UNIDAD 9:
CONTINUIDAD DE FUNCIONES

1. CONCEPTO DE FUNCIÓN CONTINUA

1.1. Definición. Caracterización

Una función $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en el punto $\boxed{x = a \in Dom(f)}$ cuando

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \qquad (1)$$

Aclaraciones:

- Para que una función sea continua en un punto, dicho punto ha de pertenecer a su dominio de definición. En otro caso, no tiene sentido hablar de continuidad.

  No tiene sentido decir que la función $y = \frac{1}{x}$ no es continua en $x = 0$, por que dicho punto no pertenece a su dominio.
- La condición (1) de continuidad implica:
  - $\exists \lim_{x \to a} f(x)$
  - $\exists f(a)$
  - Dichos valores coincidan: $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Una función es continua cuando lo es en todos los puntos de su dominio de definición.

Ejercicios:

1. *La función* $f(x) = \frac{x-3}{x^2-9}$, *¿es continua en* $x = -3$ *?*

2. *Representa la función* $f(x) = \begin{cases} x-2 & \text{si } x \geq 3 \\ 4-x & \text{si } 1 \leq x < 3 \\ 2 & \text{si } x < 1 \end{cases}$, *y estudia su continuidad en los puntos 1 y 3.*

Una función es continua por la derecha en un punto si existe límite por la derecha en él y coincide con el valor que toma la función en ese punto:

$$f \text{ continua en } x = a \text{ por la derecha} \Leftrightarrow \lim_{x \to a+} f(x) = f(a)$$

Una función es continua por la izquierda en un punto si existe límite por la izquierda en él y coincide con el valor que toma la función en ese punto:

$$f \text{ continua en } x = a \text{ por la izquierda} \Leftrightarrow \lim_{x \to a-} f(x) = f(a)$$

Caracterización:

Una función es continua en un punto cuando es continua por la izquierda y por la derecha en ese punto:

$$f \text{ continua en } x = a \Leftrightarrow f \text{ continua por la derecha y por la izquierda en } x = a$$

Como ***consecuencia***, la continuidad de una función en un punto solo depende de su comportamiento en puntos “suficientemente próximos” a él, es decir, la continuidad de una función en un punto es una propiedad local.

Una función es continua en $[a,b]$ cuando:

(1) Sea continua en el intervalo abierto (a,b)
(2) Sea continua por la derecha en a
(3) Sea continua por la izquierda en b

Ejercicios:

3. *Estudiar la continuidad de la función* $f(x)=|x|$.

4. *Calcula* k *para que la función*

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-1}{x^2-1} & \text{si } x\neq 1 \\ k & \text{si } x=1 \end{cases}$$

sea continua en $x=1$.

5. *¿Cuál debe ser el valor de* k *para que la función*

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{4-(x+2)^2}{x} & \text{si } x\neq 0 \\ k & \text{si } x=0 \end{cases}$$

sea continua?

1.2. Continuidad de las funciones elementales

- Las **funciones polinómicas**, $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$, son continuas en todos los puntos.
- Las **funciones racionales**, $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, son continuas en su dominio.
- La **función exponencial**, $y=e^{f(x)}$, es continua siempre que lo sea $f(x)$.
- La **función logarítmica**, $y=\log f(x)$, es continua en todo punto x, tal que $f(x)>0$ y $f(x)$ sea continua.
- Las **funciones trigonométricas**, $y=\operatorname{sen} x$ e $y=\cos x$, son siempre continuas. La función $y=\operatorname{tg} x$ es continua en su dominio: $\mathbb{R}-\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi \text{ con } k\in\mathbb{Z}\right\}$.
- Las **funciones definidas a trozos** serán continuas si lo son en sus intervalos respectivos y en los puntos de unión. En estos puntos habrá que ver que la función esté definida y que los límites laterales existan y sean iguales.

Ejercicios:

6. *Se considera la función* $f(x)$ *definida por:*

$$f(x)=\begin{cases}-x & \text{si } x<0\\ 3x+b & \text{si } 0\le x<2\\ ax^2 & \text{si } x\ge 2\end{cases}$$

Calcula los valores de a y b para que $f(x)$ *sea continua en todos los puntos.*

7. *Halla* k *para que las siguientes funciones sean continuas:*

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-3x^2+4}{x^3-8x^2+20x-16} & x\neq 2\\ k+1 & x=2\end{cases}$

b) $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-1} & x<1\\ k & x=1\\ \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{5-x}-2} & x>1\end{cases}$

8. *Estudia la continuidad de las funciones:*

$$f(x)=\begin{cases}3x+1 & -2<x\le 1\\ x^2+4 & 1<x<2\\ 7 & x=2\\ 2x+4 & 2<x<5\\ 3x-1 & 5\le x<6\\ \dfrac{-3x+1}{x-7} & x>6\end{cases}$$

$$h(x)=\begin{cases}4x+5 & x<0\\ x+5 & 0\le x<1\\ 6x & 1<x<2\\ -4x & 2<x<3\\ \dfrac{x^2-9}{-x+3} & 3<x\le 7\\ \dfrac{1}{x-10} & x>7\end{cases}$$

9. *¿Cómo deberá definirse* $f(x)$ *para que la función* $f(x)=\dfrac{5-\sqrt{24+x}}{x-1}$ $x\neq 1$, *sea continua en* $x=1$*?*

10. *Estudiar la continuidad de la siguiente función:* $f(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x=2\\ \dfrac{|x-2|}{x-2} & \text{si } x\neq 2\end{cases}$

11. *Calcula los valores de M y N para que la función* f *sea continua:*

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^4-3x^3-11x^2+23x+6}{x^2+x-6} & \text{si } x\neq -3 \text{ y } x\neq 2\\ N & \text{si } x=-3\\ M & \text{si } x=2\end{cases}$$

12. *Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:*

a) $f(x)=\dfrac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$

b) $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{(x-1)^2}$

c) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x+3} & \text{si} \quad x\le 0 \\ -x^2+14 & \text{si} \quad 0<x\le 3 \\ \sqrt{x^2+16} & \text{si} \quad x>3 \end{cases}$

Si una <u>función</u> no es continua ***en un punto de su dominio***, se dice que es <u>discontinua</u> en dicho punto.

1.3.<u>Clasificación de las discontinuidades</u>

1) Si $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ y $L\neq f(a)$ entonces se dice que f tiene una **<u>discontinuidad evitable en el punto $x=a$</u>**.

   El valor que deberíamos darle a la función en dicho punto para que fuera continua en él se llama <u>valor verdadero de la función en a</u>, y es:

$$f(a):=\lim_{x\to a} f(x)$$

2) Si $\exists \lim\limits_{x\to a-} f(x)=L,\ \exists \lim\limits_{x\to a+} f(x)=L'$ y $L\neq L'$ se dice que f presenta una **<u>discontinuidad de salto o de primera especie en a</u>**

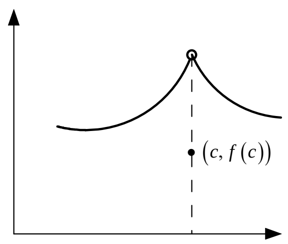
   En este caso, el valor

$$\left|\lim_{x\to a-} f(x)-\lim_{x\to a+} f(x)\right|$$

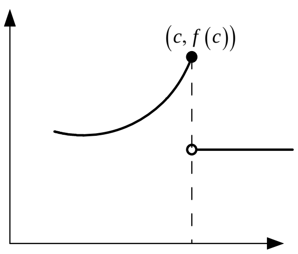
   se llama <u>salto de la función en a</u>, y puede ser finito o infinito.

3) Las discontinuidades que no sean ni evitables ni de primera especie se denominan **<u>discontinuidades de segunda especie o esenciales</u>**, es decir, cuando al menos uno de los límites laterales no exista.

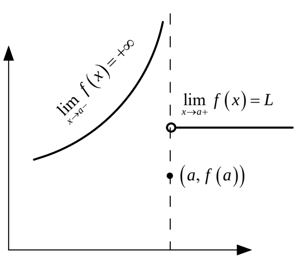
Veamos gráficamente las *<u>situaciones en las que una función no es continua en un punto</u>*:



$\lim\limits_{x\to c} f(x)\neq f(c)$



f no tiene límite en c



Uno de los límites laterales no existe

Un par de $\boxed{\text{resultados}}$ que es importante conocer y memorizar:

- Toda función continua en un intervalo de la forma $[a,b]$ tiene máximo y mínimo absolutos.
- Bajo la hipótesis adicional de que la función sea inyectiva, el máximo y el mínimo (absolutos) se alcanzan en los extremos del intervalo.