UNIDAD 8:
LÍMITES DE FUNCIONES

LÍMITES

1. LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

Una **sucesión** de números reales es un conjunto ordenado de infinitos números reales. Los números reales $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ se llaman términos, de la sucesión y a_n término general. Se representa por $\{a_n\}$.

Más formalmente, una sucesión es una función

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$n \to f(n) := a_n$$

y así, $f(1) = a_1,\ f(2) = a_2, \ldots$

Intuitivamente, decimos que el límite de una sucesión $\{x_n\}$ es el número L si los términos de dicha sucesión se van aproximando a L, y escribiremos $\{x_n\} \to L$ o $\lim x_n = L$ o $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = L$

Recuerda que el límite de una sucesión, si existe, es único.

Diremos que $a \in \mathbb{R}$ es un punto de acumulación de D, y escribiremos $a \in D'$, cuando exista una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de D tal que $\{x_n\} \to a$.

Criterio para los puntos de acumulación: Siempre que exista un intervalo abierto de centro a contenido en D se tendrá que $a \in D'$.

Definición: Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función, $a \in D'$ y $L \in \mathbb{R}$. Diremos que el límite de $f(x)$ cuando $x \to a$ es *L*, y escribiremos $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, sii para valores de *x* cada vez más próximos a *a* (distintos de *a*), los valores de las imágenes $f(x)$ están cada vez más próximos a *L*.

Límites laterales:

El límite por la izquierda es el valor al que tiende la función $f(x)$ cuando la variable *x* se aproxima a *a* siendo menor que *a*. Se denota por:

$$\lim_{x\to a-} f(x) \quad \text{ó} \quad \lim_{\substack{x\to a \\ x<a}} f(x)$$

El límite por la derecha es el valor al que tiende la función $f(x)$ cuando la variable *x* se aproxima a *a* siendo mayor que *a*. Se denota por:

$$\lim_{x\to a+} f(x) \quad \text{ó} \quad \lim_{\substack{x\to a \\ x>a}} f(x)$$

Esto da lugar a la siguiente **caracterización**:

$$\exists \lim_{x\to a} f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \lim\limits_{x\to a-} f(x), \quad \exists \lim\limits_{x\to a+} f(x) \\ \lim\limits_{x\to a-} f(x) = \lim\limits_{x\to a+} f(x) \end{cases}$$

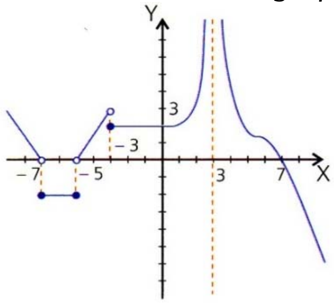
En cuyo caso $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a-} f(x) = \lim\limits_{x\to a+} f(x)$

<u>Ejercicios:</u>

1. *Mediante tablas calcula:*

a) $\lim\limits_{x\to 0}(x^2+2)$ *b)* $\lim\limits_{x\to 2}(3x-2)$ *c)* $\lim\limits_{x\to 1+}(3x-1)$ *d)* $\lim\limits_{x\to -3-}(9+x^2)$

2. *Teniendo en cuenta la gráfica de la función, calcula los siguientes límites:*

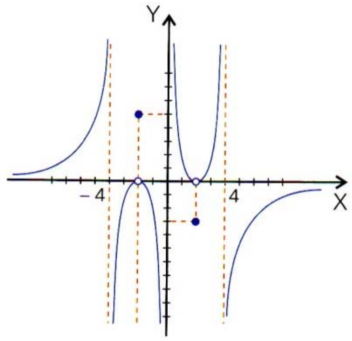


a) $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$

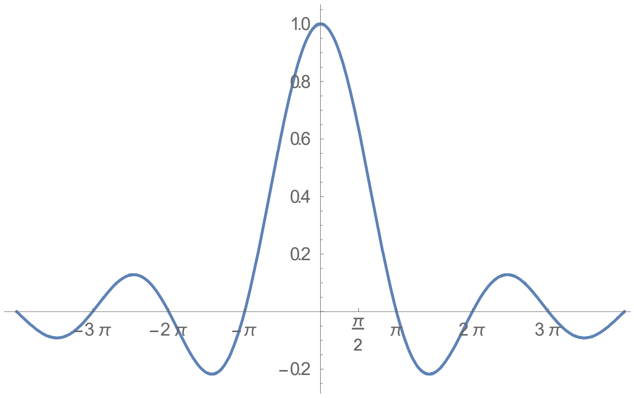
b) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

c) $\lim\limits_{x\to 7} f(x)$

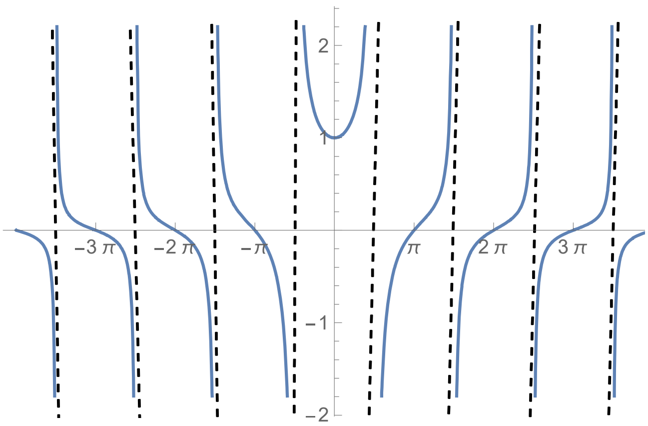
3. *A partir de la gráfica de la función, comprueba que* $\lim\limits_{x\to 2} f(x) \neq f(2)$ *:*



4. *Calcula* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{sen}\,x}{x}$ y $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{tg}\,x}{x}$, *teniendo en cuenta su gráfica*[1]*:*



$f(x) = \dfrac{\text{sen}\,x}{x}$



$g(x) = \dfrac{\text{tg}\,x}{x}$

[1] Estos dos límites son importantes y debes recordarlos.

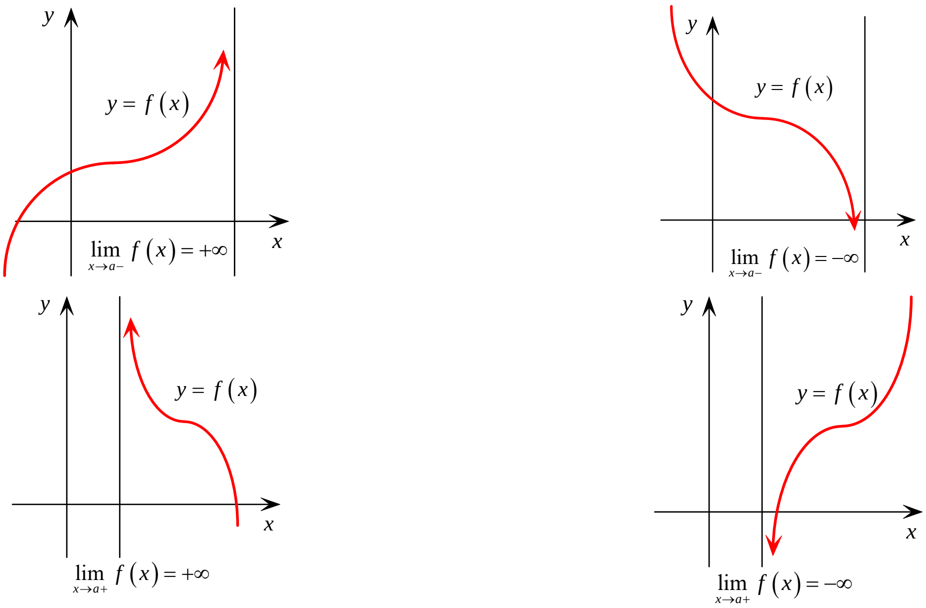
2. LÍMITES INFINITOS: ASÍNTOTAS VERTICALES

Decir que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ significa que cuando *x* tiende a *a*, con $x < a$, $f(x)$ toma valores mayores que cualquier número real *k*.

Análogamente, decir que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ significa que cuando *x* tiende a *a*, con $x < a$, $f(x)$ toma valores cada vez más pequeños.
Llamamos <u>asíntotas</u> de una función a las rectas que se aproxima la función en el infinito.

La recta *x* = *a* es una <u>asíntota vertical</u> de $f(x)$ sii existe alguno de los siguientes límites:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x\to a+} f(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x\to a-} f(x) = \pm\infty$$



Observaciones:

(1) Una función <u>*puede tener infinitas asíntotas verticales*</u>.

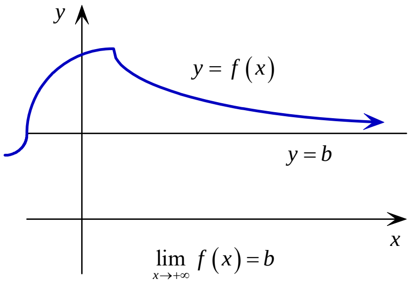
(2) En las funciones racionales las asíntotas verticales se hallan en los valores *x* que anulan al denominador.

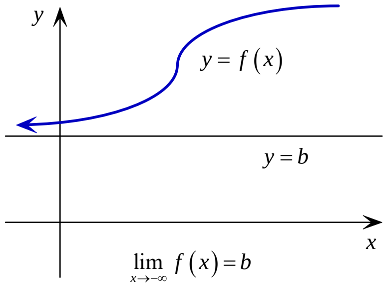
(3) La gráfica de <u>*la función no puede cortar a las asíntotas verticales*</u>.

3. LÍMITES EN EL INFINITO: ASÍNTOTAS HORIZONTALES

Decir que $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = b$ significa que cuando *x* se hace tan grande como queramos, la función toma valores muy próximos un número fijo *b*.
De igual modo, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = b$ significa que $f(x)$ se aproxima a *b* cuando *x* se hace cada vez más pequeño.

La recta *y* = *k* es una <u>asíntota horizontal</u> de $f(x)$ sii existe alguno de los siguientes límites:
$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = k$ o $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = k$





Observaciones:

(1) Una función tiene *como máximo dos asíntotas horizontales*.

(2) La gráfica de *la función puede cortar a las asíntotas horizontales*.

(3) Para *funciones racionales*:

- Si en una función racional el grado del numerador es menor que el grado del denominador la recta *y = 0* (el eje *OX*) es una asíntota horizontal.

- Si en una función racional el grado del numerador y el del denominador son iguales la recta $y = b$ será una asíntota horizontal (b indica el cociente entre los coeficientes líderes del numerador y del denominador).
- Si en una función racional el grado del numerador es una unidad mayor que el grado del denominador la función presenta una asíntota oblicua y no hay asíntotas horizontales.

- Si en una función racional el grado del numerador es dos o más unidades mayor que el grado del denominador hay asíntota horizontal.

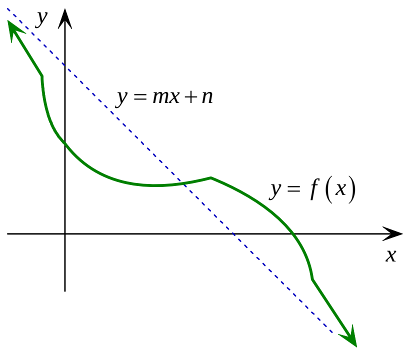
4. LÍMITES INFINITOS EN EL INFINITO: ASÍNTOTAS OBLICUAS

También puede suceder que $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$, lo que significa que x y $f(x)$ se hacen infinitamente grandes a la vez. Por tanto: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow f(x) > k$ para todo $x > p$, siendo k y p números arbitrariamente grandes.

La recta $y = mx + n$, con $m \neq 0$, es una asíntota oblicua de $f(x)$ sii existe alguno de los siguientes límites:

$$\lim_{x \to -\infty} \left(f(x) - mx - n \right) = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - mx - n \right) = 0$$

en cuyo caso $m = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x}$ y $n = \lim\limits_{x \to \infty} \left(f(x) - mx \right)$



Observaciones:

(1) Una función puede tener *como máximo dos asíntotas oblicuas*.

(2) *Si una función tiene asíntota oblicua no tiene asíntota horizontal y recíprocamente*.

(3) La gráfica de *la función puede cortar a las asíntotas oblicuas* en uno o varios puntos.

(4) Si en una función racional el grado del numerador es dos o más unidades mayor que el del denominador, no hay asíntota oblicua.

5. OPERACIONES CON LÍMITES DE FUNCIONES

1) $\lim_{x\to a} k = k$ donde $k \in \mathbb{R}$

2) $\lim_{x\to a}\left[f(x)+g(x)\right]=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x)$

3) $\lim_{x\to a}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=\lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a} g(x)$

4) $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ siempre que $\lim_{x\to a} g(x)\neq 0$

4) $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}=\left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^{\lim_{x\to a} g(x)}$ siempre que $\lim_{x\to a} f(x)>0$

5) $\lim_{x\to a}\left[\log_A f(x)\right]=\log_A\left[\lim_{x\to a} f(x)\right]$ siempre que $\lim_{x\to a} f(x)>0$

6. REGLAS PARA EL CÁLCULO DE LÍMITES

Regla I: Para calcular el límite de una función, cuando $x\to a\in\mathbb{R}$, basta con sustituir a en la función y si nos da un número real, ya está resuelto.
¡¡Inconveniente!! Que no siempre vamos a obtener un número real.

Regla II: Las funciones polinómicas, cuando $x\to\pm\infty$, se comportan del mismo modo que su término de mayor grado.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(a_n x^n+\ldots+a_1 x+a_0\right)=\lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n$$

Regla III: Límite de una potencia y de una exponencial:

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^n=\begin{cases}\pm\infty & \text{si} \quad n>0\\ 1 & \text{si} \quad n=0\\ 0 & \text{si} \quad n<0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} n^x=\begin{cases}\pm\infty & \text{si} \quad n>1\\ 0 & \text{si} \quad 0<n<1\\ \nexists & \text{si} \quad n<0\end{cases}$$

Regla IV:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_n x^n+\ldots+a_0}{b_m x^m+\ldots+b_0}=\begin{cases}\pm\infty & \text{si} \quad n>m\\ \dfrac{a_n}{b_m} & \text{si} \quad n=m\\ 0 & \text{si} \quad n<m\end{cases}$$

Regla V: Cuando al aplicar la regla I en el cálculo de límites el resultado obtenido no tiene sentido aparecen las indeterminaciones que son expresiones como las siguientes:

Indeterminaciones	$\frac{+\infty}{+\infty}$	$\frac{+\infty}{-\infty}$	$\frac{-\infty}{+\infty}$	$\frac{-\infty}{-\infty}$
Tipo	$\frac{\infty}{\infty}$			

Indeterminaciones	$(+\infty)-(+\infty)$ $(-\infty)-(-\infty)$	$(+\infty)+(-\infty)$ $(-\infty)+(+\infty)$
Tipo	$\infty-\infty$	

Indeterminaciones	$(\pm\infty)\cdot 0$	$0\cdot(\pm\infty)$	$\frac{L}{0}$	$\frac{\pm\infty}{0}$	$\frac{0}{0}$
Tipo	$0\cdot\infty$		$\frac{K}{0}$		$\frac{0}{0}$

Indeterminaciones	0^0	$(\pm\infty)^0$	$1^{+\infty}$	$1^{-\infty}$
Tipo	0^0	∞^0	1^{∞}	

OPERACIONES CON EXPRESIONES INFINITAS

1. **SUMAS**

$$\left.\begin{array}{l} +\infty + n = +\infty \\ +\infty + \infty = +\infty \\ (-\infty) + n = -\infty \end{array}\right\} \text{ donde } n \in \mathbb{R}$$

$$(-\infty) + (-\infty) = -\infty$$

$$-(-\infty) = +\infty$$

2. **PRODUCTOS**

$$(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$$

$$\text{Si } n > 0 \Rightarrow \begin{cases} (+\infty) \cdot n = +\infty \\ (-\infty) \cdot n = -\infty \end{cases}$$

$$\text{Si } n < 0 \Rightarrow \begin{cases} (+\infty) \cdot n = -\infty \\ (-\infty) \cdot n = +\infty \end{cases}$$

3. **COCIENTES**

$$\frac{n}{+\infty} = 0$$

$$\frac{n}{0} = \pm\infty \quad \text{si } n \neq 0$$

$$\frac{+\infty}{0} = \pm\infty$$

$$\frac{0}{+\infty} = 0$$

4. **POTENCIAS**

$$(+\infty)^{+\infty} = +\infty$$

$$(+\infty)^{-\infty} = 0$$

$$\text{Si } n > 0 \Rightarrow (+\infty)^{n} = +\infty$$

$$\text{Si } n < 0 \Rightarrow (+\infty)^{n} = 0$$

$$\text{Si } n \neq 0 \Rightarrow n^{0} = 1$$

$$\text{Si } n > 1 \Rightarrow \begin{cases} n^{+\infty} = +\infty \\ n^{-\infty} = 0 \end{cases}$$

$$\text{Si } 0 < n < 1 \Rightarrow \begin{cases} n^{+\infty} = 0 \\ n^{-\infty} = +\infty \end{cases}$$

RESOLUCIÓN DE INDETERMINACIONES

Cuando al calcular el límite de una suma, un producto, un cociente o una potencia de funciones no se pueden aplicar las propiedades de los límites, es decir, hay que hacer un estudio particular de cada caso, suele decirse que estos límites presentan una **indeterminación**.

1. INDETERMINACIÓN DEL TIPO $\left[\frac{k}{0}\right]$ CON $k \in \left(\mathbb{R}-\{0\}\right) \cup \{\pm\infty\}$

Se calculan los límites laterales: $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a-} f(x)$

Si existen ambos límites y coincide su valor, entonces:

$$\exists \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a-} f(x)$$

Si no existe alguno de los límites laterales o no coincide su valor, entonces, no existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

2. INDETERMINACIÓN DEL TIPO $\left[\frac{0}{0}\right]$

a) Para funciones racionales

Se descomponen numerador y denominador en factores y se simplifica.

b) Para funciones irracionales

Si se trata de una función con raíces cuadradas en el numerador (o en el denominador), multiplicamos numerador y denominador por la expresión conjugada del numerador (o del denominador).

3. INDETERMINACIÓN DEL TIPO $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

Se divide numerador y denominador por la mayor potencia de x que aparezca en la función (basta con dividir por la mayor potencia de x del denominador).

4. INDETERMINACIÓN DEL TIPO $[\infty-\infty]$

a) La función es diferencia de dos funciones racionales

Se efectúa dicha operación.

b) La función es diferencia de funciones irracionales

Multiplicamos y dividimos por la expresión conjugada de la función.

5. INDETERMINACIÓN DEL TIPO $[0\cdot\infty]$

Transformar esta indeterminación en una de las anteriores, generalmente efectuando las operaciones.

6. INDETERMINACIÓN DEL TIPO $\left[1^{\infty}\right]$

Se resuelve empleando la siguiente igualdad:

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\left[f(x)-1\right]}$$

donde $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ y sabemos que

$$e=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=2,718281\ldots\in\mathbb{I}=\mathbb{R}-\mathbb{Q}$$

Ejercicios:

5. *Estudia a qué tipo de indeterminación[2] corresponden los siguientes límites:*

a) $\lim_{x\to-2}\frac{\sqrt{x^2-4}}{x+2}$ *d)* $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^6+x}{x^4-3}$

b) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3-3x}{x^2+x^3}\right)^{3x}$ *e)* $\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x^2-1}$

c) $\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}\sqrt{x^3+x}\right)$ *f)* $\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x+3}-\left(x^2+1\right)\right]$

6. *(Indeterminación del tipo* $\frac{k}{0}$ con $k\neq0$*). Calcula los siguientes límites:*

a) $\lim_{x\to1}\frac{x^3}{(x-1)^2}$ *e)* $\lim_{x\to-4}\frac{2x}{x^2-16}$

b) $\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}$ *f)* $\lim_{x\to-3}\frac{5x}{9-x^2}$

c) $\lim_{x\to0}\frac{2x+6}{5x^2}$ *g)* $\lim_{x\to0}\frac{2x+8}{x^4+2x^2}$

d) $\lim_{x\to0}\frac{2x-5}{x^2}$ *h)* $\lim_{x\to-1}\frac{x^2+1}{x^3+1}$

7. *(Indeterminación del tipo* $\frac{0}{0}$*). Calcula los siguientes límites:*

a) $\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{x^4-1}$ *f)* $\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}$

b) $\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^2-1}{x}$ *g)* $\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$

c) $\lim_{x\to2}\frac{3x-6}{(x-2)^2}$ *h)* $\lim_{x\to0}\frac{x^2}{\sqrt{x+4}-2}$

d) $\lim_{x\to-1}\frac{x+1}{-1-x}$ *i)* $\lim_{x\to-2}\frac{2x+4}{x^2-4}$

e) $\lim_{x\to3}\frac{9-x^2}{2-\sqrt{x^2-5}}$

---

[2] Recuerda que los tipos de indeterminaciones que se nos van a presentar son: $\frac{k}{0}$ con $k\in\left(\mathbb{R}-\{0\}\right)\cup\{\pm\infty\}$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty-\infty$, 1^{∞}, ∞^{0}, 0^{0}, $\infty\cdot0$

8. *(Indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$). Calcula el valor de los siguientes límites:*

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2-2x+1}{x-24}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(1+x)^2-1}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{x^3-1}$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x^2-7}{\sqrt[3]{x^6+x}}$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{2x^3-1}}{3x^4}$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2-6x+8}{2x^2-5}$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3-x^2-x+1}{x^2-1}$

h) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1-x^6}{x^3+1}$

9. *(Indeterminación del tipo $\infty-\infty$). Calcula los siguientes límites:*

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x-5}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2-x+1}{x+1}-x\right)$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^4+1}-x^2\right)$

d) $\lim\limits_{x\to1} \left(\frac{2x}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right)$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^4+x}-4x^2\right)$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(8x-\sqrt{16x^2-3x}\right)$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{2x+5}{2}-\frac{x^2-1}{x}\right)$

h) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{9x^2+3x-2}-4x\right)$

10. *(Indeterminación del tipo $0\cdot\infty$). Calcula los siguientes límites:*

a) $\lim\limits_{x\to0} \left(\frac{3}{x^3}\cdot\frac{x^2+5x}{4}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{2}{x}\cdot\sqrt{x^2+8}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[\left(\sqrt{x^4+x}-x\right)\frac{1}{x}\right]$

d) $\lim\limits_{x\to3} \left[\left(x^2-9\right)\cdot\frac{1}{x-3}\right]$

e) $\lim\limits_{x\to2} \left(\frac{x-2}{5}\cdot\sqrt{\frac{1}{x-2}}\right)$

f) $\lim\limits_{x\to4} \left(\sqrt{x^2-16}\cdot\sqrt{\frac{x}{x-4}}\right)$

g) $\lim\limits_{x\to2} \left(\sqrt{x^2-4}\cdot\frac{8}{3x-6}\right)$

h) $\lim\limits_{x\to-1} \left(\frac{5}{4x+x}\cdot\frac{x+1}{7x}\right)$

11. *(Indeterminación del tipo 1^∞). Calcula el valor de los siguientes límites[3]:*

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2}{x^2+2}\right)^{5x}$

b) $\lim\limits_{x\to0} (1-7x)^{\frac{4}{x}}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{5x^3}{5x^3-7}\right)^{2x}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{4x+3}{4x-5}\right)^{2x}$

e) $\lim\limits_{x\to0} (1+3x)^{\frac{6}{x}}$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(1-\frac{2x}{x^2-1}\right)^{-4x}$

[3] Recuerda que $e=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = 2,718281\ldots \in \mathbb{I}=\mathbb{R}-\mathbb{Q}$

12. *Calcula los siguientes límites:*

a) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^3-a^3}{x^2-2ax+a^2}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x}-1}{x}$ c) $\lim\limits_{x\to 4}(5-x)^{\frac{2x+8}{x-4}}$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{x^2+x-3}-x$ e) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3x+1}{2x+2}\right)^{\frac{6x}{x^2-3x+2}}$ f) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^4-81}{x^2-9x+18}$

g) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{x^2+x+1}$ h) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{8+x}-3}$ i) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-5x+2}{2x^2+x-3}$

j) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^3+4x-1}{5x^3+2x-3}$ k) $\lim\limits_{x\to\sqrt{5}}\left(x^2-4\right)^{\frac{x}{x^2-5}}$ l) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x-a}{x^3-a^3}$

m) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt[3]{x^3-27}}{\sqrt[3]{x^2+6x-27}}$ n) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^5-a^5}{x^2-3ax+2a^2}$ o) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x}$

p) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-x-6}{x^2-3x-10}$ q) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^3+1}{x^2+1}\right)^{\frac{3}{x-1}}$ r) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+5x^2+5x-2}{2x^2+5x+2}$

s) $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$ t) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\dfrac{2}{3x}\right)^{\frac{x-1}{x+2}}$ u) $\lim\limits_{x\to \frac{5}{2}^-}\dfrac{3x+1}{2x-5}$

13. *Estudia las asíntotas de las siguientes funciones.*

a) $f(x)=\dfrac{x+2}{x-1}$ *e)* $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$

b) $f(x)=\dfrac{x-x^2}{x+1}$ *f)* $f(x)=\dfrac{x^2+3x}{2x-1}$

c) $f(x)=\dfrac{9-x^2}{x-3}$ *g)* $f(x)=\dfrac{x^2-3x-4}{x^2-5x+4}$

d) $f(x)=\dfrac{x^2-x}{2x}$ *h)* $f(x)=\dfrac{x\left(x^2-x\right)}{x^2}$

14. *Dadas las siguientes funciones calcula sus asíntotas verticales, horizontales y/o oblicuas, si existen:*

a) $f(x)=x^2-4x+3$ *c)* $h(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$

b) $g(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$ *d)* $j(x)=\dfrac{2x+3}{x-2}$