UNIDAD 7:
FUNCIONES ELEMENTALES

1. FUNCIONES AFINES

Las funciones afines son funciones de la forma

$$f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$$
$$f(x)=ax+b$$

donde a y b son números reales no nulos.

Si $b=0$ y $a\neq 0$, entonces la función

$$f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$$
$$f(x)=ax$$

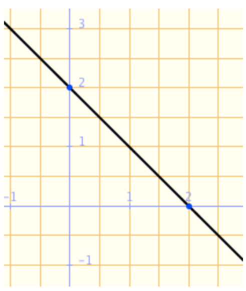
recibe el nombre de función lineal.

Por último, la función

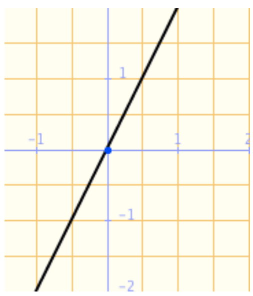
$$f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$$
$$f(x)=b$$

recibe el nombre de función constante.

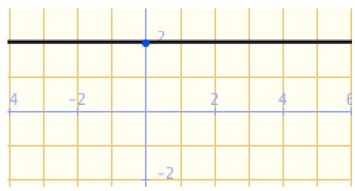
Geométricamente estos tres tipos de funciones representan rectas en el plano. Para dibujarlas, basta con construir una tabla de valores (con dos valores).



$f(x)=-x+2$



$f(x)=2x$



$f(x)=2$

Recuerda también que todas las funciones lineales pasan por el origen de coordenadas.

Ejercicios:

1. *Representa las siguientes funciones sobre unos mismos ejes:*

   $f_1(x)=2x+3$ $\qquad f_2(x)=\dfrac{3}{2}x$ $\qquad f_3(x)=-1$

2. *Representa las siguientes funciones y establece la relación que hay entre ellas:*

   $f_1(x)=x$ $\qquad f_2(x)=x+1$ $\qquad f_3(x)=x-2$

Algunas **propiedades** de las funciones afines, lineales y constantes son:

- Dominio: $(-\infty,+\infty)$

- Imagen o recorrido: $\begin{cases} -\text{ Afines y lineales: } \mathbb{R}=(-\infty,+\infty) \\ -\text{ Constantes: } \{b\} \end{cases}$
- Monotonía: $\begin{cases} -\text{ Afines y lineales: } \nearrow\nearrow \text{ si } a>0 \text{ y } \searrow\searrow \text{ si } a<0 \\ -\text{ Constantes: Como su nombre indica son constantes} \end{cases}$
- Extremos relativos: No tienen

Sobre la *notación*: $\nearrow\nearrow$ indica que la función es estrictamente creciente y $\searrow\searrow$ que es estrictamente decreciente.

2. FUNCIONES CUADRÁTICAS

Son funciones de la forma

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$f(x)=ax^2+bx+c$$

donde $a,c,b\in\mathbb{R}$ y $a\neq 0$.

Geométricamente representan parábolas, para cuya representación seguiremos los siguientes pasos:

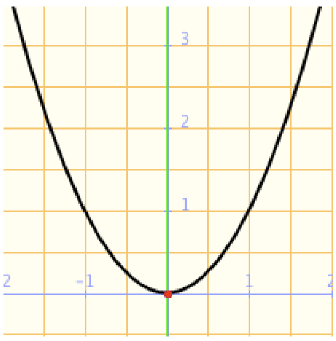
1) Se calcula el vértice:

$$V(x_v,y_v) \text{ donde } \begin{cases} x_v=\dfrac{-b}{2a} \\ y_v=f(x_v)=\text{ sustituir } x_v \text{ en la función} \end{cases}$$

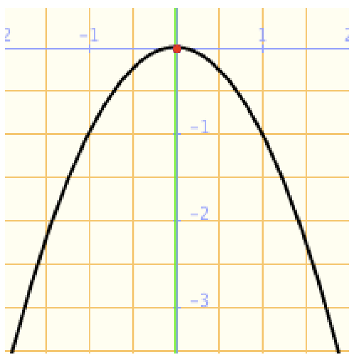
2) Se calculan los puntos de corte con el eje OX, si los hay, para lo que hay que resolver la ecuación $ax^2+bx+c=0$. Si queremos que la gráfica sea aún más precisa, calcularemos también el punto de corte con el eje OY.

3) Sólo se aplica si no hemos podido usar 2). Se construye una tabla de valores con dos valores a la izquierda del vértice y otros dos a la derecha del mismo.

Recuerda que la parábola está abierta hacia arriba (es convexa) cuando $a>0$, y está abierta hacia abajo (es cóncava) cuando $a<0$.



$y=x^2$



$y=-x^2$

Ejercicios:

3. *Representa las siguientes funciones cuadráticas:*

a) $y=x^2-2x+3$ *c)* $y=-x^2-2x-3$

b) $y=2x^2-10x+8$ *d)* $y=\frac{1}{3}x^2-x+3$

4. *Representa las siguientes funciones cuadráticas y establece la relación que hay entre ellas:* $f_1(x)=x^2,\ f_2(x)=x^2+2,\ f_3(x)=x^2-1$ y $f_4(x)=-x^2$

5. *Representa las siguientes parábolas en el dominio que se indica:*

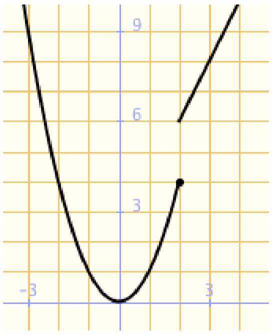
a) $y=x^2-6x+1$ para $x\in[1,6)$

b) $y=-x^2+3x$ para $x\in[0,4]$

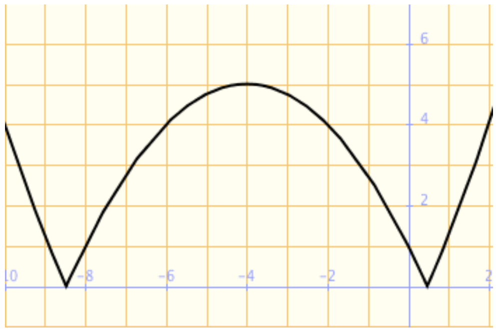
c) $y=x^2-4$ para $x\in(-\infty,-2]\cup(2,+\infty)$

3. FUNCIONES DEFINIDAS A TROZOS

Para su representación gráfica basta con hacer la correspondiente representación de cada uno de los trozos (“en su dominio”).



$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x\le 2 \\ 2x+2 & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$$



$$f(x)=\left|-\frac{1}{4}x^2-2x+1\right|$$

Ejercicios:

6. *Representa las siguientes funciones definidas a trozos:*

a) $f(x)=\begin{cases} 16-x^2 & \text{si } -2\le x<2 \\ x^2 & \text{si } 2\le x\le 3 \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} -x^2-2x & \text{si} \quad x\le 0 \\ -1+2x & \text{si} \quad 0<x\le 1 \\ -x^2+2x & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases} x^2+4x+3 & \text{si} \quad x\le -1 \\ (x-2)^2 & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$

7. *Una compañía de autobuses interurbanos ha comprobado que el número de viajeros (N) diarios depende del precio del billete (p) según la expresión:*

$$N(p)=300-6p$$

1) Dar la expresión que nos proporciona los ingresos diarios (I) de esa compañía en función del precio del billete. 2) ¿Qué ingreso diario se obtiene si el precio del billete es 15 euros? 3) ¿Cuál es el precio del billete que hace máximo los ingresos diarios? 4) ¿Cuáles son esos ingresos máximos?

8. *La altura en metros, H, que alcanza una pelota lanzada verticalmente hacia arriba, viene dada en función del tiempo en segundos por la expresión:* $H(t) = 20t - 2t^2$.

1) ¿Qué altura habrá alcanzado a los tres segundos?
2) ¿En qué momentos alcanzará 32 m de altura?
3) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza? ¿Dónde?

9. *En un estudio sobre el coste de producción de una empresa de ordenadores, se ha concluido que producir* x *unidades de un determinado componente tiene un coste expresado por la función* $f(x) = 0,01x^2 + x + 1$. *La venta de* x *unidades de ese componente proporciona unos ingresos que vienen determinados por la función* $g(x) = (6 + 0,25x) \cdot x$, *siendo* x *el número de unidades producidas.*

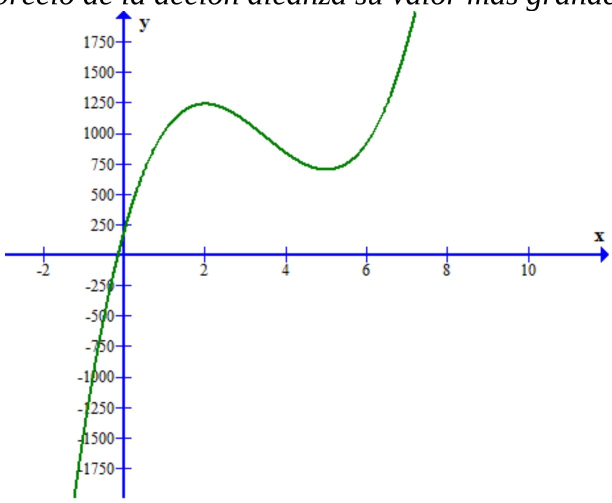
a) Calcular el número de unidades que deben producir para que los costes sean mínimos.
b) Hallar la expresión, en función de x, *de los beneficios, suponiendo que se venden todas las unidades que se producen.*
c) Calcular el número de unidades que deben producir y vender para que los beneficios sean máximos.

10. *El precio, en euros, que la acción de una empresa alcanza en el transcurso de una sesión de bolsa, viene dado por la función*

$$p(t) = 40t^3 - 420t^2 + 1200t + 200$$

en donde t *es el tiempo en horas a contar desde el inicio de la sesión. Supongamos que la sesión comienza a las 10 de la mañana y finaliza 7 horas después. Se pide:*

a) ¿Entre qué horas el precio de acción sube?
b) ¿Entre qué horas el precio de la acción baja?
c) ¿A qué hora el precio de la acción alcanza un máximo relativo? ¿Cuál es ese valor?
d) ¿A qué hora el precio de la acción alcanza un mínimo relativo? ¿Cuál es ese valor?
e) ¿A qué hora el precio de la acción alcanza su valor más grande? ¿Cuál es ese valor?

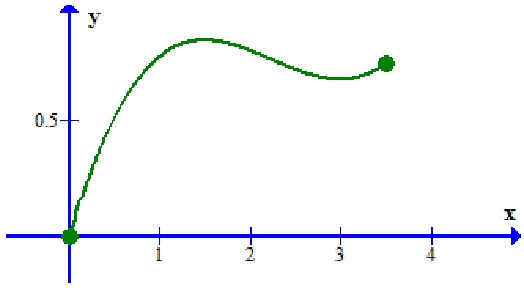


11. *El consumo de agua de un colegio viene dado por la función:*

$$f(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t < 0 \\ 0,1t^3 - 0,675t^2 + 1,35t & si \quad 0 \le t \le 3,5 \\ 0 & si \quad t > 3,5 \end{cases}$$

en donde t es el tiempo en horas a contar desde la apertura del colegio y f(t) es el consumo en m^3. Se supone que la jornada escolar comienza a las 10 horas y finaliza a las 13,5 horas. Se pide:

1) *¿Cuándo el consumo de agua es creciente? ¿Cuándo el consumo es decreciente?*
2) *¿En qué momento el consumo es máximo y en qué momento es mínimo?*



4. APLICACIÓN: FUNCIONES DE OFERTA Y DEMANDA

La función o curva de demanda del mercado muestra la relación entre la cantidad demandada de un bien por todos los individuos y su precio, manteniendo constantes otros factores (gustos, renta, precio de bienes relacionados…)

La **función de demanda**, $f_d(p)$, para cualquier bien o producto, es la función que nos da el número de unidades de producto en función del precio, p, de cada unidad que los consumidores están dispuestos a comprar.

En su expresión matemática más simple la función de demanda puede ser:

- Lineal: $f_d(p) = mp + n$ con $m < 0$
- Cuadrática: $f_d(p) = ap^2 + bp + c$ con $a < 0$

La función o curva de oferta del mercado muestra la relación entre la cantidad ofrecida de un bien por todos los productos y su precio, manteniendo constante otros factores (tecnología, precio de factores productivos…).

La **función de oferta**, $f_o(p)$, para cualquier bien o producto, es la función que nos da el número de unidades que los fabricantes están dispuestos a producir en función del precio unitario del producto.

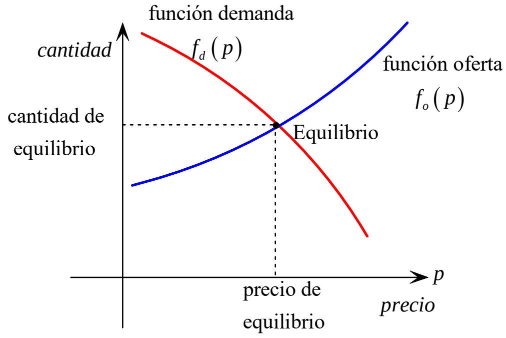
En su expresión matemática más simple la función de oferta puede ser:

- Lineal: $f_o(p) = mp + n$ con $m > 0$
- Cuadrática: $f_o(p) = ap^2 + bp + c$ con $a > 0$

Cuando se ponen en contacto consumidores y productores con sus respectivas funciones de demanda y oferta, podemos analizar cómo se lleva a cabo la coordinación de ambos tipos de agentes. Para ello debemos realizar un estudio conjunto de las gráficas de ambas funciones.

La **cantidad de equilibrio** es el número de unidades del producto que se debe fabricar para que la oferta y la demanda sean iguales.

El precio correspondiente a la cantidad de equilibrio, es decir, aquel precio en el que coinciden los planes de los demandantes o consumidores y de los ofertantes o productores se llama **precio de equilibrio**.



5. FUNCIONES DE PROPORCIONALIDAD INVERSA

Son funciones de la forma

$$f:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}-\{0\}$$
$$f(x)=\frac{k}{x}$$

donde *k* es un número real no nulo.

Geométricamente representan hipérbolas equiláteras cuyas asíntotas son los ejes coordenados:

* Asíntota horizontal: $y=0$

* Asíntota vertical: $x=0$

Ejercicio:

12. *Representa las siguientes funciones de proporcionalidad inversa:*

a) $y=\frac{1}{x}$ *c)* $y=\frac{1}{x-2}$

b) $y=-\frac{1}{x}$ *d)* $y=\frac{1}{x-2}+3$

6. FUNCIONES RACIONALES ESPECIALES

Son funciones de la forma

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d} \qquad \forall x\neq -\frac{d}{c}$$

donde $a,b,c,d\in\mathbb{R}$.

Para su **representación gráfica** (que es una hipérbola equilátera) construiremos una tabla de valores y a partir de ella deduciremos sus **propiedades**.

Estas gráficas poseen las siguientes asíntotas:

* Asíntota horizontal: $y=\frac{a}{c}$

* Asíntota vertical: $cx+d=0\Leftrightarrow x=-\frac{d}{c}$

Ejercicio:

13. *Representa las siguientes funciones racionales:*

a) $y=\frac{3x+2}{x-1}$ *c)* $y=\frac{4x+3}{x+1}$

b) $y=\frac{x-1}{x+1}$ *d)* $y=\frac{x+1}{x-1}$

7. FUNCIÓN VALOR ABSOLUTO DE UNA FUNCIÓN

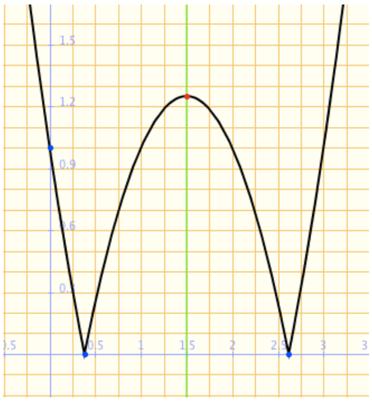
La **función valor absoluto** de una función $f(x)$, se define por:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{si} \quad f(x) < 0 \end{cases}$$

Para su **representación gráfica** usaremos cualquiera de los siguientes dos procedimientos:

(1) Representar $f(x)$ y los trozos de curva que estén en la parte negativa del eje OY ponerlos positivos (mediante sus simétricos)

(2) Escribir la función $y = |f(x)|$ como una función definida a trozos, y representar cada uno de los trozos correspondientes.



Ejercicio:

14. *Representa las siguientes funciones:*

a) $f(x) = \left| -\frac{1}{3}x^2 + 3 \right|$

b) $f(x) = \begin{cases} |x+2| & \text{si} \quad x \leq 0 \\ x^2 - 2 & \text{si} \quad 0 < x \leq 3 \\ 4 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} |x+1| & si \quad x \leq 0 \\ -x^2 + 1 & si \quad 0 < x \leq 2 \\ -2 & si \quad x > 2 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} 2 & si \quad x < -3 \\ |x+1| & si \quad -3 \leq x < 0 \\ 2x^2 - 4x + 3 & si \quad x \geq 0 \end{cases}$

8. TRASLACIONES Y GIROS DE FUNCIONES

Este es un procedimiento para representar de forma rápida muchas funciones, conociendo la gráfica de algunas funciones básicas $\left(y = x,\ y = x^2,\ y = \frac{1}{x}, \ldots\right)$

Seguiremos los siguientes **pasos**:

(1º) Se representa la función básica ($y=x,\ y=x^2,\ y=\frac{1}{x},\ldots$) que notaremos por $f(x)$

(2º) Traslaciones verticales:

Nuestra función será de la forma $f(x)+h$. Pues bien, si

$$\begin{cases} h>0 \to \text{ trasladamos } h \text{ unidades la gráfica de } f(x) \text{ hacia arriba} \\ h<0 \to \text{ trasladamos } h \text{ unidades la gráfica de } f(x) \text{ hacia abajo} \end{cases}$$

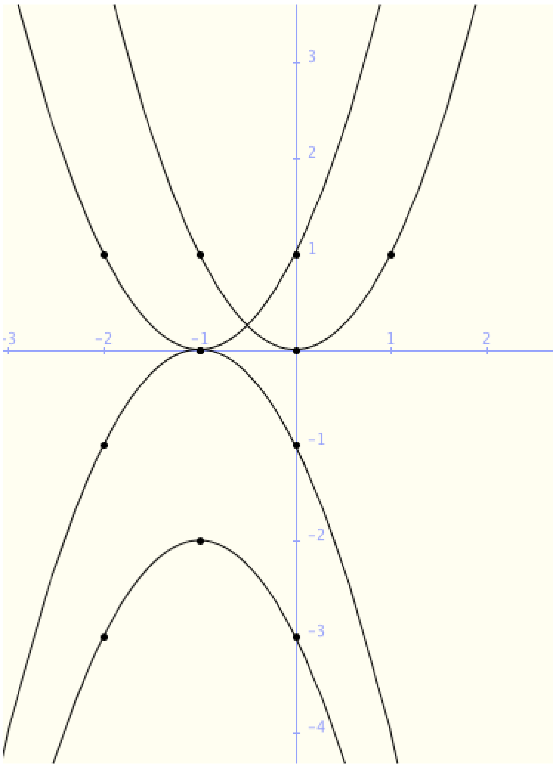
(3º) Traslaciones horizontales:

Nuestra función será de la forma $f(x+k)$. Pues bien, si

$$\begin{cases} k>0 \to \text{ trasladamos } k \text{ unidades la gráfica de } f(x) \text{ hacia la izquierda} \\ k<0 \to \text{ trasladamos } k \text{ unidades la gráfica de } f(x) \text{ hacia la derecha} \end{cases}$$

(4º) Si nuestra función es de la forma $f(x+h)+k$, seguiremos los pasos anteriores, en ese orden

<u>Ejemplo</u>: Representar $y=-(x+1)^2-2$



Pasos:

1º) $y=x^2$

2º) $y=(x+1)^2$

3º) $y=-(x+1)^2$

4º) $y=-(x+1)^2-2$

9. FUNCIONES LOGARÍTMICAS

■ **<u>Logaritmo de base a</u>**

El <u>logaritmo</u> en base $a(>0 \text{ y } \neq 1)$ de un número N es el exponente al que hay que elevar la base para que dé dicho número:

$$\log_a N = x \Leftrightarrow a^x = N$$

Los logaritmos de base 10 se llaman decimales[1] y se representaban por log, y los logaritmos de base e se llaman neperianos o naturales y se representaban por ln o L.

Propiedades:

1) $\log_a (MN) = \log_a M + \log_a N$

2) $\log_a \left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$ siempre que $N \neq 0$

3) $\log_a N^m = m \log_a N \quad \forall m \in \mathbb{R}$

Transformación de logaritmos:

4) $\log_a N = \dfrac{\ln N}{\ln a}$

Otras propiedades:

5) Los logaritmos de un número en dos bases inversas a y $\dfrac{1}{a}$ son opuestos.

6) Conocidos los logaritmos en una base mayor que 1 se pueden hallar fácilmente en cualquier otra base.

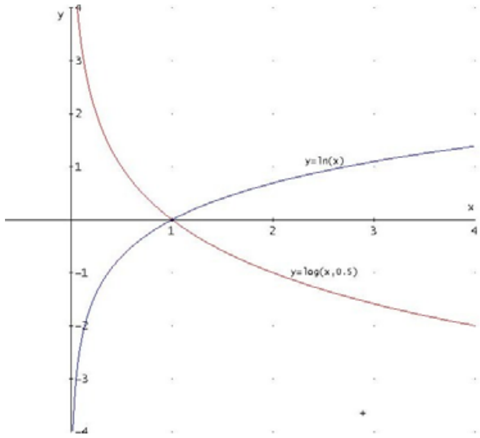
■ **Función logaritmo de base** $a(>0 \text{ y } \neq 1)$

$$\log_a : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \log_a x$$

Propiedades:

1) $\text{Dom}(\log_a) = (0,+\infty)$
2) $\text{Img}(\log_a) = \mathbb{R}$
3) Continua y estrictamente monótona (creciente si $a > 1$ y decreciente si $a < 1$)
4) Biyectiva, luego tiene inversa que es la función exponencial de base a .
5)
$$\text{Si } a>1 \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0+} \log_a x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \log_a x = +\infty \end{cases}$$
$$\text{Si } a<1 \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0+} \log_a x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \log_a x = -\infty \end{cases}$$
6) Curvatura:
$$\begin{cases} f'(x) = \dfrac{1}{x}\log_a e \\ f''(x) = -\dfrac{1}{x^2}\log_a e \to f(x) \text{ es } \begin{cases} \text{convexa si } a < e \\ \text{cóncava si } a \geq e \end{cases} \end{cases}$$

[1] Actualmente, esta notación está en desuso y se utiliza la notación log para representar el logaritmo natural o neperiano.



Ejercicio:

15. *Representa las siguientes funciones logarítmicas:*

a) $y = \log x$ *c)* $y = -\log x$

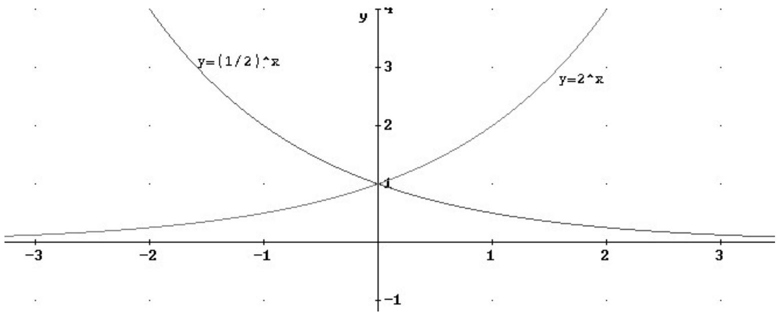
b) $y = \log_{10} x$ *d)* $y = \log_{\frac{1}{2}} x$

10. FUNCIONES EXPONENCIALES

■ **Dos funciones exponenciales**

$f(x) = 2^x$

$g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$



Propiedades:

1) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$

2) $\text{Img}(f) = \mathbb{R}^+$

3) f está acotada inferiormente, pero no superiormente

4) f no es par ni impar

5) f es continua

6) f es estrictamente creciente y por tanto inyectiva (luego tiene inversa)

7) f no tiene extremos relativos

8) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ y $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

9) $f^{-1}(x) = \log_2(x)$

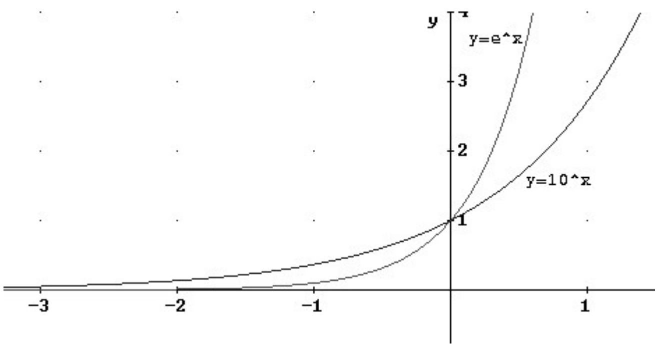
10) f es sobreyectiva y como consecuencia, es biyectiva

1) $\text{Dom}(g) = \mathbb{R}$
2) $\text{Img}(g) = \mathbb{R}^+$
3) g está acotada inferiormente pero no superiormente
4) g no es par ni impar
5) g es continua
6) g es estrictamente decreciente y por tanto inyectiva (luego tiene inversa)
7) g no tiene extremos relativos
8) $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$
9) $g^{-1}(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x)$
10) g es sobreyectiva y como consecuencia, es biyectiva

■ **<u>Dos funciones exponenciales especiales</u>**

$f(x) = e^x$ (donde $\ln^{-1} = f : e^x = y \Leftrightarrow x = \ln y$)

$g(x) = 10^x$



<u>Propiedades:</u>

1) $\text{Dom}(g) = \text{Dom}(g) = \mathbb{R}$
2) $\text{Img}(g) = \text{Img}(g) = \mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$
3) f y g son estrictamente crecientes y como consecuencia inyectivas
4) f y g están acotadas inferiormente pero no superiormente
5) f y g son continuas
6) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$
7) f y g son sobreyectivas y, por tanto, biyectivas
8) $f^{-1}(x) = \ln x$ y $g^{-1}(x) = \log x$

■ **<u>Función Exponencial</u>**

$f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$

$f(x) = a^x := e^{x \ln a}$ con $a > 0$ y $a \neq 1$

<u>Propiedades:</u>

1) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$
2) $\text{Dom}(f) = (0, +\infty)$

3) $f(0)=1$ y $f(1)=a$
4) $f(x+y)=f(x)\,f(y) \Leftrightarrow a^{x+y}=a^x a^y$
5) f es continua
6) f es estrictamente $\begin{cases}\text{creciente si } a>1 \\ \text{decreciente si } 0<a<1\end{cases}$
7) $\begin{cases}\text{Para } 0<a<1 \text{ se tiene que } \begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty\end{cases} \\ \text{Para } a>1 \text{ se tiene que } \begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0\end{cases}\end{cases}$
8) Curvatura: $f(x)$ es convexa

Ejercicio:

16. *Representa las siguientes funciones exponenciales:*

a) $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ *c)* $y=e^x$

b) $y=2^x$ *d)* $y=e^{-x}$

11. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

■ **Función seno**

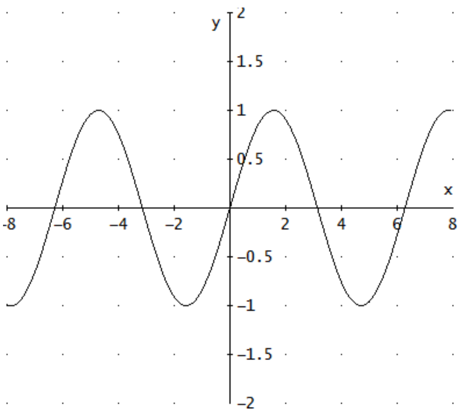
$$\begin{aligned}\text{sen}:\mathbb{R}&\to[-1,1]\\ x&\mapsto \text{sen}\,x\end{aligned}$$

Propiedades:

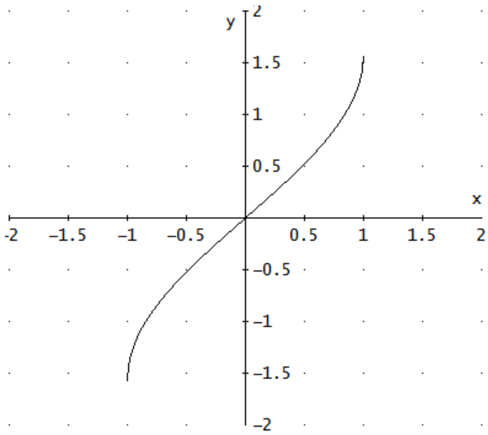
1) La función seno es impar: $\text{sen}(-x)=-\text{sen}\,x$
2) Es continua
3) $|\text{sen}\,x|\le 1 \quad \forall x\in\mathbb{R}$, es decir, está acotada
4) Es $2\pi-$periódica: $\text{sen}(x+2\pi)=\text{sen}\,x$
5) sen es estrictamente $\begin{cases}\text{creciente en } \left(\dfrac{3\pi}{2}+2\pi(k-1),\dfrac{\pi}{2}+2\pi k\right) \\ \text{decreciente en } \left(\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\dfrac{3\pi}{2}+2\pi k\right)\end{cases}$
6) Tiene máximos relativos en $\left(\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,1\right)$ y mínimos relativos en $\left(\dfrac{3\pi}{2}+2\pi k,-1\right)$.
7) Cortes con el eje OX: $x=\pi k$ con $k\in\mathbb{Z}$
8) $\text{sen}:\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]\to[-1,1]$ biyectiva

$\Rightarrow \exists\,\text{sen}^{-1}=\text{arcsen}:[-1,1]\to\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$

tal que $\operatorname{sen}(\arcsin x) = x = \arcsin(\operatorname{sen} x)$



Función seno



Función arco seno

■ **<u>Función coseno</u>**

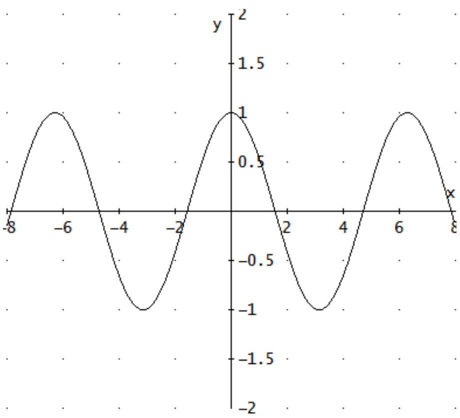
$$\cos : \mathbb{R} \to [-1,1]$$
$$x \mapsto \cos x$$

<u>Propiedades:</u>

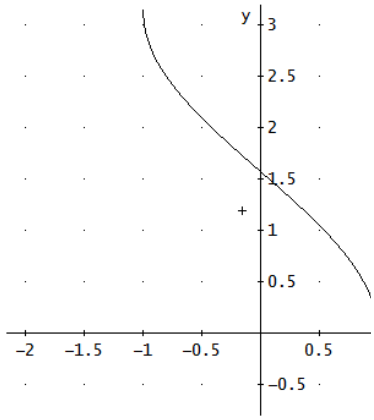
1) La función coseno es par: $\cos(-x) = \cos\ x$
2) Es continua
3) $|\cos x| \le 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, es decir, está acotada
4) Es $2\pi-$periódica: $\cos(x+2\pi) = \cos x$
5) cos es estrictamente $\begin{cases} \text{creciente en } (\pi(2k-1), 2\pi k) \\ \text{decreciente en } (2\pi k, \pi(2k+1)) \end{cases}$
6) Tiene máximos relativos en $(2\pi k, 1)$ y mínimos relativos en $(\pi(2k+1), -1)$.
7) Cortes con el eje OX: $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$ con $k \in \mathbb{Z}$
8) $\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$ biyectiva

   $\Rightarrow \exists \cos^{-1} = \arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$ tal que

$$\cos(\arccos x) = x = \arccos(\cos x)$$



Función coseno



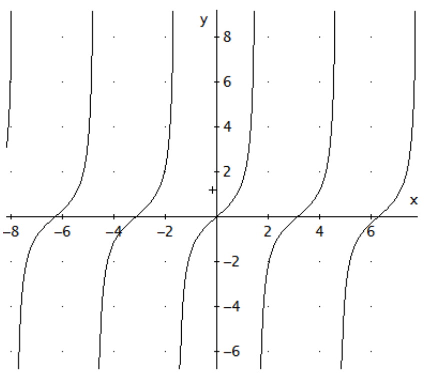
Función arco coseno

■ **Función tangente**

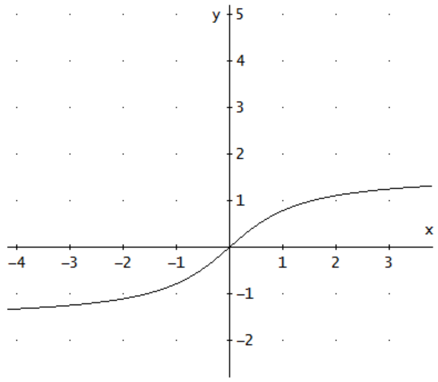
$$\mathrm{tg}:\mathbb{R}-\left\{k\pi+\frac{\pi}{2}:k\in\mathbb{Z}\right\}\to\mathbb{R}$$
$$x\mapsto \mathrm{tg}\,x$$

Propiedades:

1) La función tangente es impar: $\mathrm{tg}(-x)=-\mathrm{tg}\,x$
2) Es continua
3) No está acotada ni superior ni inferiormente
4) Es $\pi-$periódica: $\mathrm{tg}(x+\pi)=\mathrm{tg}\,x$
5) Cortes con el eje OX: $x=\pi k$ con $k\in\mathbb{Z}$
6) tg es estrictamente creciente
7) No tiene extremos relativos
8) $\begin{array}{l}\mathrm{tg}:\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\to\mathbb{R}\\ \quad x\longrightarrow \mathrm{tg}\,x\end{array}$ biyectiva $\Rightarrow \exists\,\mathrm{tg}^{-1}=\mathrm{arctg}:\mathbb{R}\to\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ tal que $\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}\,x)=x=\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\,x)$



Función tangente



Función arco tangente