) Se sabe que la recta $y=9$ es una asíntota horizontal de la función $f(x)=\dfrac{x^2}{ax^2-4}$. Calcula el valor del parámetro $a\in\mathbb{R}$. Estudia si para dicho valor del parámetro tiene asíntotas verticales u oblicuas.

Segundo Bloque

A) Calcula las integrales:
a) $\int \tan x dx$ b) $\int\left(1+\tan^2 x\right)dx$ c) $\int \arctan x dx$.

B) a) Estudia la continuidad y derivabilidad de la función

$$f(x)=\begin{cases}x^2+4x+3 & \text{si} \quad x<-1\\ 1-x^2 & \text{si} \quad x\geq -1\end{cases}.$$

b) Determina el área encerrada por la gráfica de la función $f(x)$ y el eje de abscisas.

Tercer Bloque

A) a) Sean A, B y X matrices cuadradas de tamaño *n*. Despeja X de la ecuación $XA=2X+B^2$
b) Calcula la matriz X siendo

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&-1\end{pmatrix} \text{ y } B=\begin{pmatrix}2&2&0\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix}.$$

B) a) Clasifica, en función del parámetro $\lambda\in\mathbb{R}$, el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \lambda x + y - z = 2 \\ 5x + 3y + 3z = 0 \\ 3x + 2y + \lambda z = 1 \end{cases}$$

b) Resuélvelo para $\lambda = 0$, si es posible.

Cuarto Bloque

A) Di si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y razona tus respuestas.

a) Dados un plano π y un punto P que no esté contenido en π, existe un único plano perpendicular a π que pasa por P.

b) Dados una recta r y un punto P que no esté contenido en la recta r, existe un único plano perpendicular a r que pasa por P.

B) Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 1 - t \end{cases}$ y $r' \equiv \begin{cases} x = 2 + s \\ y = s \\ z = a + s \end{cases}$, con $s, t \in \mathbb{R}$.

a) Encuentra un valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que las rectas r y r' estén contenidas en un mismo plano. Halla la ecuación general de dicho plano.

b) Para $a = 0$, calcula unas ecuaciones paramétricas de un plano π que contenga a la recta r y unas ecuaciones paramétricas de otro plano π' que contenga a la recta r', de modo que π y π' sean paralelos.

Reserva 1 de 2009

Primer Bloque

A) Según el artículo "*The design of honeycombs*" de A. L. Peressini, el área de la superficie de una celda de un panel de abejas está determinada por la función:

$$A(\theta) = p + q\frac{\sqrt{3} - \cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

donde p y q son dos constantes reales positivas, y $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ un cierto ángulo. Calcula con qué ángulo θ construyen las abejas las celdas de un panel, sabiendo que minimizan dicha área.

B) Se sabe que la recta $x = -3$ es una asíntota vertical de la función $f(x) = \frac{x^2}{x - a}$. Calcula el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$. Estudia si para dicho valor del parámetro la función $f(x)$ tiene asíntotas horizontales u oblicuas.

Segundo Bloque

A) Enuncia la fórmula de integración por partes. Aplícala para hallar $\int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \ln x dx$.

B) Determina una función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sabiendo que cumple que $f'''(x) = 3e^x + 2$, $f''(0) = 7$, $f'(0) = 3$ y $f(1) = 3(e + 1)$.

Tercer Bloque

A) Determina en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$, el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & a & 2 \\ 1 & -a & a & a \end{pmatrix}$.

B) a) Clasifica, en función del parámetro $k \in \mathbb{R}$, el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x - y + z = 4 \\ 3x + y - z = k \\ y + z = -2 \end{cases}$$

b) Resuélvelo cuando sea compatible determinado.

Cuarto Bloque

A) Consideremos los planos

$$\pi_1 \equiv x - 2y + z = 0 \text{ y } \pi_2 \equiv 2x + ay + bz = 24 .$$

a) Calcula $a, b \in \mathbb{R}$ para que los planos π_1 y π_2 sean paralelos. ¿Son coincidentes en dicho caso?

b) Calcula la ecuación general de un plano π_3 que equidiste de π_1 y π_2 para los valores a y b antes obtenidos.

B) Dado el punto $P(0,-1,0)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + t \\ z = -t \end{cases}$ con $t \in \mathbb{R}$.

a) Determina la ecuación general del plano perpendicular a r que pasa por el punto P.

b) Halla las coordenadas de un punto Q de la recta r de modo que la distancia de P a r sea igual a la distancia de P a Q. Calcula dicha distancia.

Reserva 2 de 2009

Primer Bloque

A) Encuentra el punto de la gráfica de la función $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ en el que la pendiente de la recta tangente sea mínima.

B) Dada la función $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$, donde $\ln x$ es el logaritmo neperiano de x,

a) Determina su dominio y sus asíntotas.

b) Razona que la función es decreciente en su dominio.

Segundo Bloque

A) Calcula la integral indefinida $\displaystyle\int \frac{2x^3 - 9x^2 + 9x + 6}{x^2 - 5x + 6} dx$.

B) Halla una primitiva $F(x)$ de la función $f(x) = 8x^3 + 2x$, que cumpla que $F(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, y de forma que el área comprendida entre la gráfica de $F(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 1$ sea $\dfrac{41}{15}$.

Tercer Bloque

A) Determina en función del parámetro $m \in \mathbb{R}$, el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} m & 2 & -1 & m-1 \\ 2 & 4 & m & m+2 \\ 3 & 6 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

B) Enuncia el Teorema de Rouché-Fröbenius. Sean A una matriz 3×3, B una matriz columna no nula de tamaño 3×1, O la matriz nula de tamaño 3×1, y consideremos los sistemas expresados en forma matricial $AX = B$ y $AX = O$.

a) Sabiendo que $AX = B$ es incompatible, clasifica el sistema $AX = O$.
b) Sabiendo que la matriz A tiene inversa, clasifica el sistema $AX = B$.

Cuarto Bloque

A) Dados los puntos $A(1,0,1)$, $B(2,1,0)$ y $C(1,1,a)$ con $a \in \mathbb{R}$:

a) ¿Existe algún valor de a para el que los tres puntos estén alineados?
b) ¿Existe algún valor de a para el que el plano que el plano que contiene a los tres puntos A, B y C sea paralelo al plano $\pi \equiv 4x - 6y - 2z = 7$?

B) Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x - 2y = 1 \\ y - z = -1 \end{cases}$ y $r' \equiv \begin{cases} x = a - s \\ y = a + s, \\ z = s \end{cases}$ con $s \in \mathbb{R}$.

a) Estudia en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$ su posición relativa.
b) Para el valor del parámetro a que hace que r y r' se corten en un punto, halla el punto P de intersección entre ambas rectas, y las ecuaciones paramétricas de una recta s perpendicular a r y a r' que pase por dicho punto P.

Junio de 2010

Propuesta A

1A. a) Enuncia el teorema de Bolzano

b) ¿Se puede aplicar dicho teorema a la función $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ en algún intervalo?

c) Demuestra que la función $f(x)$ anterior y $g(x) = 2x - 1$ se cortan en al menos un punto.

2A. a) Representa gráficamente las parábolas $f(x) = x^2 - 3x - 1$ y $g(x) = -x^2 + x + 5$.

b) Calcula el área del recinto limitado por ambas gráficas.

3A. a) Clasifica en función del parámetro $k \in \mathbb{R}$ el sistema de ecuaciones $\begin{cases} kx + y + z = k \\ x + ky + z = k \\ x + y + kz = k \end{cases}$.

b) Resuélvelo, si es posible, para $k = 1$.

4A. a) Estudia la posición relativa de la recta $r \equiv \begin{cases} x = -\lambda \\ y = 0 \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ y el plano de ecuación general

$\pi \equiv 2x - y + 3z = 6$.

b) Encuentra la ecuación general de un plano π' perpendicular a π que contenga a r.

Propuesta B

1B. La velocidad de una partícula, medida en m/sg, está determinada en función del tiempo $t \geq 0$, medido en segundos, por la expresión $v(t) = (t^2 + 2t)e^{-t}$. Se pide

a) ¿En qué instante de tiempo del intervalo $[0,3]$ se alcanza la velocidad máxima?

b) Calcula $\lim_{t \to \infty} v(t)$ e interpreta el resultado obtenido.

2B. Calcula la integral indefinida $\int \frac{\cos x}{1 + \operatorname{sen}^2 x} dx$

3B. Consideremos las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & a-3 \\ b+2 & c \end{pmatrix}$. Determina los valores $a, b, c \in R$ de forma que se cumpla que el determinante de la matriz B sea igual a 8, y además se verifique que $A \cdot B = B \cdot A$.

4B. Dado el plano $\pi \equiv x + z = 4$ y el punto $P(1,1,0)$ se pide:

a) Encuentra la ecuación general del plano π' paralelo a π que pasa por P.

b) Halla unas ecuaciones paramétricas de la recta r perpendicular a π que pasa por P.

Septiembre de 2010

Propuesta A

1A. Definición de derivada de una función en un punto. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{ax + \operatorname{sen} x}{2x - x^2} & \text{si} \quad x < 0 \\ bx + c & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ \dfrac{1}{1+x} & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

determina los parámetros $a, b, c \in R$ para que $f(x)$ sea una función continua en $x = 0$ y además sea continua y derivable en $x = 1$.

2A. Determina el dominio de la función $f(x) = \sqrt{2x+1}$. Calcula la integral definida $\int_{-\frac{1}{2}}^{0} f(x) dx$.

3A. Dadas las matrices $M = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & \lambda \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ y $F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ se pide:

a) ¿Para qué valores de $\lambda \in R$ existe matriz inversa de M.

b) Para $\lambda = 0$ resuelve si es posible la ecuación $X \cdot M = 2F$ donde X es una matriz cuadrada de orden 3.

4A. Dado el punto $P(0,0,1)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x+y+z=3 \\ x-y=0 \end{cases}$ se pide

a) Calcula la distancia desde el punto P a la recta r.
b) Halla unas ecuaciones paramétricas de una recta s que pase por el punto P y corte perpendicularmente a la recta r.

Propuesta B

1B. Dada la función definida por $f(x) = \begin{vmatrix} 3x & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ -1 & 0 & x-6 \end{vmatrix}$ se pide:

a) Halla su expresión polinómica simplificada calculando el determinante.
b) Calcula las coordenadas de su punto de inflexión y los intervalos en donde sea cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo.

2B. Enuncia la fórmula de integración por partes. Calcula la integral indefinida $\int x \log x dx$.

3B. Clasifica en función del parámetro $\lambda \in R$ y resuelve para $\lambda = -3$ el sistema $\begin{cases} 2x+y+\lambda z=0 \\ x-2y+z=0 \\ x+3y+z=10 \end{cases}$.

4B. Consideramos los planos $\pi \equiv ax+by+3z=c,\ \pi' \equiv 2x-y+z=3$ y la recta $r \equiv \begin{cases} 2x+3z=0 \\ y+2z=-4 \end{cases}$

a) Determina los parámetros $a,b \in R$ para que los planos sean paralelos.
b) Para los valores a y b obtenidos estudia la posición relativa del plano π y la recta r en función de $c \in R$.

Reserva 1 de 2010

Propuesta A

1A. Dada la función $f(x) = 3x^3 - 36x + 2$, se pide:

a) Determina las coordenadas de sus máximos y mínimos relativos.
b) Enuncia el teorema del valor medio de Lagrange. Analiza si es posible aplicarlo a la función $f(x)$ en el intervalo $[-2,2]$ y en caso afirmativo, calcula en que puntos se verifica la tesis del teorema en dicho intervalo.

2A. Dado un número real $a > 0$, calcula el área del recinto encerrado entre la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ el eje de abscisas y las rectas $x = a$ y $x = a+1$. Explica razonadamente que cuando a

tiende a ∞ dicha área tiende a cero.

3A. Clasifica en función del parámetro $k \in R$ el sistema de ecuaciones y resuélvelo en el caso en que sea compatible indeterminado $\begin{cases} x+100y-z=100 \\ x-100y+2z=0 \\ x+300y+kz=200 \end{cases}$.

4A. Comprueba que las direcciones de las rectas $r \equiv \begin{cases} x=0 \\ y+z=1 \end{cases}$ y $r' \equiv \begin{cases} x=1+2\lambda \\ y=2+\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$ $\lambda \in R$ son perpendiculares. Halla la ecuación general de un plano π que contenga a la recta r y sea paralelo a r'.

Propuesta B

1B. El espacio recorrido por una partícula en metros está determinado en función del tiempo $t \geq 0$ en segundos por la expresión $e(t) = At^2 + B\log(t+1) + C$. Se pide:

a) Determina los coeficientes $A, B, C \in R$ sabiendo que el instante $t=0$ la partícula ha recorrido 6 m la velocidad inicial para $t=0$ es de 8 m/sg y que la aceleración cuando $t=1$ es de 2 m/sg^2.

b) Para los valores obtenidos de A, B y C calcula $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{e(t)}{t^2}$.

2B. Calcula la integral indefinida $\int \dfrac{1}{x^3+x^2}\,dx$.

3B. Despeja X en la ecuación matricial $X \cdot A = B - 2X$ donde A, B y X son matrices cuadradas de orden 3. Calcula la matriz X siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$.

4B. Calcula los parámetros $a, b, c \in R$ de la ecuación del plano $\pi \equiv ax + y + bz = c$ sabiendo que pasa por el origen de coordenadas, es perpendicular al plano de ecuación $\pi' \equiv x + 2y = 3$ y que contiene a la recta de ecuaciones $r \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=1+\lambda \end{cases}$ con $\lambda \in R$.

Reserva 2 de 2010

Propuesta A

1A. Dada la función $f(x) = \arcsin\left(\sqrt{x-1}\right)$ definida para $x \geq 1$ se pide:

a) Calcula y simplifica $f'(x)$.

b) Explica razonadamente porque en ningún punto de la gráfica de la función $f(x)$ la recta tangente es horizontal.

2A. Calcula $a \in R$ siendo $a > 0$ para que el área de la región limitada por la gráfica de la función $f(x) = 6x^2$ el eje de abscisas y la recta $x = a$ sea igual a 2000 u^2.

3A. Dadas las matrices $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ se pide:

a) Estudia para que valores de $\lambda \in R$ el rango de la matriz $M - \lambda N$ es igual a 3.

b) Resuelve el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 3X + Y = M \\ X + Y = N \end{cases}$ donde X e Y son matrices cuadradas de orden 3.

4A. Dado el plano de ecuación general $\pi \equiv 2x + ay - z = 4$ se pide

a) Determina, si es posible, un valor del parámetro $a \in R$ de modo que el plano π sea paralelo al plano de ecuación $\pi' \equiv x + y + z = 2$.

b) Determina si es posible un valor del parámetro $a \in R$ de modo que el plano π sea paralelo a la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$.

Propuesta B

1B. Determina los valores de los parámetros $a, b, c \in R$ de forma que la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ cumpla que pasa por el punto de coordenadas $(3,10)$ y tiene un extremo relativo en el punto $(1,-2)$.

2B. Calcula la integral indefinida $\int \frac{x+2}{\sqrt{x+1}} dx$.

3B. Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 10$ obtén el valor de los siguientes determinantes

a) $\begin{vmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ y & x & z \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z+1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix}$

4B. Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 2-\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 2+\lambda \end{cases}$ y $r' \equiv \begin{cases} x = 2+\mu \\ y = -2\mu \\ z = 4+\mu \end{cases}$ se pide:

a) Comprueba que las dos rectas se cortan en un punto calculando dicho punto de corte.
b) Determina el ángulo de corte entre ambas rectas.

Junio de 2011

Propuesta A

1A. Dada la función $f(x) = \dfrac{4x^2+3x+4}{2x}$, se pide:

a) Calcula las asíntotas verticales y oblicuas de $f(x)$.

b) Coordenadas de los máximos y mínimos relativos de $f(x)$.

2A. Calcular las siguientes integrales:

a) $\int \left(\cos(2x) + \operatorname{sen} x \cos x\right) \mathrm{d}x$

b) $\int \dfrac{x^3-1}{x+2}\, \mathrm{d}x$

3A. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Resuelve el sistema matricial $\begin{cases} 2X + 3Y = A \\ X + Y = B \end{cases}$.

b) Encuentra una fórmula general para B^n, $n \in \mathbb{N}$. (Indicación: Calcula las primeras potencias de la matriz B)

4A. Consideremos el plano $\pi \equiv x - z = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 + at \\ y = 1 - t \\ z = 2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

a) Determina el parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que la recta y el plano sean paralelos.
b) Para el valor de a determinado, obtén las ecuaciones paramétricas de una recta r' paralela al plano π y que corte perpendicularmente a r en el punto $P(1,1,0)$.

Propuesta B

1B. En cierto experimento la cantidad de agua en estado líquido $C(t)$, medida en litros, está determinada en función del tiempo t, medido en horas, por la expresión:

$$C(t)=\frac{2}{3}+10t+\frac{10}{t}+\frac{240}{t^3} \qquad t\in[1,10]$$

Halla cuál es la cantidad mínima de agua en estado líquido y en qué instante de tiempo se obtiene en el intervalo comprendido entre $t=1$ hora y $t=10$ horas.

2B. a) Representa gráficamente la región del primer cuadrante limitada por las gráficas de las funciones $f(x)=\frac{1}{x}$ y $g(x)=\frac{1}{x^2}$, y la recta $x=2$.

b) Calcula el área de dicha región.

3B. a) Clasifica, en función del parámetro $\lambda\in\mathbb{R}$, el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases}\lambda x+2y-z=\lambda\\ 3x-y-z=1\\ 5x+y-2z=3\end{cases}$$

b) Resuélvelo, si es posible, para $\lambda=2$.

4B. Dados los puntos de coordenadas $A(0,1,0)$, $B(1,2,3)$, $C(0,2,1)$ y $D(k,1,1)$, donde $k\in\mathbb{R}$:

a) Determina el área del triángulo de vértices A, B y C.

b) ¿Para qué valores del parámetro k el tetraedro cuyos vértices son A, B, C y D tiene un volumen de $5\ \text{u}^3$?

Septiembre de 2011

Propuesta A

1A. a) Determina el valor del parámetro $a\in\mathbb{R}$, para que la función

$$f(x)=(x-a)e^x$$

tenga un mínimo relativo en $x=0$. Razona que, de hecho, es un mínimo absoluto.

b) Para el valor de a obtenido, calcula los puntos de inflexión de la función $f(x)$.

2A. Calcula la integral $\int\frac{x^2-3x+1}{x^3-5x^2+8x-4}\,\mathrm{d}x$.

3A. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\2&3&k\\1&4&k\\0&5k&1\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ y $O=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ se pide:

a) Calcula en función del parámetro $k\in\mathbb{R}$ el rango de la matriz A.

b) ¿Existe algún valor de $k\in\mathbb{R}$ para el cuál el sistema $AX=O$ sea incompatible?

c) ¿Para qué valores de $k\in\mathbb{R}$ el sistema $AX=O$ es compatible indeterminado?

4A. Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x-y=1 \\ y+z=1 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x=t \\ y=1-t, \ t \in \mathbb{R} \\ z=t \end{cases}$, se pide:

a) Determina su posición relativa.
b) Halla el ángulo que forman sus vectores directores.

Propuesta B

1B. a) Enuncia el teorema de Bolzano y el teorema de Rolle.
b) Demuestra que la ecuación $e^x + x^7 = 0$ tiene al menos una solución real.
c) Demuestra que, de hecho, dicha solución es única.

2B. Sean las funciones $f(x)=x^2$ y $g(x)=a$, con $a \in \mathbb{R}$, $a>0$. Calcula el valor del parámetro a para que el área encerrada entre las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ sea $\frac{32}{3}$.

3B. a) Clasifica, en función del parámetro $m \in \mathbb{R}$, el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x-y+z=1 \\ 2x-3y=-1 \\ x+2y+mz=m+3 \end{cases}$$

b) Resuélvelo, si es posible, para $m=7$.

4B. Consideremos el plano $\pi \equiv x-ky=0$, y la recta $r \equiv \begin{cases} x+y-z=3 \\ x-y=1 \end{cases}$.

a) Halla el valor del parámetro $k \in \mathbb{R}$ para que el plano π y la recta r sean paralelos.
b) Para el valor de k obtenido, calcula la distancia desde la recta r al plano π.

Reserva 1 de 2011

Propuesta A

1A. a) Definición de función continua en un punto.
b) Determina el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que la función

$$f(x)=\begin{cases} ax^2 & \text{si} \quad x \le 3 \\ \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} & \text{si} \quad x>3 \end{cases}$$ sea continua en $x=3$.

2A. Calcula las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int \frac{1+8x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int \left(x^2+x\right)\cos x\,\mathrm{d}x$

3A. He pensado en tres números, de manera que la suma de los primeros es igual al tercero. Si al triple del primer número le resto el doble del segundo vuelvo a obtener el tercero. Si al doble del primero le resto la mitad del segundo también obtengo el tercero. Por último, si al doble del primero le resto el segundo y sumo uno, de nuevo vuelvo a obtener el tercer número.

a) Plantea un sistema de ecuaciones que recoja la información anterior y clasifícalo.
b) Determina, si el problema tiene solución, los tres números que he pensado.

4A. Consideremos las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 - at \\ y = b + t \\ z = 2t \end{cases} \text{ con } t \in \mathbb{R} \text{ y } s \equiv x - 2 = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+6}{2}:$$

a) Determinar los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$ para que las dos rectas se corten perpendicularmente en un punto.
b) Calcula para los parámetros obtenidos en el apartado anterior, las coordenadas del punto de corte.

Propuesta B

1B. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 1+} \left(\dfrac{2x+1}{x+2} \right)^{\frac{1}{x-1}}$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\operatorname{sen} x - x \cos x}{x^2} \right)$

2B. a) Representar gráficamente la región limitada por las funciones $f(x) = x^2$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$, el eje de abscisas y la recta $x = e$.

b) Calcula el área de dicha región.

3B. Consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & k & 1 \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$. Demuestra que el rango de la matriz AA^t es siempre igual al rango de la matriz $A^t A$, cualquiera que sea el valor de $k \in \mathbb{R}$. (Recuerda que A^t representa la matriz traspuesta de A.

4B. a) Dada la recta $r \equiv \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2y - z = -1 \end{cases}$ y el punto $P(0,1,0)$, obtén las ecuaciones paramétricas de una recta r' que pase por P y corte perpendicularmente a r.
b) Encuentra las coordenadas del punto P' simétrico de P respecto de r.

Reserva 2 de 2011

Propuesta A

1A. a) Determina el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$, de forma que el área del triángulo de vértices $A(0,0)$, $B(0,a)$ y $C\left(\dfrac{a}{a-1}, 0 \right)$ sea mínima.

2A. Calcula las siguientes integrales:

a) $\int x \ln(x)\, \mathrm{d}x$

(Indicación: $\ln(x)$ representa el logaritmo neperiano de x)

b) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\, \mathrm{d}x$

3A. a) Despeja X de la ecuación matricial $XB - I = XA + A$, donde X, B, A e I son matrices de tipo 3×3.
b) Calcula la matriz X de tamaño 3×3, solución de la ecuación, siendo

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2&2&0\\0&3&2\\0&0&2\end{pmatrix} \text{ e } I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

4A. a) Analiza, en función del parámetro $m\in\mathbb{R}$, la posición relativa de los planos $\pi_1 \equiv 2x - y + z = 0$, $\pi_2 \equiv y + z = m$ y $\pi_3 \equiv mx + y - z = 8$.
b) Razona que, independientemente del valor del parámetro m, los planos π_2 y π_3 son perpendiculares.

Propuesta B

1B. Dada la función $f(x)=\frac{x^2}{2-x}$, se pide:

a) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
b) Asíntotas verticales y oblicuas.

2B. a) Representa gráficamente la región encerrada por las gráficas de las funciones $f(x)=x^2-2x-2$ y $g(x)=-x^2+2x-2$.
b) Calcula el área de dicha región.

3B. a) Enuncia el teorema de Rouché-Fröbenius.

b) Considera el sistema $AX = B$, donde A es una matriz 3×4, $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}$ y B es una matriz con una sola columna. ¿De qué dimensiones es la matriz B?
c) ¿Puede el sistema ser compatible determinado?
d) Si el sistema es incompatible y el rango de la matriz A es dos, ¿cuál es el rango de la matriz ampliada $(A|B)$?

4B. Dados los puntos $P(1,1,2)$ y $Q(1,1,0)$, y la recta $r\equiv\begin{cases}x+2y=1\\y+z=0\end{cases}$, se pide:

a) Ecuación general del plano π que contiene al punto P y a la recta r.
b) Halla la distancia desde el punto medio de los puntos P y Q al plano π calculado en el apartado anterior.

Junio de 2012

Propuesta A

1A. Dada la función

$$f\left(x\right)=x^3+ax^2+bx+c$$

calcula los parámetros $a,b,c\in\mathbb{R}$ sabiendo que:

- La recta tangente a la gráfica de $f\left(x\right)$ en el punto de abscisa $x=-1$ tiene pendiente -3.
- $f\left(x\right)$ tiene un punto de inflexión de coordenadas $\left(1,2\right)$.

2A. a) Esboza la región encerrada entre la parábola $f\left(x\right)=x^2-1$ y la recta $g\left(x\right)=5-x$.
b) Calcula el área de la región anterior.

3A. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $m\in\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+2y+3z=0 \\ mx+\left(m+1\right)y+\left(m-1\right)z=m-2 \\ 3x+\left(m+3\right)y+4z=m-2 \end{cases}$$

b) Calcula la solución cuando el sistema sea compatible determinado.

4A. a) Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de intersección del plano $\pi\equiv x-y+3z=-3$ con los ejes de coordenadas.
b) Si llamamos A, B y C a los vértices del triángulo del apartado anterior, encuentra el valor del parámetro $\lambda\in\mathbb{R}$ para que el tetraedro de vértices A, B, C y $D\left(-\lambda^2,2+\lambda,-3\right)$ tenga volumen mínimo.

Propuesta B

1B. La concentración (en %) de nitrógeno de un compuesto viene dada, en función del tiempo $t\in\left[0,+\infty\right)$ medido en segundos, por la función

$$N\left(t\right)=\frac{60}{1+2e^{-t}}$$

a) Comprueba que la concentración de nitrógeno crece con el tiempo. ¿Para qué $t\in\left[0,+\infty\right)$ la concentración de nitrógeno es mínima y cuál es esa concentración?
b) ¿A qué valor tiende la concentración de nitrógeno cuando el tiempo tiende a infinito?

2B. Calcula las siguientes integrales:

$$\int\frac{1}{4+9x^2}\,\mathrm{d}x \qquad \int\left(\tan x+\frac{1}{\tan x}\right)\mathrm{d}x$$

3B. a) Sean A y B matrices cuadradas de orden $n\in\mathbb{N},\ n\geq 2$, tales que B es la inversa de A:

- Si $\left|A\right|=3$ razona cuánto vale $\left|B\right|$.

- ¿Cuál es el rango de B ?

b) Calcula el determinante de la matriz cuadrada X de orden 3 que verifica:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 0 & 10 & -3 \\ 0 & 7 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

4B. Dados el plano $\pi \equiv 2x - z = 6$ y la recta $r \equiv \begin{cases} y + z = 0 \\ x - y + az = 4 \end{cases}$.

a) Encuentra el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que π y r sean paralelos.

b) Para el valor de a del apartado anterior, da la ecuación general del plano π' que contiene a r y es perpendicular a π.

Septiembre de 2012

Propuesta A

1A. a) Enuncia el Teorema de Bolzano y el Teorema de Rolle.
b) Demuestra, usando el Teorema de Bolzano, que existen al menos tres raíces reales distintas de la ecuación $x^5 - 5x + 3 = 0$.
c) Demuestra, usando el Teorema de Rolle, que la ecuación anterior no puede tener más de tres raíces reales distintas.

2A. Calcula las siguientes integrales:

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos x \, \mathrm{d}x \qquad \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x$$

3A. Sabiendo que

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 5$$

calcula el valor de los determinantes

$$\begin{vmatrix} b & b+a & 2c \\ e & e+d & 2f \\ h & h+g & 2i \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a+d+g & b+e+h & c+f+i \\ d+g & e+h & f+i \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

indicando las propiedades que usas en cada caso para justificar tu respuesta.

4A. Dado el plano $\pi \equiv x + y + 2z = 7$ y el punto $P(1,0,0)$:

a) Calcula el punto Q de π que hace mínima la distancia a P.

b) Calcula el punto simétrico P' de P respecto del plano π.

Propuesta B

1B. Dada la función

$$f(x)=\frac{ax^2+b}{2x+6}$$

Calcula los parámetros $a,b\in\mathbb{R}$ sabiendo que:

- $f(x)$ tiene una asíntota oblicua de pendiente 2.
- $f(x)$ tiene un mínimo relativo en el punto de abscisa $x=0$.

2B. Calcula el área encerrada entre las gráficas de las funciones
$f(x)=x^3-3x^2+2x+1$ y $g(x)=1$

3B. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a\in\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x+y+2z=0 \\ ax-3z=a \\ 2x+ay-z=a \end{cases}$$

b) Resuélvelo para el valor $a=1$.

4B. Dado el punto $P(1,0,0)$ y la recta $r\equiv\begin{cases} x=2\lambda \\ y=3+\lambda, \quad \lambda\in\mathbb{R}: \\ z=-1 \end{cases}$

a) Da unas ecuaciones paramétricas de la recta s que pasa por P y corta perpendicularmente a r.
b) Calcula la distancia de P a r.

Reserva 1 de 2012

Propuesta A

1A. a) Enuncia el Teorema del valor medio de Lagrange y da su interpretación geométrica.
b) Calcula un punto del intervalo $[0,2]$ en el que la recta tangente a la gráfica de $f(x)=3x^2+2x+1$ sea paralela a la cuerda (o segmento) que une los puntos de la gráfica de $f(x)$ en $x=0$ y $x=2$.

2A. Calcula la integral:

$$\int\frac{x+2}{x^3+x^2}\,\mathrm{d}x$$

3A. Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) Calcula A^n cuando $n\in\mathbb{N}$ es par.
b) Resuelve la ecuación matricial $6A^{20}X=B-3AX$, donde X es una matriz cuadrada de orden 3. (Indicación: Sustituye de inicio el valor de A^{20} para facilitar los cálculos)

4A. Dadas las rectas

$$r \equiv \frac{x+1}{2} = y = \frac{z-1}{3} \qquad s \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = a + \lambda \\ z = -\lambda \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

a) Calcula el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que r y s se corten en un punto. Da dicho punto de corte.
b) Para el valor de a obtenido, calcula la ecuación general del plano π que contiene a r y s.

Propuesta B

1B. Sabiendo que la función

$$f(x) = \frac{ax+b}{x^2+1} \qquad a,b \in \mathbb{R}$$

tiene un punto crítico en $(1,1)$, calcula a y b y demuestra que el punto crítico es un máximo.

2B. a) Esboza la región encerrada entre el eje de abscisas y las parábolas

$$f(x) = x^2 \text{ y } g(x) = x^2 - 4x + 4 .$$

b) Calcula el área de la región anterior.

3B. a) Discute el sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $m \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} mx + z = 1 \\ my + z = m \\ -mx - my + (m+1)z = -m - 1 \end{cases}$$

b) Calcula la solución cuando el sistema sea compatible indeterminado.

4B. Dados el plano $\pi \equiv y - z = 3$ y la recta

$$r \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

a) Estudia la posición relativa de π y r .
b) Da unas ecuaciones paramétricas de la recta s paralela a π que corta a r perpendicularmente en el punto $P(0,1,-1)$.

Reserva 2 de 2012

Propuesta A

1A. a) Interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto.
b) Encuentra el punto de la función $f(x) = x^4 - 8x^3 + 18x^2 + 30x + 1$ en el que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ es mínima. Encuentra también el punto donde la pendiente es máxima.

2A. Encuentra una primitiva $F(x)$ de la función $f(x) = (x^2+1)e^x$ tal que $F(0) = 5$.

3A. Dada la matriz

$$A=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & -b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & -b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \qquad a,b\in\mathbb{R},\;\; a\neq 0,\, b\neq 0$$

a) Calcula AA^T, donde A^T es la matriz traspuesta de A.
b) Razona que siempre existe la matriz inversa de A, independientemente de los valores $a,b\in\mathbb{R},\;\; a\neq 0,\, b\neq 0$.

4A. Dados los planos $\pi_1 \equiv x-2y-z=0$ y $\pi_2 \equiv 2x-y+\lambda z=4$:

a) Calcula el valor del parámetro $\lambda\in\mathbb{R}$ para que los planos π_1 y π_2 sean perpendiculares.
b) Para el valor de $\lambda\in\mathbb{R}$ obtenido en el apartado anterior, obtén unas ecuaciones paramétricas de la recta r paralela a π_1 y a π_2 que pasa por el punto $P(1,2,3)$.

Propuesta B

1B. Calcula el valor del parámetro $a\in\mathbb{R},\; a>0$, para que se verifique la igualdad

$$\lim_{x\to 0} e^{\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x}} = \lim_{x\to 0}\left(\cos 2x\right)^{\frac{a}{x^2}}$$

2B. a) Esboza la región encerrada entre la parábola $f(x)=x^2-6x+9$ y la recta $g(x)=2x+2$.
b) Calcula el área de la región anterior.

3B. Un grupo de amigos se reúne cada sábado en la misma cafetería. Hace dos sábados tomaron 4 cafés, 6 refrescos y 2 infusiones, siendo el precio total 15,40 euros. El sábado pasado tomaron 5 cafés, 4 refrescos y 3 infusiones, siendo el precio total 14,40 euros. Hoy sábado han pedido 3 cafés, 8 refrescos y 1 infusión.
Cuando piden la cuenta, el camarero les dice que el precio total es 18 euros.
Se pide:

a) Plantea un sistema de ecuaciones lineales con los datos del enunciado anterior.
b) Asumiendo que los dos sábados anteriores los precios totales estaban bien calculados y que los precios de los cafés, refrescos e infusiones no han cambiado, razona que hay un error en la cuenta de este sábado.

4B. Dadas las rectas

$$r\equiv \frac{x}{2}=y+1=\frac{z-1}{3}, \qquad s\equiv\begin{cases} x=\lambda \\ y=\lambda \\ z=1-\lambda \end{cases} \qquad \lambda\in\mathbb{R}$$

a) Estudia su posición relativa.
b) Calcula la distancia entre r y s.

Junio de 2013

PROPUESTA A

1A. a) Enuncia el Teorema de Bolzano.

b) Razona que las gráficas de las funciones $f(x) = 3x^5 - 10x^4 + 10x^3 + 3$ y $g(x) = e^x$ se cortan en algún punto con coordenada de abscisa entre -1 y 0.

c) Calcula los puntos de inflexión de $f(x)$.

2A. Calcula el valor del parámetro $a \in \mathbb{R},\ a > 0$, para que el valor (en unidades de superficie) del área de la región determinada por la parábola $f(x) = -x^2 + a^2$ y el eje de abscisas, coincida con la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = -a$.

3A. a) Encuentra dos matrices A, B cuadradas de orden 2 que cumplan:

- Su suma es la matriz identidad de orden 2.
- Al restar a la matriz A la matriz B se obtiene la traspuesta de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

b) Si M es una matriz cuadrada de orden 2 tal que $|M| = 7$, razona cuál es el valor de los determinantes $|M^2|$ y $|2M|$.

4A. a) Estudia la posición relativa del plano $\pi \equiv x - y - z = a$ y la recta

$$r \equiv \begin{cases} 2x + y + az = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

b) Calcula la distancia entre π y r para cada valor de $a \in \mathbb{R}$.

PROPUESTA B

1B. a) Calcula los valores de los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$ para que la función

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx}{x + 1}$$

tenga como asíntota oblicua la recta $y = 2x + 3$.

b) Para los valores encontrados, escribe la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisas $x = 0$.

2B. Calcula las siguientes integrales:

$$\int \frac{2 \operatorname{sen} x \cos x}{1 + \operatorname{sen}^2 x}\, dx, \qquad \int \frac{x^2 + x - 4}{x^3 - 4x}\, dx$$

3B. a) Sabiendo que

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = 2$$

donde $a, b, c \in \mathbb{R}$, calcula los determinantes

$$\begin{vmatrix} a-1 & b-1 & c-1 \\ a^2-1 & b^2-1 & c^2-1 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} (a+1)^2 & (b+1)^2 & (c+1)^2 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

indicando las propiedades que usas en cada caso para justificar tu respuesta.

b) Razona que, puesto que $|A| = 2$, los parámetros $a, b, c \in \mathbb{R}$ deben ser distintos entre sí (no puede haber dos iguales).

4B. a) Estudia la posición relativa de las rectas

b) Calcula la distancia entre las rectas r y s:

$$r \equiv \begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+y-2z=1 \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x-z=0 \\ x+2y-z=12 \end{cases}$$

Septiembre de 2013

PROPUESTA A

1A. a) Calcula el valor de $a \in \mathbb{R},\ a > 0$, para que la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - e^{-x}}{ax} & \text{si} \quad x < 0 \\ \left(\dfrac{2x+7}{2x+1}\right)^x & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

sea continua en $x = 0$.

b) Calcula el límite $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2A. Calcula las siguientes integrales:

$$\int \frac{1+x+\sqrt{x}}{x^2}\,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{e^x}{e^{2x}-3e^x+2}\,\mathrm{d}x$$

Observación: El cambio de variable $t = e^x$ puede ayudarte a calcular la segunda integral.

3A. a) Despeja X en la ecuación matricial $XA - B = 2X$, donde A, B y X son matrices cuadradas de orden 3.

b) Calcula X, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

4A. a) Estudia la posición relativa de las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x-2z=1 \\ y-z=2 \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x+y+z=1 \\ x-2y+2z=a \end{cases}$$

en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

b) Encuentra el punto de corte de las rectas en el caso en que sean secantes.

PROPUESTA B

1B. a) Interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto.

b) Halla el punto de la gráfica de la función $f(x)=x^3+3x^2+1$ donde la recta tangente tiene pendiente mínima.

2B. a) Esboza la región encerrada entre las gráficas de las funciones
$f(x)=\dfrac{1}{x}$ y $g(x)=-2x+3$

b) Calcula el área de la región anterior.

3B. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $m\in\mathbb{R}$

$$\begin{cases} x+y-5z=-1 \\ 2x-y-3z=1-m \\ x-2y+2z=m \end{cases}$$

b) Calcula la solución cuando el sistema sea compatible indeterminado.

4B. a) Dados los puntos $P(4, 2, 3)$ y Q(2, 0, -5), da la ecuación implícita del plano π de modo que el punto simétrico de P respecto a π es Q.

b) Calcula el valor del parámetro $\lambda\in\mathbb{R}$ para que el plano determinado por los puntos P, Q y $R(\lambda,1,0)$ pase por el origen de coordenadas.

Reserva 1 de 2013

PROPUESTA A

1A. a) Enuncia el Teorema de Rolle.

b) Razona que existe al menos un punto en el intervalo (1, 2) donde la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)=x^5+3x^4-5x^3-15x^2+4x+12$ tiene pendiente nula.

2A. Calcula el valor del parámetro $a\in\mathbb{R},\ a>0$, para que el área de la región comprendida entre las gráficas de las parábolas $f(x)=-x^2+a^2$ y $g(x)=-4x^2+4a^2$ sea 32 unidades de superficie.

3A. a) Despeja X en la ecuación matricial $AX=I_3-2BX$, donde I_3 es la matriz identidad de orden 3 y A, B y X son matrices cuadradas de orden 3.

b) Calcula X, siendo

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4A. Dados los planos $\pi\equiv ax+2y+z=4,\ a\in\mathbb{R}$ y $\pi'\equiv 2x-4y-2z=b,\ b\in\mathbb{R}$:

a) Razona para que valores de $a,b\in\mathbb{R}$ son π y π' coincidentes.

b) Razona para que valores de $a,b\in\mathbb{R}$ son π y π' paralelos no coincidentes.

c) Razona para que valores de $a,b\in\mathbb{R}$ son π y π' perpendiculares.

PROPUESTA B

1B. a) Calcula para que valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$ se verifica la igualdad

$$\lim_{x \to 0} \left(\cos(ax) \right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-2}$$

b) Calcula el límite

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} \right)$$

2B. Calcula las siguientes integrales:

$$\int \frac{2\cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x}\, dx, \qquad \int \left(x^2 + 2x \right) \ln x \, dx$$

3B. Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ -4x - 2y + mz = 0, \quad m \in \mathbb{R} \\ 3x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

a) ¿Existe algún valor del parámetro *m* para el que el sistema sea incompatible?
b) Estudia para que valor del parámetro *m* el sistema tiene alguna solución distinta de la trivial $x = y = z = 0$.
c) Resuelve el sistema para todos los valores de $m \in \mathbb{R}$.

4B. Dados el punto $P(1, 0,1)$ y la recta

$$r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 + \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$$

a) Da unas ecuaciones paramétricas de la recta 5 que corta perpendicularmente a *r* y pasa por el punto *P*.
b) Calcula el punto simétrico *Q* de *P* respecto a *r*.

Reserva 2 de 2013

PROPUESTA A

1A. Si la media aritmética de dos números reales positivos es 24, calcula el valor de dichos números para que el producto de uno de ellos por el cuadrado del otro sea máximo.

2A. Calcula las siguientes integrales:

$$\int \left(\frac{2\ln x}{x} + \ln x \right) dx, \qquad \int 3\sqrt{2x+1}\, dx$$

3A. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $m \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 2y - z = m \\ 3x - 2z = 11 \\ y + z = 6 \\ 2x + y - 4z = m \end{cases}$$

b) Calcula la solución cuando el sistema sea compatible determinado.

4A. Dado el plano $\pi \equiv x - z = 0$ y las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 \\ z = -1 - \lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \qquad \text{y} \qquad s \equiv \begin{cases} x + y = 2 \\ 4y + 2z = 6 \end{cases}$$

a) Halla el ángulo que forman π y r. Razona cuántos planos hay perpendiculares a π que contengan la recta r.

b) Halla la posición relativa de π y s. Razona cuantos planos hay perpendiculares a π que contengan la recta s.

PROPUESTA B

1B. a) Enuncia el Teorema del valor medio de Lagrange.

b) Calcula un punto del intervalo $[-2\ ,\ 2]$ en el que la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 3x + 2$ sea paralela a la recta que pasa por los puntos $(-2, 0)$ y (2,12).

2B. El área del recinto encerrado entre la gráfica de la parábola $f(x) = a(x^2 - 2x)$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, y el eje de abscisas, es de 12 unidades de superficie. Calcula el valor de a.

3B. Evariste Galois, Niels Abel y Srinivasa Ramanujan fueron tres genios matemáticos que antes de sus prematuras muertes dejaron desarrollada una importante obra matemática. Calcula las edades que tenían cuando fallecieron, sabiendo que su suma es 78, que su media aritmética coincide con la edad de Abel, y que cuatro veces la edad de Ramanujan más dos veces la de Abel es nueve veces la edad de Galois.

4B. a) Determina el valor del parámetro $k \in \mathbb{R}$ para que la recta

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = k - \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$$

este contenida en el plano $\pi \equiv x + 2y + z = 7$.

b) Para el valor de k obtenido en el apartado anterior, obtén la ecuación implícita de un plano π' que corte perpendicularmente a π, de modo que la intersección de ambos planos sea r.

Junio de 2014

PROPUESTA A

1A. a) Calcula los valores de los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$ para que la función

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2x+a & \text{si} \quad x\le 0 \\ x^2+be^x+3 & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$

sea continua y derivable en $x = 0$.
b) Para los valores encontrados, calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

2A. Calcula la integral definida

$$\int_0^1 \left(x^2+x+1\right)e^{-x}\ \mathrm{d}x$$

3A. a) Sabiendo que A es una matriz cuadrada de orden 2 tal que $|A|=5$, calcula razonadamente el valor de los determinantes $|-A|,\ \ |A^{-1}|,\ \ |A^T|,\ \ |A^3|$

b) Sabiendo que

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}=2$$

calcula, usando las propiedades de los determinantes,

$$\begin{vmatrix} 3-a & -b & 1-c \\ 1+a & 1+b & 1+c \\ 3a & 3b & 3c \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2a & 2b & 2c \\ 0 & 30 & 0 & 10 \\ 1 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix}$$

4A. a) Halla $a\in\mathbb{R}$ para que las rectas

$$r\equiv\begin{cases} x+2y-z=1 \\ -x+y-3z=2 \end{cases} \quad \text{y} \quad s\equiv\begin{cases} x+y=0 \\ 3x+2y+z=a \end{cases}$$

se corten en un punto.
b) Para dicho valor de a, da la ecuación implícita de un plano π que contenga a r y s.

PROPUESTA B

1B. a) Calcula los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)=1+x^2e^{-x}$.
b) Calcula las asíntotas de $f(x)$.

2B. Para cada $c>2$ definimos $A(c)$ como el área de la región encerrada entre la gráfica de

$$f(x)=\frac{1+x^2}{x^4}$$

el eje de abscisas, y las rectas $x = 1$ y $x = c$.

a) Calcula $A(c)$.

b) Calcula

$$\lim_{c\to+\infty} A(c)$$

3B. a) Se sabe que el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x-2y+3z=4 \\ 2x-y+z=8 \\ x-5y+az=4 \end{cases} \qquad a\in\mathbb{R}$$

es compatible indeterminado. Calcula a y resuelve el sistema para dicho valor del parámetro.

b) Para el valor de a encontrado, da una solución particular del sistema tal que $x=y$.

4B. Dados el plano $\pi\equiv x-y=4$ y la recta

$$r\equiv\begin{cases} x+z=1 \\ 2x+y+az=0 \end{cases} \qquad a\in\mathbb{R}$$

se pide:

a) Estudia si existe algún valor del parámetro a para el que r y π sean paralelos.
b) Estudia si existe algún valor del parámetro a para el que r y π se corten perpendicularmente.
c) Para $a=1$, da la ecuación implícita de un plano π' que contenga a r y corte perpendicularmente a π.

Septiembre de 2014

PROPUESTA A

1A. a) Calcula los intervalos de concavidad y convexidad de la función

$$f(x)=\frac{x-1}{2x+2}$$

Estudia si tiene puntos de inflexión.

b) ¿En qué puntos de la gráfica de $f(x)$ la recta tangente es paralela a la recta $y=x-2$?

2A. a) Esboza la región encerrado entre las gráficas de las funciones $f(x)=\operatorname{sen}x$, $g(x)=-\operatorname{sen}x$ y las rectas $x=\frac{\pi}{2}$ y $x=\frac{3\pi}{2}$.

b) Calcula el área de la región anterior.

3A. a) Discute, en función del parámetro $m\in\mathbb{R}$, el rango de la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ m+1 & 3 & m-1 \\ m-1 & m+3 & -1 \end{pmatrix}$$

b) ¿Para qué valores del parámetro $m\in\mathbb{R}$ existe la matriz inversa de A?

4A. a) Estudia la posición relativa de las rectas

$$r\equiv x=-y=z \qquad \text{y} \qquad s\equiv x=y=z-2$$

b) Calcula la distancia entre r y s.

PROPUESTA B

1B. Para la función $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$:

a) Estudia sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como sus extremos relativos.
b) Estudia si tiene asíntota oblicua cuando $x \to +\infty$.

2B. Calcula las integrales

$$\int \frac{e^x}{e^x - e^{-x}}\,dx \qquad \text{y} \qquad \int \frac{2}{4+x^2}\,dx$$

Nota: en la primera integral puede ayudarte hacer el cambio de variable $t=e^x$.

3B. Encuentra dos matrices A, B cuadradas de orden 2 que sean solución del sistema matricial

$$\begin{cases} 2A+B=C^2 \\ A-B=C^{-1} \end{cases}$$

siendo

$$C=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

4B. a) Estudia, en función del valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$, la posición relativa de los planos

$$\pi_1 \equiv x+y-z=3$$
$$\pi_2 \equiv x-y+az=-1$$
$$\pi_3 \equiv ax+y-z=5$$

b) Calcula, en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$, la distancia entre los planos π_1 y π_3 .

Junio de 2015

PROPUESTA A

1A. Dada la función $f(x)=e^{\operatorname{sen} x}+x^2+ax+b$ con $a,b \in \mathbb{R}$:

a) Determina los parámetros $a,\ b \in \mathbb{R}$ sabiendo que la gráfica de $f(x)$ pasa por el punto $(0,2)$ y que en dicho punto tiene un extremo relativo.
b) Para los valores de los parámetros encontrados, estudia si dicho extremo relativo es un máximo o un mínimo.

2A. Dada la función

$$g(x)=\begin{cases} 2x+4 & \text{si} \quad -2 \le x < 0 \\ (2x-2)^2 & \text{si} \quad 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

a) Esboza la región encerrada entre la gráfica de $g(x)$ y el eje de abscisas.
b) Calcula el área de la región anterior.

3A. a) Despeja X en la ecuación matricial $XA+B=X$, donde A, B y X son matrices cuadradas de orden 3.
b) Calcula X , siendo

$$A=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\2&1&0\end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B=\begin{pmatrix}0&3&-2\\-1&4&0\\1&2&1\end{pmatrix}$$

4A. a) Calcula la distancia del punto $P(-1,2,0)$ a la recta

$$r\equiv\begin{cases}-x+y+2z=0\\y+z=1\end{cases}$$

b) Calcula el punto simétrico de P respecto de r.

PROPUESTA B

1B. Calcula el dominio y las asíntotas de las siguientes funciones

$$f(x)=\frac{\sqrt{2x}-x}{x-2} \qquad \text{y} \qquad g(x)=\frac{x^3}{x^2-4x+4}$$

2B. Dada la función $f(x)=(x+1)e^{2x}$, se pide:

a) Calcula los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión de $f(x)$.

b) Encuentra una primitiva de la función $f(x)$ que pase por el origen de coordenadas.

3B. He pensado un número de tres cifras tal que la cifra de las decenas es la media aritmética de las otras dos. Además, si a dicho número se le resta el que resulta de invertir el orden de sus cifras, la diferencia es 198. Por último, las tres cifras de mi número suman 12.

a) Plantea un sistema de ecuaciones lineales que recoja la información anterior y clasifícalo. Para ello, puede serte útil observar que el número cuya cifra de las centenas es x, la de las decenas y, y la de las unidades z, puede expresarse como $100x+10y+z$.

b) Determina, si el problema tiene solución, el número de tres cifras que he pensado.

4B. Dados los puntos $A(1,\lambda+1,-1)$, $B(2,\lambda,0)$ y $C(\lambda+2,0,1)$, se pide:

a) Estudia si existe algún valor del parámetro $\lambda\in\mathbb{R}$ para el que A, B y C estén alineados.

b) Para $\lambda=-1$, da la ecuación implícita del plano π que contiene a los puntos A, B y C.

Septiembre de 2015

PROPUESTA A

1A. Calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+2x)}{xe^{\operatorname{sen}x}} \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to0}(1+\tan x)^{\frac{1}{x+\operatorname{sen}x}}$$

Nota: $\tan x$ denota a la tangente de x.

2A. a) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)=x^2$ en el punto de abscisa $x=2$.

b) Esboza la región encerrada entre la gráfica de $f(x)$, la recta calculada en el apartado a) y el eje de ordenadas.
c) Calcula el área de la región anterior.

3A. a) Enuncia el Teorema de Rouché-Fröbenius.
b) Razona que el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x+3y-3z=4 \\ 2x-y+z=1 \\ 3x+2y-az=5 \end{cases} \qquad a\in\mathbb{R}$$

no es compatible para ningún valor de $a\in\mathbb{R}$.
c) Resuelve el sistema en el caso en que sea compatible indeterminado.

4A. Dada la recta

$$r\equiv\begin{cases} 2x-y+z=3 \\ x-z=1 \end{cases}$$

a) Da la ecuación del plano π perpendicular a r que pasa por el punto $P(2,1,1)$.
b) Halla el volumen del tetraedro cuyos vértices son el origen de coordenadas y los tres puntos que resultan al hacer la intersección de π con los ejes coordenados.

PROPUESTA B

1B. Determina cómo dividir un segmento de 90 cm en dos trozos, de forma que la suma del área de semicírculo cuyo diámetro es uno de ellos y el área de un triángulo rectángulo que tiene como base el otro trozo y cuya altura es π veces su base, sea mínima.
Nota: recuerda que el área de un círculo de radio r es πr^2.

2B. Calcula las integrales

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\left(4x^3-\sqrt[4]{x}\right)\mathrm{d}x \qquad \text{y} \qquad \int x\ln x\ \mathrm{d}x$$

3B. a) Despeja X en la ecuación matricial $AX-A=2A^2$, donde A y X son matrices cuadradas de orden 3.
b) Calcula X, siendo

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

c) Calcula los determinantes de las matrices A^{101} y A^{1000}.

4B. Dados el plano $\pi\equiv x+ay+3z=2,\ a\in\mathbb{R}$, y la recta

$$r\equiv\begin{cases} x-2y+z=-1 \\ 2x-y=0 \end{cases}$$

a) Halla a para que π y r se corten perpendicularmente.
b) Halla a para que π y r sean paralelos.

Junio de 2016

PROPUESTA A

1A. Dada la función $f(x)=x^3+3x^2+ax-6,\ a\in\mathbb{R}$, se pide:

a) Determinar el valor del parámetro $a\in\mathbb{R}$ para que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en su punto de inflexión sea -3.

b) Para el valor del parámetro encontrado, calcular los extremos relativos e intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

2A. Calcula la integral definida

$$\int_0^{\frac{\pi^2}{2}} \frac{\cos\sqrt{x}}{2}\,\mathrm{d}x$$

Nota: puede ayudarte hacer el cambio de variable $t=\sqrt{x}$ y a continuación aplicar integración por partes.

3A. a) Discute el sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $m\in\mathbb{R}$

$$\begin{cases} x--y+mz=0 \\ 4x-3y+2z=m \\ -mx+y-z=1-m \end{cases}$$

b) Calcula la solución cuando el sistema sea compatible indeterminado.

4A. Sea r la recta determinada por el punto $P(1,0,1)$ y el vector $\vec{v}=(1,-1,0)$.

a) Calcula el punto de r más cercano al punto $Q(0,0,1)$.

b) Calcula el punto simétrico de Q respecto a r.

PROPUESTA B

1B. a) Enuncia los teoremas de Bolzano y de Rolle.

b) Razona que la ecuación $3e^x+x^5=0$ tiene al menos una solución real.

c) Razona que, de hecho, dicha solución es única.

2B. a) Calcula el área de la región acotada por las gráficas de las parábolas $f(x)=x^2-4x+3$ y $g(x)=-x^2+2x+11$.

b) Calcula $c\in\mathbb{R}$ para que las rectas tangentes a las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ en el punto de abscisa $x=c$ tengan la misma pendiente.

3B. Sabiendo que

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ x & y & z \\ a & 2b & 3c \end{vmatrix}=10$$

donde $x,y,z,a,b,c\in\mathbb{R}$, calcula los determinantes

$$\begin{vmatrix} 14 & 14 & 21 \\ x+4 & y+4 & z+6 \\ \frac{a}{5} & \frac{2b}{5} & \frac{3c}{5} \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 0 & 3x & y & z \\ 0 & 3a & 2b & 3c \\ 0 & 6 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

indicando las propiedades que usas en cada caso para justificar tu respuesta.

4B. Dados los planos

$$\pi_1 \equiv ax + y + 2z = 2, \qquad \pi_2 \equiv x + y + z = 0 \quad \text{y} \quad \pi_3 \equiv x + ay + z = a$$

donde $a \in \mathbb{R}$, se pide:

a) Estudiar la posición relativa de los planos anteriores en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

b) Para el valor $a = 1$, calcular la distancia entre π_2 y π_3.

Septiembre de 2016

PROPUESTA A

1A. Se quiere construir un depósito de chapa abierto superiormente con forma de prisma recto de base cuadrada, de 100 m^3 de capacidad, lo más económico posible, sabiendo que:

- El coste de la chapa usada para los laterales es de 100 euros el metro cuadrado.
- El coste de la chapa usada para la base es de 200 euros el metro cuadrado.

2A. Dada la función

$$g(x) = (x+b)\cos x \qquad b \in \mathbb{R}$$

a) Calcula la primitiva $G(x)$ de $g(x)$ que verifica $G(0) = 1$.

b) Calcula el valor de $b \in \mathbb{R}$ sabiendo que

$$\lim_{x \to 0} \frac{G(x) - g'(x)}{x} = 2$$

3A. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \text{ y } D = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) ¿Qué dimensión debe tener una matriz X para poder efectuar el producto matricial AXB?

b) Despeja X en la ecuación matricial $AXB + C = D$

c) Calcula la matriz X.

4A. Dadas las rectas

$$r \equiv 2 - x = y - 2 = \frac{z}{3} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = c - 3\lambda \end{cases} \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}$$

donde $c \in \mathbb{R}$, se pide:

a) Estudiar la posición relativa de r y s en función del parámetro $c \in \mathbb{R}$.

b) Hallar el punto de intersección de r y s cuando dichas rectas sean secantes.

PROPUESTA B

1B. Dada la función

$$f(x) = 2xe^{1-x}$$

se pide:

a) Estudiar si tiene asíntotas horizontales.
b) Calcular sus puntos de inflexión.

2B. Dadas las funciones $f(x) = \frac{2}{x}$ y $g(x) = 3 - x$, se pide:

a) Esbozar la región encerrada entre las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$.
b) Calcular el área de la región anterior.

3B. a) Enuncia el Teorema de Rouché-Fröbenius.
b) Razona que un sistema de tres ecuaciones lineales con cuatro incógnitas no puedes ser compatible determinado.
c) Determina para qué valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$ el sistema

$$\begin{cases} 2x + y - z + 2t = 2 \\ 5x + y + 2z = 1 \\ x + 8y - 5z + 6t = a \end{cases}$$

es incompatible.

4B. Dados los planos

$$\pi \equiv 2x - 3y + z = 0 \quad \text{y} \quad \pi' \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda + \mu \\ y = \lambda - \mu \\ z = 2 + 2\lambda + \mu \end{cases} \quad \text{con } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

y el punto $P(2, -3, 0)$, se pide:

a) Hallar la ecuación continua de la recta r que pasa por P y es paralela a la recta s determinada por la intersección de π y π'.
b) Calcular el ángulo entre los planos π y π'.

Junio de 2017

PROPUESTA A

1A. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a & \text{si} \quad x \leq 2 \\ -x^2 + bx - 9 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

a. Calcula razonadamente los parámetros a y b para que $f(x)$ sea derivable en todo $\mathbb{R}$.
b. Enuncia el teorema de Rolle y comprueba si, para los valores hallados en el apartado anterior, la función $f(x)$ verifica las hipótesis del teorema en el intervalo $[-2, 6]$.

2A. Con una chapa metálica de 8×5 metros se desea construir, cortando cuadrados en las esquinas, un cajón sin tapa de volumen máximo. Halla razonadamente las dimensiones de dicho cajón.

3A. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} ax - y + z = a-4 \\ 2x + y - az = a-1 \\ y - z = -3 \end{cases}$$

b) Resuelve razonadamente para el valor $a=-1$.

4A. Dado el punto $P(2,0,-1)$ y las rectas

$$r \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{0} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x-y+2z+4=0 \\ x+z+1=0 \end{cases}$$

a) Determina razonadamente la posición relativa de las rectas r y s.

b) Encuentra razonadamente la ecuación general del plano que pasando por P es paralelo a r y a s.

5A. a) Los operarios A, B y C producen, respectivamente, el 50 %, el 30 % y el 20 % de las resistencias que se utilizan en un laboratorio de electrónica. Resultan defectuosas el 6 % de las resistencias producidas por A, el 5 % de las producidas por B y el 3 % de las producidas por C. Se selecciona al azar una resistencia:

a1) Calcula razonadamente la probabilidad de que sea defectuosa.

a2) Si es defectuosa, calcula razonadamente la probabilidad de que proceda del operario A.

b) Las resistencias se empaquetan al azar en cajas de 5 unidades. Calcula razonadamente la probabilidad de:

b1) Que en una caja haya exactamente tres resistencias fabricadas por B.

b2) Que en una caja haya al menos dos fabricadas por B.

n	k \ p	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,33	0,35	0,40	0,45	0,49	0,50
5	0	0,9510	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778	0,0503	0,0345	0,0313
	1	0,0480	0,2036	0,3281	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3292	0,3124	0,2592	0,2059	0,1657	0,1563
	2	0,0010	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3292	0,3364	0,3456	0,3369	0,3185	0,3125
	3	0,0000	0,0011	0,0081	0,0244	0,0512	0,0879	0,1323	0,1646	0,1811	0,2304	0,2757	0,3060	0,3125
	4	0,0000	0,0000	0,0005	0,0022	0,0064	0,0146	0,0284	0,0412	0,0488	0,0768	0,1128	0,1470	0,1563
	5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,0041	0,0053	0,0102	0,0185	0,0282	0,0313

PROPUESTA B

1B. Calcula razonadamente los siguientes límites:

a) $\displaystyle \lim_{x\to -2} \frac{x^3+3x^2-4}{x^3+5x^2+8x+4}$ b) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{x\ln(x+1)}{2-2\cos x}$

Nota: $\ln$ denota el logaritmo neperiano.

2B. Dadas las funciones $f(x)=-x^2$ y $g(x)=x^2-2x-4$:

a) Calcula razonadamente el área del recinto cerrado limitado por sus gráficas.

b) Encuentra razonadamente la ecuación de la recta normal a la gráfica de $g(x)$ en el punto de abscisa $x=-3$.

3B. Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}2&1&0\\-1&0&0\\1&2&-1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-1&0&1\\2&-1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\ \text{y}\ C=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&3&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}$$

a) ¿Tiene inversa la matriz $2I_3+B$? Razona la respuesta.

b) Calcula razonadamente la matriz X que verifica que $2X+C=A-XB$.

4B. a) Encuentra razonadamente la ecuación de la recta, en su forma general o implícita, que contiene a los puntos $P(0,1,-2)$ y $Q(4,-3,0)$.

b) Encuentra razonadamente un punto que equidiste de P y Q, y que pertenezca a la recta:

$$r\equiv\begin{cases}x=2+\lambda\\ y=-\lambda\\ z=-5\end{cases}\quad \text{con } \lambda\in\mathbb{R}$$

5B. a) En mi casa dispongo de dos estanterías A y B. En A tengo 20 novelas, 10 ensayos y 10 libros de matemáticas y en la B tengo 12 novelas y 8 libros de matemáticas. Elijo una estantería al azar y de ella, también al azar, un libro. Calcula razonadamente la probabilidad de que:

a1) El libro elegido sea de matemáticas.

a2) Si el libro elegido resultó ser de matemáticas, que fuera de la estantería B.

b) El tiempo de espera en una parada de autobús se distribuye según una distribución normal de media 15 minutos y desviación típica 5 minutos.

b1) Calcula razonadamente la probabilidad de esperar menos de 13 minutos.

b2) ¿Cuántos minutos de espera son superados por el 33 % de los usuarios? Razona la respuesta.

a	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879

Septiembre de 2017

PROPUESTA A

1A. a) Calcula razonadamente el área de la región determinada por la curva $f(x)=(x-1)(x+2)$, las rectas $x=-3,\ x=2$ y el eje de abscisas. Esboza dicha región.

b) Encuentra razonadamente la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x=2$.

2A. a) Determina el valor de $k\in\mathbb{R}$ para que la siguiente función sea continua en $x=0$:

$$f(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{x+1}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}} & \text{si} \quad x<0\\ 6x+k & \text{si} \quad x\geq 0\end{cases}$$

b) Enuncia el teorema de Bolzano y comprueba si la ecuación $\cos x = 2 - x$ tiene alguna solución real en el intervalo $\left[0, 2\pi\right]$.

3A. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\left.\begin{array}{ccccccc} ax & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & ay & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & az & = & 0 \end{array}\right\}$$

b) Resuélvelo razonadamente para el valor $a = 0$.

4A. Dados los planos $\alpha \equiv -x + 2y + z + 2 = 0$ y $\beta \equiv -2y + z = 0$:

a) Calcula razonadamente el volumen del tetraedro formado por el origen de coordenadas y los puntos de intersección del plano α con los tres ejes coordenados.

b) Encuentra razonadamente la ecuación general o implícita de la recta paralela a los planos α y β que pasa por el punto $P\left(0, -1, 3\right)$.

5A. a) En una empresa hay tres robots A, B y C dedicados a soldar componentes electrónicos en placas de circuito impreso. El 25 % de los componentes son soldados por el robot A, el 20 % por el B y el 55 % por el C. Se sabe que la probabilidad de que una placa tenga un defecto de soldadura es de 0,03 si ha sido soldado por el robot A, 0,04 por el robot B y 0,02 por el robot C.

a1) Elegida una placa al azar, calcula razonadamente la probabilidad de que tenga un defecto de soldadura.

a2) Se escoge al azar una placa y resulta tener un defecto de soldadura. Calcula razonadamente la probabilidad de que haya sido soldada por el robot C.

b) Lanzamos cinco veces una moneda trucada. La probabilidad de obtener cara es 0,6. Calcula razonadamente la probabilidad de:

b1) Obtener exactamente tres caras.

b2) Obtener más de tres caras.

n	k \ p	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,33	0,35	0,40	0,45	0,49	0,50
5	0	0,9510	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778	0,0503	0,0345	0,0313
	1	0,0480	0,2036	0,3281	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3292	0,3124	0,2592	0,2059	0,1657	0,1563
	2	0,0010	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3292	0,3364	0,3456	0,3369	0,3185	0,3125
	3	0,0000	0,0011	0,0081	0,0244	0,0512	0,0879	0,1323	0,1646	0,1811	0,2304	0,2757	0,3060	0,3125
	4	0,0000	0,0000	0,0005	0,0022	0,0064	0,0146	0,0284	0,0412	0,0488	0,0768	0,1128	0,1470	0,1563
	5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,0041	0,0053	0,0102	0,0185	0,0282	0,0313

PROPUESTA B

1B. Halla razonadamente las dimensiones más económicas de una piscina de 32 m^3 con un fondo cuadrado, de manera que la superficie de sus paredes y el suelo necesiten la cantidad mínima de material.

2B. Calcula razonadamente las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int \frac{x^3 + 2x^2 + x - 10}{x^2 + x - 2}\, \mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int x^2 \ln x \, \mathrm{d}x$

Nota: ln denota el logaritmo neperiano

3B. Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&-1&0\\1&1&0\end{pmatrix}\quad \text{y}\quad C=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&3&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$$

a) Calcula razonadamente A^{-1}.
b) Calcula razonadamente la matriz X que verifica que $AX+B=C^2$.

4B. a) Halla razonadamente el valor de $a\in\mathbb{R}$ para que el plano $\alpha\equiv x-y-az+5=0$ sea paralelo a la recta

$$r\equiv\frac{x-2}{3}=\frac{y}{-5}=\frac{z}{2}$$

b) Calcula razonadamente la distancia del punto $P(1,2,3)$ a la recta $r\equiv\dfrac{x-3}{2}=y-1=z$.

5B. a) De una urna que contiene tres bolas blancas y dos bolas rojas extraemos, sucesivamente y sin reemplazamiento, dos bolas. Calcula razonadamente la probabilidad de:

a1) Que la segunda bola extraída sea blanca.
a2) Si la segunda bola extraída ha sido blanca, que la primera fuera roja.

b) El tiempo de duración de las llamadas telefónicas a través de cierta centralita se distribuye según una distribución normal de media 5 minutos y varianza 4. Calcula razonadamente:

b1) La probabilidad de que una llamada dure menos de 4,5 minutos.
b2) El tiempo de duración que no es superado por el 33 % de las llamadas.

a	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879

Junio de 2018

PROPUESTA A

1A. a) Enuncia el teorema de Bolzano y justifica razonadamente que la gráfica de la función $f(x)=x^{15}+x+1$ corta al eje OX al menos una vez en el intervalo $[-1,1]$.

b) Calcula razonadamente el número exacto de puntos de corte con el eje OX cuando x recorre toda la recta real.

2A. Calcula razonadamente las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_0^{\pi}\left(x^2-1\right)\cos x\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int\frac{e^x}{e^{2x}+e^x-2}\,\mathrm{d}x$

Nota: En la integral b) puede ayudarte hacer el cambio de variable $e^x=t$.

3A. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a\in\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + 3y - az = 4 \\ x + ay + z = 2 \\ x + 4y - 5z = 6 \end{cases}$$

b) Resuélvelo razonadamente para el valor $a = 2$.

4A. Dado el plano $\alpha \equiv 4x + 2y + 4z - 15 = 0$ y el punto $A(2, -3, 1)$:

a) Calcula la distancia del punto A al plano α.

b) Calcula razonadamente el lugar geométrico de los puntos del espacio cuya distancia al plano α sea igual a la distancia del punto A al plano α.

5A. a) Una planta industrial tiene tres máquinas. La máquina A produce 500 condensadores diarios, con un 3 % de defectuosos, la máquina B produce 700 con un 4 % de defectuosos y la C produce 800 con un 2 % de defectuosos. Al final del día se elige un condensador al azar.

a1) Calcula razonadamente la probabilidad de que sea defectuoso.

a2) Si es defectuoso, calcula razonadamente la probabilidad de que haya sido producido por la máquina A.

b) Lanzamos un dado perfecto cinco veces. Sea X la variable “Número de múltiplos de tres que pueden salir”.

b1) Calcula razonadamente la media y la desviación típica de la variable X.

b2) Calcula razonadamente la probabilidad de obtener cuatro o más múltiplos de tres.

n	k \ p	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,33	0,35	0,40	0,45	0,49	0,50
5	0	0,9510	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778	0,0503	0,0345	0,0313
	1	0,0480	0,2036	0,3281	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3292	0,3124	0,2592	0,2059	0,1657	0,1563
	2	0,0010	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3292	0,3364	0,3456	0,3369	0,3185	0,3125
	3	0,0000	0,0011	0,0081	0,0244	0,0512	0,0879	0,1323	0,1646	0,1811	0,2304	0,2757	0,3060	0,3125
	4	0,0000	0,0000	0,0005	0,0022	0,0064	0,0146	0,0284	0,0412	0,0488	0,0768	0,1128	0,1470	0,1563
	5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,0041	0,0053	0,0102	0,0185	0,0282	0,0313

PROPUESTA B

1B. a) Prueba que cualquiera que sea la constante a, la función $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x + a$ cumple las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[1, 3]$.

b) Calcula razonadamente un punto del intervalo abierto $(1, 3)$ cuya existencia asegura el teorema de Rolle.

c) Calcula razonadamente los puntos de la gráfica $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x$ donde la recta tangente tenga la misma pendiente que la recta $y = 4x + 2$.

2B. Dadas las funciones $f(x) = 2xe^{-x}$ y $g(x) = x^2 e^{-x}$, calcula razonadamente el área del recinto cerrado limitado por las gráficas de las funciones.

3B. a) Encuentra los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que la siguiente matriz tenga inversa:

$$A = \begin{pmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a-2 & 1 \\ a & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Para $a=2$ calcula razonadamente A^{-1} y comprueba el resultado.

c) Para $a=0$ calcula razonadamente el valor de los determinantes $\left|A^{-1}\right|$ y $|2A|$.

4B. Dados los vectores $\vec{u}=(0,1,1)$, $\vec{v}=(1,1,-1)$ y $\vec{w}=(2,0,3)$:

a) Determina el valor de $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que el vector $\vec{u}-\lambda\vec{v}$ sea perpendicular a $\vec{w}$.

b) ¿Son linealmente dependientes los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$?

c) Encuentra razonadamente las ecuaciones implícitas o cartesianas de la recta que pase por el punto $P(2,0,2)$ y que sea perpendicular simultáneamente a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

5B. a) El 60 % del censo de una ciudad son mujeres. Las preferencias de las mujeres por los tres partidos que se presentan so: el 30 % vota a A, el 50 % vota a B y el resto a C; mientras que entre los hombres las preferencias son: el 10 % vota a A, el 60 % a B y el recto a C. Elegida al azar una persona del censo, calcula razonadamente la probabilidad de:

a1) Ser hombre y votante de C.

a2) Si resultó ser votante de B, que sea mujer.

b) Las notas que se han obtenido por 1000 opositores han seguido una distribución normal de media 4,05 y desviación típica 2,5.

Bb1) ¿Cuántos opositores han superado el 5? Razona la respuesta.

b2) Si tenemos que adjudicar 330 plazas, calcula razonadamente la nota de corte.

a	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879

Julio de 2018

PROPUESTA A

1A. Después de la administración vía oral de un fármaco, la concentración de este en sangre sigue el modelo: $C(t)=at^2e^{-bt}$, donde $t\in[0,+\infty)$ es el tiempo en horas transcurridas desde la administración y $a,b\in\mathbb{R}^+$.

a) Determina los valores de a y b para que el modelo de la concentración tenga un extremo relativo en el punto $\left(2,8e^{-2}\right)$.

b) Según el modelo anterior, ¿a qué valor tiende la concentración de este fármaco a largo plazo? Interpreta el resultado. **Nota:** a largo plazo se entiende como que $t\to+\infty$.

2A. Dada la función

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+a}{x-1} & \text{si} \quad x<0\\ bx-1 & \text{si} \quad x\geq 0\end{cases}$$

a) Calcula razonadamente los parámetros a y b para que $f(x)$ sea derivable en todo $\mathbb{R}$.

b) Calcula razonadamente el parámetro b para que $\int_1^2 f(x)\,dx = 4$.

3A. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x - y - z = 1 \\ x + 2y + z = -4 \\ x - 4y - 3z = a^2 - 3 \end{cases}$$

b) Resuélvelo razonadamente para el valor $a = -3$.

4A. Dados los puntos $A(-1,3,0)$, $B(2,0,-1)$ y la recta r intersección de los planos $\alpha \equiv x - 2y - 6 = 0$ y $\beta \equiv 2y + z = 0$.

a) Calcula la distancia del punto A a la recta r.

b) Encuentra razonadamente el punto de la recta r cuya distancia al punto A sea mínima.

c) Encuentra razonadamente la ecuación general del plano que pasando por A y B sea paralelo a la recta r.

5A. a) En una tienda de lámparas tienen tres proveedores *A*, *B* y *C*. *A* suministra el 20 %, *B* el 10% y *C* el resto. De las lámparas de *A* salen defectuosas el 5 %, de las de *B* el 4% y de las de *C* el 2 %. Elegida una lámpara al azar de la tienda, calcula razonadamente la probabilidad de:

a1) No salgan defectuosas.

a2) Si resultó defectuosa, que fuera suministrada por *B*.

b) Una parte de un examen consta de cinco peguntas tipo test. Se aprueba dicha parte si contestas correctamente al menos tres preguntas. Calcula razonadamente la probabilidad de aprobar dicha parte, contestando al azar, cuando:

b1) Cada respuesta tiene dos ítems, solamente uno verdadero.

b2) Cada respuesta tiene cuatro ítems, solamente uno verdadero.

n	k \ p	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,33	0,35	0,40	0,45	0,49	0,50
5	0	0,9510	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778	0,0503	0,0345	0,0313
	1	0,0480	0,2036	0,3281	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3292	0,3124	0,2592	0,2059	0,1657	0,1563
	2	0,0010	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3292	0,3364	0,3456	0,3369	0,3185	0,3125
	3	0,0000	0,0011	0,0081	0,0244	0,0512	0,0879	0,1323	0,1646	0,1811	0,2304	0,2757	0,3060	0,3125
	4	0,0000	0,0000	0,0005	0,0022	0,0064	0,0146	0,0284	0,0412	0,0488	0,0768	0,1128	0,1470	0,1563
	5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,0041	0,0053	0,0102	0,0185	0,0282	0,0313

PROPUESTA B

1B. Determina razonadamente el punto (x,y) de la parábola $y = x^2 + 1$ en el que la suma de sus coordenadas alcanza su mínimo valor.

b) Encuentra razonadamente la ecuación de la recta normal a la gráfica de la parábola dada en el punto de abscisa $x = -\frac{1}{2}$.

2B. Calcula razonadamente las siguientes integrales:

a) $\int \frac{2x^3 - x^2 + 2}{x^2 - x}\,dx$ b) $\int_1^2 (2x-3)e^{x-1}\,dx$

3B. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Halla razonadamente dos parámetros a y b tales que $A^2 = aA + bI$.

b) Calcula razonadamente todas las matrices X que verifican que $(A - X)(A + X) = A^2 - X^2$.

4B. Dados los puntos $A(-1,2,0)$, $B(1,0,-4)$ y la recta

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$$

a) Calcula razonadamente un punto C de la recta r que forme con A y B un triángulo isósceles con el lado desigual en AB .

b) Encuentra razonadamente las ecuaciones paramétricas de la recta perpendicular a la recta r y al vector $\overrightarrow{AB}$ y que pase por el punto A .

5B. a) En una clase el 80% aprueba la asignatura de Biología, el 70% aprueba la asignatura de Matemáticas y el 60% aprueba Biología y Matemáticas.

a1) Si se elige un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que apruebe alguna de las asignaturas?

a2) Si se elige un estudiante y ha aprobado Biología, ¿cuál es la probabilidad de que también haya aprobado Matemáticas?

b) Un dispensador de cierto refresco está regulado de manera que cada vez descargue 25 cl de media. Si la cantidad de líquido dispensado sigue una distribución normal de varianza 4:

b1) Calcula razonadamente la probabilidad de que descargue entre 22 y 28 cl. (0,75 puntos)

b2) Calcula razonadamente la capacidad mínima de los vasos que se usen, redondeada a cl, para que la probabilidad de que se derrame el líquido sea inferior al 2,5 %.

a	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767