UNIDAD 10:
DERIVADAS

1. TASA DE VARIACIÓN

La razón de cambio promedio (o tasa de variación media) de $y = f(x)$ con respecto a x en el intervalo $[a, x]$ es:

$$\text{Razón de cambio promedio} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \equiv \text{Tvm}[a, x]$$

Con frecuencia interesa considerar la razón de cambio en intervalos cada vez más pequeños. Esto lleva a definir lo que podemos llamar "razón de cambio puntual (o instantánea) de $y = f(x)$ con respecto a x en el punto a" como:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \equiv \text{Tvi}(a)$$

2. CONCEPTO DE DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO Y DE FUNCIÓN DERIVADA. DERIVADAS LATERALES

En todo el tema y salvo que expresamente se diga otra cosa, $D = (\alpha, \beta) \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo abierto de números reales.

Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función real de variable real y $a \in D$. Se llama <u>derivada de la función f en el punto a</u> al límite siguiente, si existe y es finito:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \qquad [1]$$

Dicho límite, caso de existir, se representa[1] por: $f'(a) = \dfrac{df(a)}{dx} = \left.\dfrac{df}{dx}\right|_{x=a}$.

$f'(a)$ se lee f prima en a (derivada de f en a)

$\dfrac{df(a)}{dx}$ se lee derivada de f respecto de x en a

Si en la definición anterior hacemos el cambio de variable $a + h = x$, el límite [1] se escribe como sigue:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad [2]$$

[1] La notación $\dfrac{d}{dx} f(a)$ fue introducida por Leibniz (1646-1716), y en ella se entiende que $\dfrac{d}{dx}$ es un operador, mientras que la notación $f'(a)$ fue introducida por Lagrange (1736-1813) y la notación $\dot{f}(a)$ se suele usar en física, ingeniería…

Los límites [1] y [2] son simplemente dos formulaciones “distintas” del concepto de derivada de una función en un punto. ¿Cuál usar entonces? La respuesta es que podemos usar una u otra indistintamente porque con ambas vamos a llegar al mismo resultado.

Ejercicios:

1. *Calcula la derivada de las siguientes funciones en los puntos que se indican:*

a) $f(x)=x^2$ en $a=1$

b) $f(x)=3x^2-2x+1$ en $a=2$

c) $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-3x$ en $a=1$

d) $f(x)=\dfrac{3}{x}$ en $a=2$

Si $B\subseteq D$, diremos que f es derivable en B cuando f sea derivable en todos los puntos de B. Sea $C=\{a\in D : f \text{ es derivable en } a\}$. Definimos la función derivada de f por:

$$\begin{aligned} f':C&\to\mathbb{R}\\ a\in C&\mapsto f'(a)\end{aligned}$$

Ejercicios:

2. *Calcula la función derivada de* $f(x)=x^2$

3. *Calcula la función derivada de* $f(x)=x^3-2x+1$ *y como aplicación calcula* $f'(3), f'(-2)$ y $f'(0)$.

4. *Calcula la función derivada de las funciones siguientes:*

a) $f(x)=2x^3-x^2+3x-1$

b) $f(x)=\dfrac{3}{x}$

Una función $f:D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es

derivable por la izquierda[2] en $x=a$ $\Leftrightarrow \exists f'(a-)=\lim_{x\to a-}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\in\mathbb{R}$

derivable por la derecha en $x=a$ $\Leftrightarrow \exists f'(a+)=\lim_{x\to a+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\in\mathbb{R}$

[2] Esta definición es equivalente a la siguiente: Una función $f:D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es

derivable por la izquierda en $x=a$ $\Leftrightarrow \exists f'(a-)=\lim_{h\to 0-}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}\in\mathbb{R}$

derivable por la derecha en $x=a$ $\Leftrightarrow \exists f'(a+)=\lim_{h\to 0+}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}\in\mathbb{R}$

Caracterización:

Son equivalentes:

1) f es derivable en $x = a$
2) $\exists f'(a-),\ f'(a+)$ y $f'(a-) = f'(a+)$

En cuyo caso, $f'(a) = f'(a-) = f'(a+)$

Ejercicios:

5. *Indica en qué puntos es derivable la siguiente función y halla $f'(x)$:*

$$f(x)=\begin{cases} x^2+3x & \text{si } x\le 0 \\ x^3+3x & \text{si } 0<x<2 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x\ge 2 \end{cases}$$

2. *Dada la función* $f(x)=\left|1-x^2\right|=\begin{cases} x^2-1 & x<-1 \\ 1-x^2 & -1\le x\le 1 \\ x^2-1 & x>1 \end{cases}$

Estudiar la continuidad, la derivabilidad y representarla gráficamente.

3. *Halla el valor de a para que $f(x)$ sea derivable en $x=1$, siendo*

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2 & \text{si } x\le 1 \\ ax+1 & \text{si } x>1 \end{cases}$$

4. *Consideremos la función* $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & 0<x<b \\ 1-\dfrac{1}{4}x & b\le x \end{cases}$

Se pide:

a) Determinar el valor de b para que sea continua.

b) ¿Es derivable f en el valor de b calculado en el apartado anterior?

Aunque lo más habitual es que los intervalos donde se estudie la derivabilidad sean abiertos y de hecho es en intervalos abiertos donde se obtienen las mejores propiedades de las funciones derivables, daremos la definición de función derivable en un intervalo cerrado $[\alpha,\beta]$, que es similar a la que dimos para funciones continuas en un tal intervalo.

Una función $y = f(x)$ es <u>derivable en</u> $[\alpha,\beta]$ cuando:

- sea derivable en (α,β)
- sea derivable por la derecha en α
- sea derivable por la izquierda en β

2.1. Derivabilidad de las funciones elementales

- Las **funciones polinómicas**,

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

son derivables en todos los puntos.

- Las **funciones racionales**, $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, son derivables en su dominio.
- La **función exponencial**, $y = e^{f(x)}$, es derivable siempre que lo sea $f(x)$.
- La **función logarítmica**, $y = \log f(x)$, es derivable en todo punto x, tal que $f(x) > 0$ y $f(x)$ sea derivable.
- Las **funciones trigonométricas**, $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \cos x$, son siempre derivables. La función $y = \operatorname{tg} x$ es derivable en su dominio: $\mathbb{R} - \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z} \right\}$
- Las **funciones definidas a trozos** serán derivables si lo son en sus intervalos respectivos y en los puntos de unión. En estos puntos habrá que ver que la función esté definida y que las derivadas laterales existan y sean iguales.

3. CONTINUIDAD Y DERIVABILIDAD: RELACIÓN

Propiedad 1: Si una función $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es derivable en un punto a entonces es continua en a.

El recíproco es falso:

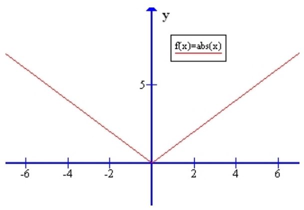
Contraejemplo: La función $f(x) = |x|$ es continua en $x_0 = 0$ pero no es derivable en dicho punto.

Continuidad en $x_0 = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0-} |x| = \lim\limits_{x \to 0-} (-x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0+} |x| = \lim\limits_{x \to 0+} x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \lim_{x \to 0} |x| = 0 \text{ y } f(0) = |0| = 0,$$ luego $f(x)$ es continua en $x_0 = 0$.

Derivabilidad en $x_0 = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} f'(0-) = \lim\limits_{x \to 0-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0-} \dfrac{-x}{x} = -1 \\ f'(0+) = \lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{x}{x} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$ no existe $f'(0)$ y, por tanto, $y = |x|$ no es derivable en $x_0 = 0$. □



Resumiendo:

- *f* es continua en 0
- *f* no es derivable en 0
- La gráfica de *f* no tiene recta tangente en 0

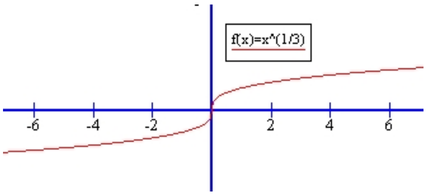
Otro contraejemplo más: La función $y = x^{1/3}$ es continua en $x_0 = 0$ pero no es derivable en dicho punto.

Continuidad en $x_0 = 0$:

$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x^{1/3} = 0 = f(0)$, luego $f(x)$ es continua en $x_0 = 0$.

Derivabilidad en $x_0 = 0$:

$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^{1/3} - 0}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^{2/3}} = \left[\frac{1}{0}\right] = +\infty \Rightarrow \nexists f'(0)$, y, por tanto, $y = x^{1/3}$ no es derivable en $x_0 = 0$.



Resumiendo:

- *f* es continua en 0
- *f no* es derivable en 0
- La gráfica de *f* tiene una recta tangente vertical en 0

Este resultado también se puede utilizar en *sentido negativo*:

Propiedad 1': Si f no es continua en , entonces no puede ser derivable en dicho punto.

Como consecuencia, *siempre que nos pidan estudiar la derivabilidad de una función, comenzaremos por estudiar su continuidad.*

Resumen:

$$\boxed{f \text{ derivable en } a \Rightarrow f \text{ continua en } a}$$

$$\boxed{f \text{ NO continua en } a \Rightarrow f \text{ NO derivable en } a}$$

4. OPERACIONES CON FUNCIONES DERIVABLES

4.1. Suma

La función derivada de una suma de funciones derivables es la suma de las funciones derivadas:

$$\boxed{(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)}$$

4.2. Producto de un número real por una función

La función derivada del producto de una constante por una función derivable es la constante por la función derivada de la función:

$$\boxed{(\alpha f)'(x) = \alpha \cdot f'(x)}$$

4.3. Producto de funciones

La función derivada de un producto de funciones derivables es igual a la derivada del primer factor por el segundo sin derivar más el primer factor si derivar por la derivada del segundo factor:

$$\boxed{(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}$$

4.4. Función recíproca de una función

La derivada de la función recíproca de una función derivable viene dada por:

$$\boxed{\left(\frac{1}{f}\right)'(x)=\frac{-f'(x)}{f(x)^2}}$$

4.5. Cociente de funciones

La función derivada de un cociente de funciones derivables es igual al cociente de la derivada del numerador por el denominador sin derivar menos el numerador sin derivar por la derivada del denominador, entre el denominador al cuadrado:

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}}$$

4.6. Composición de funciones: regla de la cadena

Sean $f:A\subseteq\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ y $g:B\subseteq\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ funciones reales de variable real con $f(A)\subseteq B$. Supongamos que *f* es derivable en *a* y que *g* es derivable en $b=f(a)$. Entonces:

$$\boxed{(g\circ f)'(a)=g'(f(a))\,f'(a)}$$

5. TABLAS DE DERIVADAS

A modo de ejemplo calcularemos las funciones derivadas de algunas funciones elementales. A la vez que practicamos el cálculo de derivadas aplicando la definición, también nos sirve para construir la conocida tabla de derivadas y que esta no aparezca como por arte de magia.

1) La función $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R},\ f(x)=c$ es derivable en cualquier punto $a\in\mathbb{R}$. Su derivada viene dada por:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{c-c}{x-a}=0$$

2) La función $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R},\ f(x)=x$ es derivable en cualquier punto $a\in\mathbb{R}$ y su derivada es:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x-a}{x-a}=1$$

3) La función $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R},\ f(x)=x^n$ es derivable en cualquier punto $a\in\mathbb{R}$. Para calcular su función derivada utilizaremos la fórmula del binomio de Newton:

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^n-a^n}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{\binom{n}{0}a^n h^0}+\binom{n}{1}a^{n-1}h+\ldots+\binom{n}{n-1}ah^{n-1}+\binom{n}{n}a^0h^n-\cancel{a^n}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{na^{n-1}h+\binom{n}{2}a^{n-2}h^2+\ldots+\binom{n}{n-1}ah^{n-1}+\binom{n}{n}ah^n}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}\left[na^{n-1}+\binom{n}{2}a^{n-2}h+\ldots+\binom{n}{n-1}ah^{n-2}+\binom{n}{n}ah^{n-1}\right]}{\cancel{h}}=na^{n-1}$$

4) La función $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{x}$, es derivable en cualquier $a\in(0,+\infty)$. Su derivada es:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)}{(x-a)\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{a}\right)^2}{(x-a)\left(\sqrt{x}-\sqrt{a}\right)}=\lim_{x\to a}\frac{\cancel{(x-a)}}{\cancel{(x-a)}\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)}=\lim_{x\to a}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}=\frac{1}{2\sqrt{a}}$$

5) La función exponencial $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=e^x$, es derivable en cualquier $a\in\mathbb{R}$.

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{a+h}-e^a}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^a\left(e^h-1\right)}{h}=e^a$$

teniendo en cuenta que

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$$

6) La función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\operatorname{sen}x,$ es derivable en cualquier $a\in\mathbb{R}$.

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(a+h)-\operatorname{sen}a}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2\cos\left(a+\frac{h}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{h}{2}}{h}=\cos a$$

donde hemos tenido en cuenta que

$$\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}y=2\cos\frac{x+y}{2}\operatorname{sen}\frac{x-y}{2}$$

y que

$$\lim_{h\to 0}\frac{sen\,{}^{h}\!/_{2}}{{}^{h}\!/_{2}}=1$$

7) La función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\cos x,$ es derivable en cualquier $a\in\mathbb{R}$. Su función derivada se puede obtener teniendo en cuenta que $\cos x=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\quad\forall x\in\mathbb{R}$ y aplicando la regla de la cadena:

$$f'(a)=-\operatorname{sen}a$$

8) La función $\begin{array}{l}\operatorname{tg}:\mathbb{R}-\left\{k\pi+\frac{\pi}{2}:k\in\mathbb{Z}\right\}\to\mathbb{R}\\ \quad x\mapsto\operatorname{tg}x\end{array}$ es derivable en cualquier punto de su dominio y su derivada viene dada por:

$$\operatorname{tg}' x = \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)'(x) = \frac{\cos x \cos x - \operatorname{sen} x\left(-\operatorname{sen} x\right)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} =$$
$$= 1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$$

9) La función $\begin{aligned} \log_a : \left(0,+\infty\right) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \log_a x \end{aligned}$ es derivable en cualquier $x_0 \in \left(0,+\infty\right)$. Su función derivada viene dada por:

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\log_a(x_0+h) - \log_a x_0}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\log_a \dfrac{x_0+h}{x_0}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\log_a\left(1+\dfrac{h}{x_0}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\frac{x_0}{x_0}\log_a\left(1+\frac{h}{x_0}\right) =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{x_0}\log_a\left(1+\frac{h}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{h}} = \frac{1}{x_0}\log_a\left(\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{h}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{h}}\right) =$$
$$= \frac{1}{x_0}\log_a\left(\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{1}{\dfrac{x_0}{h}}\right)^{\frac{x_0}{h}}\right) = \frac{1}{x_0}\log_a e$$

En particular la función $\begin{aligned} \log_e : \left(0,+\infty\right) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \log_e x \equiv \ln x \end{aligned}$ es derivable en cualquier $x_0 \in \left(0,+\infty\right)$, y su derivada viene dada por: $\ln' x = \dfrac{1}{x}$

Tabla de derivadas (de funciones simples)

Función	**Derivada**
$y = c \in \mathbb{R}$	$y' = 0$
$y = x$	$y' = 1$
$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$
$y = \sqrt{x}$	$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$y = \sqrt[n]{x}$	$y' = \dfrac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}$
$y = a^x$ con $a > 0$	$y' = a^x \ln a$

$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x}\log_a e$
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$
$y = \text{sen}\, x$	$y' = \cos x$
$y = \cos x$	$y = -\ \text{sen}\, x$
$y = \text{tg}\, x$	$y' = 1 + \text{tg}^2 x$
$y = \text{arcsen}\ x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \arccos\ x$	$y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \text{arctg}\, x$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$

Ejercicio:

5. *Calcula la derivada de las siguientes funciones:*

1) $f(x) = 7x^5 - 2x^3 + 3x^2 - 4$
2) $f(x) = 5x^4 + 3x^2 + 2x - 7$
3) $f(x) = (3x-1)(5x^2 + 3x - 2)$
4) $f(x) = \dfrac{4x^2+1}{7x+1}$
5) $f(x) = x - \dfrac{1}{x} + \sqrt[3]{x}$
6) $f(x) = (x - \sqrt{x})(x + \sqrt{x})$
7) $f(x) = \dfrac{(3x-1)(2x+3)}{x^2+7}$
8) $f(x) = (5x^2 - 3x + 1)\dfrac{2x}{5x+3}$
9) $f(x) = \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt[5]{x^3} + \sqrt{x^5}$
10) $f(x) = \dfrac{(3x-1)^2 - (3x+1)^2}{2-x^2}$
11) $f(x) = \dfrac{1}{3x^2 - 5x + 2}$
12) $f(x) = \dfrac{1}{5x-3}(3x^2 - x + 2)$
17) $f(x) = \text{tg}\, x\, \text{sen}\, x$
18) $f(x) = \cos x\, \text{tg}\, x$
19) $f(x) = e^x\ \text{tg}\ x$
20) $f(x) = 2^x \ln x$
21) $f(x) = e^x \log_{10} x$
22) $f(x) = \log_5 x \cos x$
23) $f(x) = \dfrac{\text{sen}\ x}{\text{tg}\ x}$
24) $f(x) = \dfrac{2^x}{\ln x}$
25) $f(x) = \dfrac{x^2}{\ln x}$
26) $f(x) = \text{sen}\, x \cos x$
27) $f(x) = \text{sen}\ x + e^x\ \text{sen}\ x$
28) $f(x) = \dfrac{\cos x}{\text{sen}\ x + \cos x}$

13) $f(x)=\left(x^2+3x\right)\text{sen } x$

14) $f(x)=3^x$

15) $f(x)=\dfrac{x\,\text{tg}\,x}{x+1}$

16) $f(x)=\dfrac{\left(x^2-3x+2\right)\text{sen } x}{1+\text{tg}\,x}$

29) $f(x)=\dfrac{3^x\ \text{sen } x}{2x+e^x}$

30) $f(x)=\log_5 x\log_7 x$

31) $f(x)=e^x\ \text{sen } x$

32) $f(x)=5^x$

Aplicando la regla de la cadena, obtenemos la siguiente tabla de derivadas para funciones compuestas:

Tabla de derivadas, para funciones compuestas:

Función	**Derivada**
$y=f(x)^n$	$y'=n\cdot f(x)^{n-1}\cdot f'(x)$
$y=\sqrt{f(x)}$	$y'=\dfrac{f'(x)}{2\cdot\sqrt{f(x)}}$
$y=\sqrt[n]{f(x)}$	$y'=\dfrac{f'(x)}{n\cdot\sqrt[n]{f(x)^{n-1}}}$
$y=a^{f(x)}$ con $a>0$	$y'=f'(x)\cdot a^{f(x)}\cdot\ln a$
$y=e^{f(x)}$	$y'=f'(x)\cdot e^{f(x)}$
$y=\log_a f(x)$	$y'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}\cdot\log_a e$
$y=\ln f(x)$	$y'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$
$y=\text{sen}\,f(x)$	$y'=f'(x)\cdot\cos f(x)$
$y=\cos f(x)$	$y=-f'(x)\ \cdot\text{sen}\,f(x)$
$y=\text{tg}\,f(x)$	$y'=f'(x)\cdot\left[1+\text{tg}^2 f(x)\right]$
$y=\text{arcsen}\,f(x)$	$y'=\dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}$
$y=\text{arccos}f(x)$	$y'=\dfrac{-f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}$
$y=\text{arctg}\,f(x)$	$y'=\dfrac{f'(x)}{1+f(x)^2}$

Ejercicios:

6. *Calcula la derivada de las siguientes funciones:*

1) $f(x)=\text{sen}\left(2x^2-3x\right)$
2) $f(x)=\ln(3x+1)$
3) $f(x)=e^{5x}$
4) $f(x)=\text{tg}\left(2-3x\right)$
5) $f(x)=\left(x^2-5x+2\right)^7$
6) $f(x)=e^{\text{sen}\,x}$
7) $f(x)=3^{1+\text{sen}\,x+\cos x}$
8) $f(x)=\log_7\left(4+\text{sen}\,x\right)$
9) $f(x)=\text{sen}^2 x$
10) $f(x)=\text{tg}^3 x$
11) $f(x)=3^{x^2+2}\,\text{sen}\,x$
12) $f(x)=\left(3x^2-2\right)\text{sen}\left(5x\right)$
13) $f(x)=\left(x^2+1\right)^5$
14) $f(x)=\text{sen}^3 x$
15) $f(x)=\text{sen}\left(x^3\right)$
16) $f(x)=\text{sen}^2 x\cos^2 x$
17) $f(x)=\dfrac{\text{sen}\left(5x+2\right)}{\cos\left(3x-1\right)}$
18) $f(x)=e^{\text{sen}\,x}\cos x$
19) $f(x)=\log_5\left(3x+1\right)$
20) $f(x)=\ln(\text{tg}\,x)$
21) $f(x)=\text{sen}\left(\cos(3x)\right)$
22) $f(x)=\sqrt{5x^2-3x+2}$
23) $f(x)=\sqrt[3]{\left(3-2x^2\right)^2}$
24) $f(x)=\sqrt[4]{x^2-3x+1}$

7. Halla la función derivada de las siguientes funciones:

1) $f(x)=3x^2-6x+5$
2) $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}$
3) $f(x)=\sqrt{2x}+\sqrt[3]{5x}$
4) $f(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{x}}$
5) $f(x)=\text{sen}\,x\cos x$
6) $f(x)=\text{tg}\,x$
7) $f(x)=xe^x$
8) $f(x)=x2^x$
9) $f(x)=\left(x^2+1\right)\log_2 x$
10) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$
11) $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2-5x+3}{x}$
13) $f(x)=\text{sen}\left(x^2-5x+7\right)$
14) $f(x)=\sqrt[3]{\left(5x+3\right)^2}$
15) $f(x)=\dfrac{\log x}{x}$
16) $f(x)=\dfrac{\log x^2}{x}$
16) $f(x)=\dfrac{\log x^2}{x}$
17) $f(x)=\cos(3x-\pi)$
18) $f(x)=\sqrt{1+2x}$
19) $f(x)=\text{sen}\left(3x+1\right)\cos(3x+1)$
20) $f(x)=\dfrac{\text{sen}\left(x^2+1\right)}{\sqrt{1-x^2}}$
21) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$
22) $f(x)=xe^{2x+1}$

6. INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA

Si f es continua en x_0, la recta tangente a la gráfica de f en el punto $P\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ es:

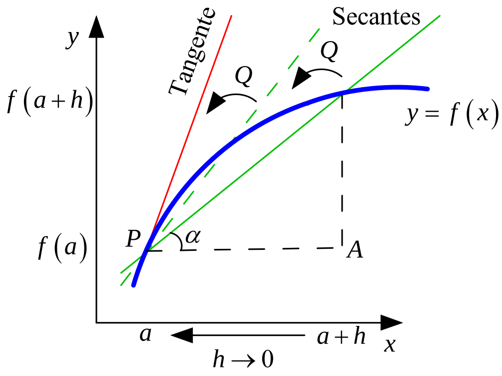
i) la recta que pasa por P y tiene pendiente

$$m(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

si este límite existe.

ii) la recta $x = x_0$ si $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \infty$

Aclaración: Esta definición proviene del hecho de que la recta tangente a una función en un punto x_0 es el límite de la recta secante a la función, cuando el otro punto de corte de la recta secante y la función tiende a x_0.



Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y

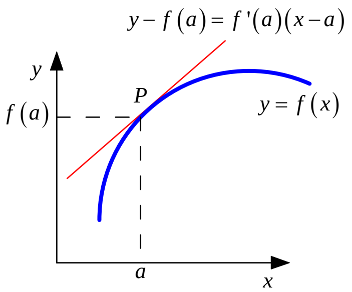
$$P = (a, f(a)),\ Q = (a+h, f(a+h))$$

dos puntos de su gráfica. Geométricamente se tiene que

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \operatorname{tg} \alpha = m_{\text{secantes}}$$

que es el valor que mide la pendiente de la recta secante en los puntos P y Q a la curva.

Tomando límites en la igualdad anterior resulta:



$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \operatorname{tg} \alpha = \lim_{h \to 0} m_{\text{secantes}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(a) = \operatorname{tg} \alpha = m_{\text{secantes}}$$

es decir, *la derivada de una función en un punto es igual a la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto.*

Como consecuencia:

Ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en $(a, f(a))$:

$$\boxed{y - f(a) = f'(a)(x - a)}$$

Ecuación de la recta normal a la curva $y = f(x)$ en $(a, f(a))$:

$$\boxed{y - f(a) = \frac{-1}{f'(a)}(x - a)}$$

Ejercicios:

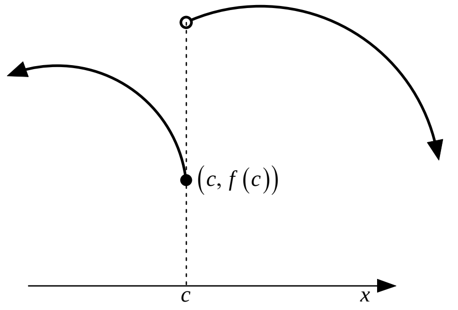
8. *Halla la ecuación de la recta tangente a* $f(x) = x^3$ *en el punto de abscisa* $x = -1$.

9. *Calcula las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la función* $f(x) = \frac{4}{x^2}$ *en el punto de abscisa* $x = 2$.

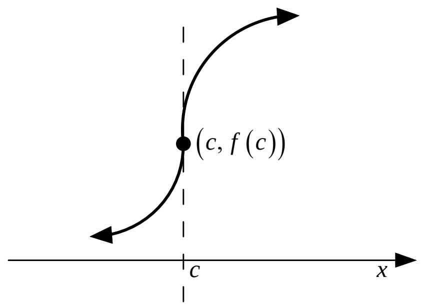
10. *Halla la ecuación de la recta tangente a* $f(x)=2x^3-x^2$ *en el punto de abscisa* $x=3$.

11. *Dada* $f(x)=x^2-10x+9$, *halla el punto en el que la recta tangente a la gráfica de* f *es paralela al eje de abscisas.*

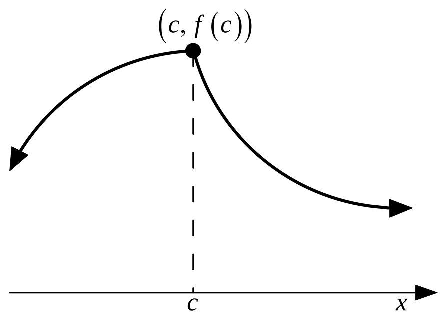
Gráficamente las <u>*situaciones en las que una función no es derivable*</u> en un punto son:



f no es continua en c $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ f no es derivable en c



f es continua en c, pero la gráfica de f tiene una recta tangente vertical en c $\Rightarrow$ f no es derivable en c



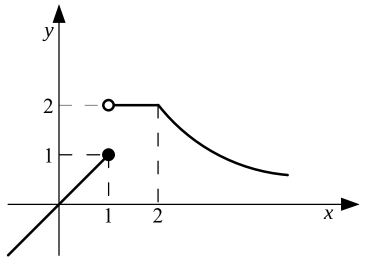
f es continua en c, pero la gráfica de f no tiene recta tangente en c (ya que tiene un pico) $\Rightarrow$ f no es derivable en el punto c

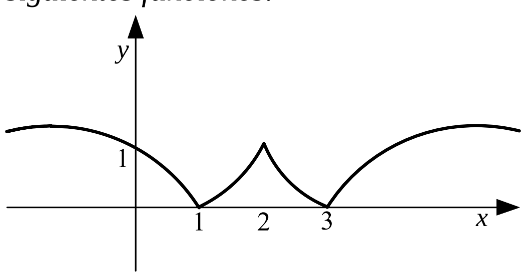
Los puntos en los que la gráfica de la función tiene picos se denominan **puntos angulosos**, y en ellos se verifica:

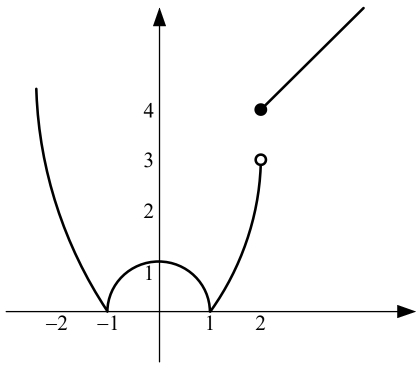
$$f'(x_0-)\neq f'(x_0+)$$

<u>Ejercicios:</u>

12. *Señala en qué puntos no son derivables las siguientes funciones:*







13. *Indica los puntos en los que las siguientes funciones no son derivables:*

a) $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{si } x>0 \\ x+1 & \text{si } x\le 0 \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } x>0 \\ -x+1 & \text{si } x\le 0 \end{cases}$

c) $f(x)=|\operatorname{sen} x|$

d) $f(x)=\begin{cases} |x^2-1| & \text{si } x<2 \\ x+2 & \text{si } x\ge 2 \end{cases}$

7. DERIVADAS SUCESIVAS

Sea *I* un intervalo y f una función derivable en *I*. Si f' es derivable en $a\in I$, a la derivada $(f')'(a)$ se le llama derivada segunda de f en a y se designa por $f''(a)$.

Si $\forall x\in I$ existe $f''(x)$, la función $x\mapsto f''(x)$ se llama función derivada segunda de f en I.

En general, definidas las funciones $f',\ldots,f^{n)}: I\to\mathbb{R}$, de tal modo que $f^{k)}=\left(f^{k-1)}\right)'$, para $k=2,\ldots,n-1$, diremos que $f^{k)}$ es la función derivada *k*-ésima (o derivada de orden *k*) de f en I.