Demostraciones por inducción

Principio de inducción matemática:

*Si $P(n)$ es una propiedad matemática que se verifica para $n=1$, y suponemos que es cierta para para $n\in\mathbb{N}$ (**hipótesis de inducción**), entonces el principio de inducción nos dice que si somos capaces de comprobar que la propiedad se verifica para $n+1$, dicha propiedad se verifica para todos los números naturales.*

Vamos a demostrar varias propiedades por inducción:

1) Potencia, de exponente natural, de un producto

$$(x\cdot y)^n = x^n\cdot y^n \qquad \forall x,y\in\mathbb{R} \text{ y } \forall n\in\mathbb{N}$$

Lo demostramos para $n=1$:

$$(x\cdot y)^1 = x\cdot y = x^1\cdot y^1$$

Hipótesis de inducción: lo suponemos cierto para n:

$$(x\cdot y)^n = x^n\cdot y^n$$

Lo demostramos para $n+1$:

$$(x\cdot y)^{n+1} = (x\cdot y)^n (x\cdot y) = x^n\cdot y^n\cdot(x\cdot y) = x^n\cdot x\cdot y^n\cdot y = x^{n+1}\cdot y^{n+1}$$

C.Q.D[1]*.*

2) Logaritmo de una potencia de exponente natural[2]**:**

$$\boxed{\log_a x^n = n\cdot\log_a x \qquad \forall x\in(0,+\infty),\ a>0,\ a\neq 1 \text{ y } \forall n\in\mathbb{N}}$$

Lo demostramos para $n=1$:

$$\log_a x^1 = \log_a x = 1\cdot\log_a x$$

Hipótesis de inducción: lo suponemos cierto para n:

$$\log_a x^n = n\cdot\log_a x$$

Lo demostramos para $n+1$:

$$\log_a x^{n+1} = \log_a(x^n\cdot x) = \log_a x^n + \log_a x = n\cdot\log_a x + \log_a x = (n+1)\log_a x$$

C.Q.D.

3) Suma de los ángulos interiores de un polígono convexo:

$$\boxed{\sum := 180^{\circ}\cdot(n-2) \qquad \forall n\in\mathbb{N}, n\geq 3}$$

donde n es el número de lados.

Lo demostramos para $n=3$ (triángulo):

$$180^{\circ}\cdot(3-2) = 180^{\circ}$$

que es lo que suman los ángulos interiores de un triángulo.
Hipótesis de inducción: lo suponemos cierto para n:

---

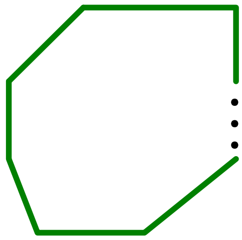
1 C.Q.D. = Como Queríamos Demostrar (Q.E.D. is an initialism of the Latin phrase Quod Erat Demonstrandum)

2 Sabemos que dicha propiedad es cierta para $n\in\mathbb{R}$.

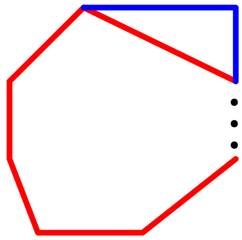
$$180^{\circ}\cdot(n-2)$$

Lo demostramos para $n+1$ *:*

polígono de $n+1$ lados



polígono de n lados + triángulo



$$180^{\circ}\cdot(n-2)+180^{\circ}=180^{\circ}\cdot(n-2+1)=180^{\circ}\cdot\left[(n+1)-2\right]$$

C.Q.D.

4) Suma de los n primeros números naturales:

$$\boxed{1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2} \qquad \forall n\in\mathbb{N}}$$

Lo demostramos para $n=1$ *:*

$$1=\frac{1(1+1)}{2}=1$$

Hipótesis de inducción: lo suponemos cierto para n *:*

$$1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

Lo demostramos para $n+1$ *:*

$$1+2+3+...+n+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}=\frac{n^2+n+2n+2}{2}=$$

$$=\frac{(n+1)(n+2)}{2}=\frac{(n+1)\left[(n+1)+1\right]}{2}$$

C.Q.D.

5) Suma de los n primeros cuadrados:

$$\boxed{1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \forall n\in\mathbb{N}}$$

Lo demostramos para $n=1$ *:*

$$1=1^2=\frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6}=\frac{1\cdot 2\cdot 3}{6}=1$$

Hipótesis de inducción: lo suponemos cierto para n *:*

$$1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Lo demostramos para $n+1$ *:*

$$1^2+2^2+3^3+...+n^2+(n+1)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6}=$$

$$= \frac{2n^3+3n^2+n+6n^2+12n+6}{6} = \frac{2n^3+9n^2+13n+6}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} =$$

$$= \frac{(n+1)\left[(n+1)+1\right]\left[2(n+1)+1\right]}{6}$$

C.Q.D.

6) Suma de los n primeros cubos:

$$\boxed{1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 \qquad \forall n \in \mathbb{N}}$$

Lo demostramos para $n=1$*:*

$$1 = 1^3 = \left[\frac{1(1+1)}{2}\right]^2 = \frac{4}{4} = 1$$

Hipótesis de inducción: lo suponemos cierto para n*:*

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

Lo demostramos para $n+1$*:*

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3+(n+1)^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{4(n+1)^3}{4} =$$

$$= \frac{n^4+6n^3+13n^2+12n+4}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = \left\{\frac{(n+1)\left[(n+1)+1\right]}{2}\right\}^2$$

C.Q.D.

<u>Ampliación</u>: Sumatorio (notación introducida en 1722 por el matemático francés Joseph Louis Lagrange)

El signo $\sum$ (sumatorio[3]) se utiliza en matemáticas para abreviar sumas.

Por ejemplo:

$$1+2+3+\ldots+100 = \sum_{k=1}^{100} k$$

$$1+2+3+\ldots+n = \sum_{k=1}^{n} k$$

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2$$

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3$$

[3] $\sum$ es la letra griega sigma.