UNIDAD 3:
ECUACIONES, INECUACIONES Y SISTEMAS

POLINOMIOS Y FRACCIONES ALGEBRAICAS

1. POLINOMIOS EN UNA INDETERMINADA

La expresión algebraica $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ recibe el nombre de polinomio en la indeterminada x. Donde:

n es un número natural.

$a_n, \ldots, a_0$ son números reales, que se denominan coeficientes del polinomio.

a_0 es el coeficiente de grado cero o término independiente.

El exponente n de la mayor potencia de x que aparece en el polinomio se denomina grado del polinomio.

Cada uno de los términos de un polinomio se denomina monomio. Un polinomio formado por dos monomios es un binomio; si son tres los monomios, un trinomio, y si son más, de manera genérica se denomina polinomio.

Valor numérico de un polinomio

El valor numérico de un polinomio $P(x)$ para $x = a$, que representaremos por $P(a)$, es el número que resulta de sustituir la indeterminada x por el número a y efectuar las operaciones indicadas.

Igualdad de polinomios

Dos polinomios de la misma indeterminada son idénticos si tienen iguales los coeficientes del mismo grado.

2. OPERACIONES CON POLINOMIOS

(1) Suma

$$\left.\begin{array}{l} P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \\ Q(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0 \end{array}\right\}$$

$$P(x) + Q(x) = (a_n + b_n)x^n + \ldots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$$

Propiedades:

1. Conmutativa: $P(x) + Q(x) = Q(x) + P(x)$
2. Asociativa: $P(x) + [Q(x) + R(x)] = [P(x) + Q(x)] + R(x)$
3. Elemento neutro:
   $0(x) = 0 : P(x) + 0(x) = P(x)$

4. Elemento opuesto: $P(x)+\left[-P(x)\right]=0(x)$, donde $-P(x)$ se obtiene al considerar los opuestos de todos y cada uno de sus términos.

(2) <u>Resta</u>

$$P(x)-Q(x)=P(x)+\left[-Q(x)\right]$$

(3) <u>Multiplicación</u>

La multiplicación de dos polinomios es otro polinomio de grado igual a la suma de los grados de los factores. Se obtiene al multiplicar cada término de un factor por cada uno de los términos del otro.

<u>Propiedades</u>:

5. Conmutativa: $P(x)Q(x)=Q(x)P(x)$
6. Asociativa: $P(x)\left[Q(x)R(x)\right]=\left[P(x)Q(x)\right]R(x)$
7. Elemento neutro: $1(x)=1:1(x)P(x)=P(x)$
8. Distributiva: $P(x)\left[Q(x)+R(x)\right]=P(x)Q(x)+P(x)R(x)$

Por verificar estas ocho propiedades, se dice que la terna $\left(\mathbb{R}[x],\ +,\ \cdot_{\mathbb{R}}\right)$ es un espacio vectorial real, donde $\mathbb{R}[x]=\{\text{polinomios con coeficientes reales}\}$.

$$\boxed{\left(\mathbb{R}[x],\ +,\ \cdot_{\mathbb{R}}\right) \text{ espacio vectorial real}}$$

(4) <u>División de polinomios</u>

Efectuar la división $D(x):d(x)$ es hallar dos polinomios $C(x)$ y $R(x)$ que verifiquen:

$$D(x)=d(x)C(x)+R(x)$$

donde los polinomios $C(x)$ y $R(x)$ deben verificar[1]:

$\deg C(x)=\deg D(x)-\deg d(x)$

$\deg R(x)<\deg d(x)$

3. REGLA DE RUFFINI

Si el divisor es un polinomio de primer grado del tipo $x-a$, la división se puede realizar de una manera más sencilla aplicando un algoritmo conocido como regla de Ruffini, que consiste en:

- Se escriben los coeficientes del dividendo.
- Se coloca el término independiente del divisor cambiado de signo.
- El primer coeficiente se coloca igual que el del dividendo.
- Los siguientes se hallan multiplicando el anterior por a y sumando el producto con el coeficiente correspondiente del dividendo.
- El último número obtenido es el resto de la división.
- Los números obtenidos antes son los coeficientes del cociente.

[1] deg significa grado (del inglés degree).

Teorema del resto

El valor numérico de un polinomio $P(x)$ cuando $x = a$ coincide con el resto de la división de este polinomio por $x - a$.

4. DIVISIBILIDAD DE POLINOMIOS

Si entre tres polinomios cualesquiera se verifica que $A(x) = B(x)C(x)$, diremos que:

- El polinomio $A(x)$ es múltiplo de $B(x)$ y $C(x)$. También se dice que $A(x)$ es divisible por cada uno de los polinomios $B(x)$ y $C(x)$.
- Los polinomios $B(x)$ y $C(x)$ son divisores del polinomio $A(x)$.

Criterio de divisibilidad de un polinomio por $x - a$

Un polinomio $P(x)$ es divisible por $x - a$ si, y sólo si, $P(a) = 0$.

5. RAÍCES DE UN POLINOMIO

Diremos que a es una raíz de $P(x)$ sii $P(a) = 0$.

■ Cálculo de las raíces de un polinomio

Determinar las raíces de un polinomio equivale a resolver la ecuación $P(x) = 0$.

■ Polinomios de primer y segundo grado

Se trata de resolver las ecuaciones de primer y segundo grado correspondientes.

■ Polinomios de grado ≥ 3

Las raíces enteras de un polinomio, si existen, son divisores de su término independiente.

6. FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

La factorización de un polinomio se consigue cuando es posible encontrar otros polinomios, los factores, de manera que su producto sea el polinomio dado.

Si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ es un polinomio y $x_1, \ldots, x_n$ son sus raíces, entonces, su descomposición (factorización) es

$$P(x) = a_n (x - x_n)(x - x_{n-1}) \ldots (x - x_1)$$

7. MÁXIMO COMÚN DIVISOR Y MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO

El máximo común divisor de dos o más polinomios es el polinomio de mayor grado que es divisor de todos ellos.

Si dos polinomios "no tienen ningún divisor común", su m.c.d. es el polinomio $1(x)=1$.

El mínimo común múltiplo de dos o más polinomios es el polinomio de menor grado que es múltiplo de todos ellos.

8. FRACCIONES ALGEBRAICAS

Si $A(x)$ y $B(x)$ son polinomios y $B(x)\neq 0$, la expresión $\frac{A(x)}{B(x)}$ recibe el nombre de fracción algebraica.

Fracciones algebraicas equivalentes

Las fracciones $\frac{A(x)}{B(x)}$ y $\frac{C(x)}{D(x)}$ son equivalentes (y escribiremos $\frac{A(x)}{B(x)}=\frac{C(x)}{D(x)}$) cuando $A(x)D(x)=B(x)C(x)$.

El valor numérico de dos fracciones algebraicas equivalentes para un determinado valor de x es el mismo.

Operaciones con fracciones algebraicas

- Suma y resta

$$\frac{A(x)}{B(x)}\pm\frac{C(x)}{D(x)}=\frac{\left[M(x):B(x)\right]A(x)\pm\left[M(x):D(x)\right]C(x)}{M(x)}$$

donde $M(x)$ es el m.c.m. de los denominadores.

- Multiplicación

$$\frac{A(x)}{B(x)}\cdot\frac{C(x)}{D(x)}=\frac{A(x)C(x)}{B(x)D(x)}$$

- División

$$\frac{A(x)}{B(x)}:\frac{C(x)}{D(x)}=\frac{A(x)D(x)}{B(x)C(x)}$$

ECUACIONES E INECUACIONES

1. IGUALDADES Y ECUACIONES

Las expresiones compuestas de dos miembros enlazados por el signo = se llaman **igualdades**, y ponen de manifiesto la equivalencia entre distintos conceptos, descubriendo con ellas aspectos nuevos de una misma realidad.

Las igualdades en las que en sus miembros aparecen expresiones algebraicas que sólo se satisfacen para un conjunto de valores reales se llaman **ecuaciones**.

2. ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA

Son ecuaciones de la forma

$$ax+b=0$$

(también llamadas lineales), donde x es la variable o incógnita y $a,b\in\mathbb{R}$ con $a\neq 0$.

Método general de resolución

1.- **Quitar los paréntesis.** Para ello se aplica la propiedad distributiva (es decir, el número o expresión algebraica que está fuera del paréntesis, multiplica a todos los sumandos que hay dentro del paréntesis)

2.- **Eliminar los denominadores**. Para ello se reducen todas las fracciones a común denominador (calculando el m.c.m.), y una vez que todas las fracciones tienen igual denominador, se quita éste, teniendo cuidado con los signos que hay delante de las fracciones.

Es posible que haya que volver a **quitar paréntesis.** Para ello se aplica la propiedad distributiva como antes.

3.- **Agrupar.** Llevamos a uno de los dos miembros todos los términos que tienen " x " y al otro todos los números (cuando un término cambia de miembro, también cambia de signo).

4.- **Operar.** Realizamos las operaciones.

5.- **Despejar.** El coeficiente de " x " pasa dividiendo (con el signo que tenga) al otro miembro de la ecuación.

Ejercicio:

1. *Resuelve las siguientes ecuaciones:*

a) $\frac{1+12x}{4}+\frac{x-4}{2}=\frac{3(x+1)-(1-x)}{8}$

b) $6\left(\frac{x+1}{8}-\frac{2x-3}{16}\right)=3\left(\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}\right)-\frac{3}{8}(3x-2)$

3. ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO CON UNA INCÓGNITA

Son ecuaciones de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0$$

(también llamadas cuadráticas), donde x es la incógnita y $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$.

Recuerda que cualquier ecuación de segundo grado (completa o incompleta) se puede transformar en una ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ [1], cuyas soluciones vienen dadas por la ***fórmula de Bhaskara***:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Método general para resolver ecuaciones de 2º grado:

1º) Si la ecuación tiene **denominadores** o **paréntesis**, se procede como siempre (se quitan los paréntesis y después los denominadores).

2º) **Agrupar** todos los términos en uno de los dos miembros, de forma que la ecuación quede igualada a cero.

3º) **Operar** los términos que sean semejantes (los que tienen la misma parte literal), de forma que la ecuación se transforme en una de la forma [1].

4º) **Obtener los coeficientes** a, b y c.

5º) **Aplicar la fórmula** de Bhaskara.

Llamamos **discriminante** de la ecuación [1] a

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

y nos indica la naturaleza de las soluciones de una ecuación de segundo grado:

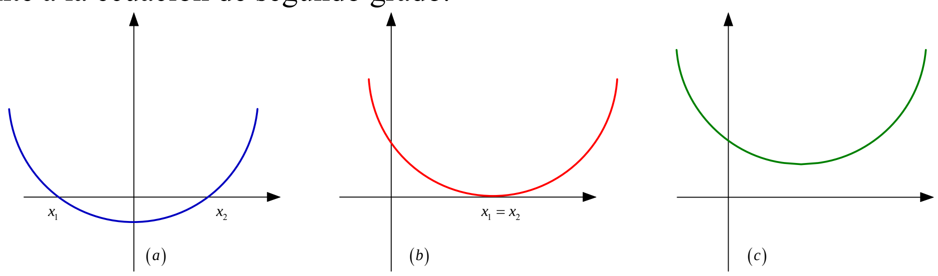
Si $\Delta > 0$, entonces la ecuación tiene dos soluciones reales distintas.

Si $\Delta = 0$, entonces la ecuación tiene una raíz doble (esto es, las dos soluciones son iguales)

Si $\Delta < 0$, entonces la ecuación no tiene raíces reales. Sus raíces son complejas.

Interpretación geométrica de las soluciones

Los tres casos anteriores se corresponden con las siguientes situaciones geométricas de la parábola correspondiente a la ecuación de segundo grado.



Ejercicio:

2. *Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado:*

a) $\dfrac{(2x-1)(2x+1)}{3} + \dfrac{(x-2)^2}{4} = \dfrac{3x+4}{6} + \dfrac{x^2}{3}$

b) $(x+1)^2 - (x-2)^2 = (x+3)^2 + x^2 - 20$

Relaciones entre las raíces y los coeficientes

Sean x_1, x_2 las raíces de la ecuación de segundo grado $ax^2+bx+c=0$. Dichas raíces verifican las siguientes relaciones:

$$\boxed{\begin{aligned} x_1+x_2&=-\frac{b}{a}\\ x_1\cdot x_2&=\frac{c}{a}\end{aligned}}\ \text{Relaciones de Cardano-Viète}$$

<u>Ecuación de segundo grado prefijadas las soluciones</u>

Conocidas las soluciones x_1 y x_2 de una ecuación de segundo grado es posible reconstruir la ecuación. Se procede como sigue:

$$ax^2+bx+c=0 \xrightarrow{:a} x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0 \longrightarrow x^2-\left(-\frac{b}{a}\right)x+\frac{c}{a}=0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{x^2-Sx+P=0}$$

donde $S=x_1+x_2$ y $P=x_1\cdot x_2$.

<u>4. ECUACIONES QUE SE RELACIONAN CON LAS DE 2º GRADO</u>

<u>4.1. Ecuaciones bicuadradas</u>

Son ecuaciones de cuarto grado sin términos de grado impar:

$$ax^4+bx^2+c=0 \qquad [2]$$

donde $a,b,c\in\mathbb{R}$ y $a\neq 0$.

<u>Método general de resolución:</u>

Para llegar a una ecuación de la forma [2] puede que haya que quitar paréntesis y denominadores. Si es así, se procede como con las ecuaciones de primer y segundo grado.

1º) Se efectúa el cambio de variable $\boxed{x^2=y}$ con lo que queda una ecuación de segundo grado en la incógnita y.

2º) Se resuelve la ecuación $ay^2+by+c=0$ resultante del paso anterior.

3º) Las soluciones de la ecuación original son $x=\pm\sqrt{y}$ donde y son las soluciones de la ecuación del paso 2.

<u>Ejercicio:</u>

3. *Resuelve las siguientes ecuaciones bicuadradas, comprobando las soluciones obtenidas:*

1) $x^4-26x^2=-25$

2) $4x^4-17x^2+4=0$

<u>4.2. Ecuaciones bicúbicas</u>

Son ecuaciones de sexto grado de la forma:

$$ax^6+bx^3+c=0 \qquad [3]$$

donde $a,b,c\in\mathbb{R}$ y $a\neq 0$.

Método general de resolución:

Para llegar a una ecuación de la forma [3] puede que haya que quitar paréntesis y denominadores. Si es así, se procede como con las ecuaciones de primer y segundo grado.

1º) Se efectúa el cambio de variable $\boxed{x^3 = y}$ con lo que queda una ecuación de segundo grado en la incógnita y.

2º) Se resuelve la ecuación $ay^2 + by + c = 0$ resultante del paso anterior.

3º) Las soluciones de la ecuación original son $x = \sqrt[3]{y}$ donde y son las soluciones de la ecuación del paso 2.

Ejercicio:

4. *Resuelve las siguientes ecuaciones bicúbicas:*

a) $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$

b) $x^6 - 26x^3 - 27 = 0$

c) $x^6 + 7x^3 - 8 = 0$

5. OTRAS ECUACIONES

5.1. Ecuaciones con radicales

Son ecuaciones en las que la incógnita aparece bajo el signo radical (raíz cuadrada).

Método de resolución:

1º) Se deja uno de los radicales sólo en uno de los miembros.

2º) Se elevan al cuadrado los dos miembros de la ecuación.

3º) Si la ecuación contiene más radicales, se vuelven a repetir los pasos 1 y 2.

4º) Se resuelve la ecuación de primer o segundo grado que resulte.

5º) Se comprueban las soluciones en la ecuación original.

Ejercicio:

5. *Resuelve las siguientes ecuaciones radicales, comprobando las soluciones obtenidas:*

1) $\sqrt{5x-7} - \sqrt{1-x} = 0$

2) $\sqrt{2x-3} + \sqrt{x+10} - 7 = 0$

3) $\sqrt{x} + x = \sqrt{3x + x^2}$

4) $\sqrt{x^2 + 6x} = x + \sqrt{2x}$

5.2. Ecuaciones con fracciones algebraicas

Son ecuaciones en las que aparecen fracciones algebraicas.

Método general de resolución:

1º) Se efectúan las operaciones que aparezcan.

2º) Se resuelve la ecuación resultante (polinómica…).

3º) Hay que comprobar que los valores obtenidos son realmente soluciones de la ecuación original.

Ejercicio:

6. *Resuelve las siguientes ecuaciones con fracciones algebraicas (y recuerda que hay que comprobar los valores obtenidos para ver cuáles son realmente solución):*

a) $\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{2}{x}=\dfrac{2-5x}{x^2+3x}$

b) $\dfrac{2x+3}{2x-1}-\dfrac{1}{x}=4$

c) $\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{2x}{x+1}=3$

d) $\dfrac{5}{x+2}+\dfrac{x}{x+3}=\dfrac{3}{2}$

5.3. La factorización como recurso para resolver ecuaciones

Siempre que podamos factorizar (fácilmente) la ecuación y ésta quede igualada a cero, este método ofrece buenos resultados.

Recuerda que, para factorizar una ecuación, se pueden aplicar los siguientes **procedimientos**:

a) **Sacar factor común** todo lo que se pueda.

b) Aplicar las **identidades notables**.

c) La regla de **Ruffini**

Para su resolución basta aplicar la siguiente ***propiedad***: "si un producto es igual a cero, es porque alguno de sus factores es cero".

Ejercicio:

7. *Resuelve las siguientes ecuaciones:*

a) $3x^3-3x^2-3x+3=0$

b) $x^6+6x^5+9x^4-x^2-6x-9=0$

c) $2x^4+15x^3+31x^2+12x=0$

d) $x^6-9x^5+24x^4-20x^3=0$

e) $x^4-8x^2-9=0$

6. ECUACIONES EXPONENCIALES

Una **ecuación** es **exponencial** cuando la incógnita aparece en el exponente.

Vamos a resolver los siguientes *tipos de ecuaciones exponenciales*:

1) Reducibles a una igualdad de potencias de la misma base

2) Resolubles por cambio de variable

3) Resolubles mediante logaritmos

6.1. Reducibles a una igualdad de potencias de la misma base

Para resolverlas, generalmente se descomponen en factores primos las bases, y se realizan las operaciones necesarias hasta conseguir una igualdad de potencias con la misma base.

6.2. Resolubles por cambio de variable

Para resolver este tipo de ecuaciones, tenemos que conseguir (factorizando las bases, aplicando las propiedades de las potencias…) que todas las exponenciales que aparezcan sean la misma. Dicha exponencial nos da el cambio de variable que hay que hacer. Al realizar dicho cambio queda una ecuación de las que ya sabemos resolver (de primer grado, de segundo, bicuadradas...).

6.3. Resolubles mediante logaritmos

Cuando la ecuación exponencial no se pueda resolver por ninguno de los procedimientos anteriores, la resolveremos tomando logaritmos en los dos miembros de la misma.

Ejercicio:

8. *Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales, reducibles a una igualdad de potencias de la misma base:*

1) $4^{-4x} = 256$
2) $2^x \cdot 2^{x-1} \cdot 2^{x+1} = 64$
3) $7^{3x-2} = \sqrt{7^{x-1}}$
4) $11^{x^2-3x+2} = 1$
5) $3^{4-x^2} = \frac{1}{9}$
6) $2^{3x} = 0,5^{3x+2}$
7) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-x+3} = 32^{3x-2}$
8) $128^{x+1} = 2^{x^2-x-2}$
9) $\sqrt{\sqrt{7}+6\sqrt{7}} = 49^{\frac{x}{2}}$
10) $\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{1-x}$

9. *Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales, resolubles por cambio de variable:*

1) $9^x - 4\cdot 3^x + 3 = 0$
2) $5^{4x} - 3\cdot 5^{2x} - 10 = 0$
3) $7^x + 7^{x+1} + 7^{x+2} = 2\,793$
4) $5^{x+1} + 5^{x-2} + 5^x = \frac{151}{25}$
5) $a^{x^2-2x+4} = \frac{a^{11}}{a^8}$
6) $\left(a^{x-3}\right)^x = \left(\frac{1}{a}\right)^{-2x}$
7) $\frac{4^{x-1}}{2^{x+2}} = 186$
10) $5^{x-1} = 2 + \frac{3}{5^{x-2}}$
11) $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 7$
12) $9^x - 2\cdot 3^{x+2} + 81 = 0$
13) $5^{x+1} = 10 + 3\cdot 5^{2-x}$
14) $6^{1-x} + 6^x = 7$
15) $3^x + 3^{x+2} = 60$
14) $5^{x+1} + 5^x + 5^{x-1} = \frac{31}{5}$

10. *Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales, resolubles por logaritmos:*

1) $10^x = 2$
2) $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} = 1$
3) $3^x = 17$
4) $5^x = 0,8$
5) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 7$
6) $(-2)^x = 3$

11. *Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:*

1) $3^x \cdot 5^{x-1} = 10125$
2) $3^x \cdot 5^{2x} = 4$

7. ECUACIONES LOGARÍTMICAS

Son ecuaciones en las que la incógnita viene afectada por el logaritmo.

No existe un procedimiento general para resolver todas las ecuaciones logarítmicas, por lo que en cada caso concreto habrá que utilizar lo que sabemos:

1) Definición de logaritmo
2) Propiedades de los logaritmos
3) Igualdad de logaritmos

En este tipo de ecuaciones **siempre hay que comprobar** que los valores obtenidos verifican la ecuación original, es decir, son solución.

Ejercicio:

12. *Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:*

a) $\log_{10} x + \log_{10} 2 = 1$

b) $\log_e (2x-3) + \log_e (5-x) = \log_e 5$

c) $\log_{10} x - \log_{10} 3 = 1$

d) $2\log_{10} x - \log_{10} 4 = \log_{10} 9$

e) $4\log_{10} x - \log_{10} 100 = 2$

f) $\log_e (x^2+3x+2) - \log_e (x^2-1) = \log_e 2$

g) $\log_{10} (x^2+2x-39) - \log_{10} (3x-1) = 1$

h) $\log_2 x^2 - \log_2 \left(x - \frac{3}{4}\right) = 2$

i) $2\log_{10} x - \log_{10} (x-16) = 2$

j) $2\left[1 - \log_{10}(2x+3)\right] = 4\log_{10} \sqrt{5x-3}$

k) $3\log_e x - \log_e 32 = \frac{\log_e x}{2}$

l) $\frac{\log_{10} 2 + \log_{10}(11-x^2)}{\log_{10}(5-x)} = 2$

m) $\log_e 2 + \log_e (11-x^2) = 2\log_e (5-x)$

n) $2\log_{10} x - 4\log_{10} 2 = 3\log_{10} x$

ñ) $2\log_{10} x = 3 + \log_{10} \frac{x}{10}$

o) $3\log_2 x - 2\log_2 \frac{x}{3} = 2\log_2 3 + 1$

p) $\frac{10^{\log_{10} x}}{1+10^{2\log_{10} x}} = \frac{1}{2}$

13. *Halla la solución de las siguientes ecuaciones logarítmicas:*

a) $\log_{10} \sqrt{8x+2} - \log_{10} \sqrt{x-4} = 1 - \log_{10} 2$

b) $\log_e x - \log_e \sqrt[3]{x} + \log_e x^2 = \dfrac{16}{3}$

c) $\log_{10} \sqrt[3]{x} = \sqrt{\log_{10} x}$

d) $x + 1 = \dfrac{\log_2 2^{x+3}}{\log_2 3}$

8. APLICACIONES

- *Para resolver las ecuaciones en que la incógnita está en el exponente*. Por ejemplo, si nos piden el número de períodos T que hay que tener cierto capital C, para que el montante (capital existente en cada momento) M, sea el que nosotros queramos, hay de despejar T de la siguiente ecuación, aplicando logaritmos:

$$M = C\left(1 + \frac{r}{n}\right)^T \to T = \frac{\log M - \log C}{\log\left(1 + \frac{r}{n}\right)}$$

donde M = montante, C = capital, $r = \dfrac{R}{100}$ = tanto por uno (R = rédito), $n =$ número de períodos por año y T = número de períodos total.

- *Para calcular números grandes con la calculadora*. Si intentamos calcular 625^{2011} con la calculadora nos aparece en pantalla el mensaje Math ERROR. Calculemos dicho número con la ayuda de los logaritmos:

$$N = 625^{2011} \to \log_{10} N = \log_{10} 625^{2011} = 2011 \cdot \log_{10} 625 = 2011 \cdot 2,795880017 = \\ = 2622,514715$$

de donde $N = 10^{2622,514715} = 10^{0,514715} \cdot 10^{2622} = 3,271259524 \cdot 10^{2622}$ y ya tenemos el número expresado en notación científica y listo para trabajar con él.

- *Escala Richter para los terremotos*. Es una escala logarítmica que asigna un número para cuantificar la energía liberada en un terremoto. Dicho número viene dado por la expresión

$$M = \log_{10} A + 3\log_{10}(8\Delta t) - 2,92$$

donde

A = amplitud de las ondas en milímetros (tomada directamente del sismógrafo)
Δt = tiempo en segundo desde el inicio de las ondas P (primarias) hasta el inicio de las ondas S (secundarias).

8. INECUACIONES CON UNA Y DOS INCÓGNITAS

Una inecuación es una desigualdad entre expresiones algebraicas.
Una solución de una inecuación es un valor de la variable que hace que se cumpla la desigualdad.

Resolver una inecuación consiste en encontrar todas sus soluciones. Habitualmente tiene infinitas, que se agrupan en intervalos o semirrectas de $\mathbb{R}$.

8.1. Inecuaciones lineales con una incógnita

Para resolver una inecuación lineal con una incógnita, se procede de forma similar a las ecuaciones, pero teniendo en cuenta las desigualdades y aplicando las propiedades de las mismas. Sus soluciones son todos los puntos de un intervalo o semirrecta.

Ejercicios:

14. *Resuelve las siguientes inecuaciones de primer grado:*

a) $2x-3x+5>6x-1$ c) $x+4(3-x)<15$

b) $4x-2(x+1)\leq 0$ d) $3(x-1)^2-2(x+1)<3x^2+2$

15. *Resuelve las ecuaciones del ejercicio 1 como inecuaciones de primer grado, cambiando el signo = por:*

a) $>$ b) $<$ c) $\geq$ d) $\leq$ e) $>$

8.2. Inecuaciones cuadráticas con una incógnita

Las soluciones de las inecuaciones cuadráticas dependen de la posición de la parábola respecto del eje OX y del signo de desigualdad.

Para resolverlas:

1º) Se resuelve la correspondiente ecuación de segundo grado.

2º) Se representan en una recta las soluciones obtenidas.

3º) Se toman puntos a la izquierda de la solución más pequeña, entre las dos soluciones y a la derecha de la más grande.

4º) Los intervalos (semirrectas) que verifiquen la desigualdad, constituyen la solución de la inecuación.

Ejercicios:

16. *Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:*

a) $x^2-3>3x+1$

b) $x^2-3x\leq 4$

c) $3x-2x^2>x+x^2$

17. *Resuelve las ecuaciones del ejercicio 2 como inecuaciones de segundo grado, cambiando el signo = por:*

a) $>$ b) $<$ c) $\geq$ d) $\leq$ e) $>$

8.3. Inecuaciones lineales con dos incógnitas

Una inecuación lineal con dos incógnitas adopta la forma

$$ax+by+c<0$$

donde el signo $<$ puede ser $\leq$, $>$ o $\geq$.

En cada caso, el conjunto de soluciones es el semiplano que está a uno de los lados de la recta $ax+by+c=0$.

Para resolverlas, lo que hay que hacer es representar la recta asociada: $ax+by+c=0$, tomar un par (x,y) en cada uno de los semiplanos (que no estén en la recta) y comprobar si cumplen la inecuación o no. Cuando en la desigualdad está incluido el signo igual ($\leq$ o $\geq$), los puntos de la recta son también soluciones.

Ejercicio:

18. *Resuelve las siguientes inecuaciones con dos incógnitas de primer grado:*

a) $2x+3y \leq 5$

b) $2x-y>5$

c) $3x+2y \geq 4$

SISTEMAS DE ECUACIONES Y DE INECUACIONES

1. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES 2×2

Un sistema 2×2 (2 ecuaciones y 2 incógnitas) es un sistema de la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

donde $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{R}$ son los coeficientes, $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ los términos independientes y x, y las variables o incógnitas.

- Una solución del sistema es una pareja de valores de las variables que satisfacen las dos ecuaciones al mismo tiempo.
- Dos sistemas son equivalentes cuando tienen la misma solución.
- Resolver un sistema es encontrar todas sus soluciones.

Resolución de sistemas lineales 2×2

- ***Método de sustitución***

Consiste en despejar una de las dos variables de cualquiera de las ecuaciones (conviene elegir la ecuación de forma que la variable tenga coeficiente ± 1, si ello es posible) y sustituir dicho valor en la otra ecuación. Se obtiene así una ecuación de primer grado.

- ***Método de igualación***

Despejar la misma variable de las dos ecuaciones e igualar sus expresiones. Al igual que en el caso anterior se obtiene una ecuación de primer grado.

- ***Método de reducción***

Consiste en eliminar una de las dos variables. Para ello sumaremos ambas ecuaciones, habiendo multiplicado previamente (si es necesario) una o las dos ecuaciones por números convenientes, de forma que los coeficientes de la variable que queremos eliminar sean opuestos.

Discusión de sistemas

- El sistema es **compatible** si tiene solución
    - Compatible **determinado** si tiene solución única
    - Compatible **indeterminado** si tiene infinitas soluciones
- El sistema es **incompatible** si no tiene solución

Interpretación geométrica de sistemas lineales 2×2

- Si el sistema es compatible determinado, la solución es un punto, que es el punto de corte de las rectas que representan dichas ecuaciones.
- Si el sistema es compatible indeterminado es porque las dos ecuaciones representan a la misma recta.
- Si el sistema es incompatible es porque las rectas son paralelas.

2. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES 3×3: MÉTODO DE GAUSS

Son de la forma

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

donde $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}, b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$ y $x,\ y,\ z$ son las incógnitas. Una solución del sistema es una terna (x, y, z) que transforma todas las ecuaciones en identidades.

Transformaciones elementales

1. Reordenar las ecuaciones y/o incógnitas $\left(F_i \leftrightarrow F_j\right)$.
2. Multiplicar los dos miembros de una ecuación por un número distinto de cero ($a \cdot F_i$ con $a \in \mathbb{R} - \{0\}$).
3. Sumar a una ecuación otra (u otras) multiplicada previamente por un número $\left(aF_i + F_j\right)$.

Método de GAUSS

Consiste en utilizar las transformaciones elementales para triangular el sistema, es decir,

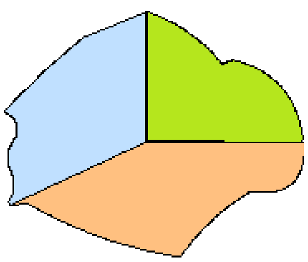
$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} c_{11}x + c_{12}y + c_{13}z = d_1 \\ \qquad\quad c_{22}y + c_{23}z = d_2 \\ \qquad\qquad\qquad c_{33}z = d_3 \end{cases}$$

Para resolver el sistema triangular basta con resolver la tercera ecuación (obtenemos «*z*»), sustituir en la segunda y obtener el valor de «*y*», y sustituir ambos valores en la primera ecuación para obtener «*x*».

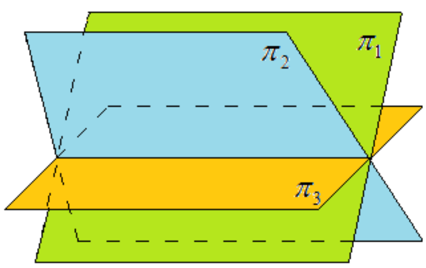
Interpretación geométrica de sistemas lineales 3×3

Cada una de las ecuaciones de un sistema 3×3 representa geométricamente un plano. Tenemos así la siguiente interpretación:

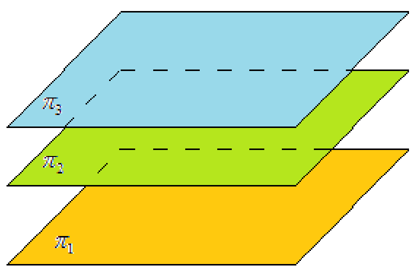
- Si el sistema es **compatible determinado**, la solución es un punto, que es el punto de corte de los tres planos que representan dichas ecuaciones.
- Si el sistema es **compatible indeterminado** es porque los tres planos se cortan en una recta.
- Si el sistema es **incompatible** es porque los tres planos no se cortan a la vez.



Compatible determinado



Compatible indeterminado



Incompatible

Ejercicio:

19. *Resuelve los siguientes sistemas por el método de Gauss:*

a) $\begin{cases} x+y-2z=-5 \\ 2x-y+z=2 \\ 3x+2y+z=5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x-y+2z=1 \\ 2x-z=2 \\ x+y=-3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+2y+3z=4 \\ -x+3y-z=-2 \\ 2x-y+4z=6 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -3x+2y-z=0 \\ x-2z=-1 \\ 2y-7z=3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x+y-3z=8 \\ -2x+4y=2 \\ y+z=1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x-y+z=3 \\ -x+2z=1 \\ -2y+6z=-4 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 2x-y+2z=6 \\ 3x+y-z=2 \\ -x+2y-z=0 \end{cases}$

h) $\begin{cases} x+y+z=5 \\ -x+2y-z=-2 \\ x+4y+2z=0 \end{cases}$

i) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+y-z=2 \\ x+y=0 \end{cases}$

Problemas:

20. *Tres amigas, Elena, Carmen y Cristina, entran en una tienda de deportes en la que solo hay tres tipos de artículos. Elena se compra 2 pares de zapatillas, 1 sudadera y 1 pantalón. Carmen se compra 1 par de zapatillas, 2 sudaderas y 2 pantalones, y Cristina se compra 2 pares de zapatillas y 3 pantalones. Elena se ha gastado en total 70 euros, Carmen 80 euros y Cristina 75 euros. ¿Cuánto vale cada artículo?*

21. *Un grupo de 30 alumnos de 2° de bachillerato realiza una votación a fin de determinar el destino de la excursión fin de curso, entre los siguientes lugares: Baleares, Canarias y París. El número de los que prefieren Baleares triplica al número de los que prefieren París. El 40% de los que prefieren Canarias coincide con la quinta parte de la suma de los que prefieren los otros dos lugares. Halla el número de votos que obtuvo cada destino.*

22. *Tres amigos, A, B y C, deciden hacer un fondo común con el dinero que tienen para hacer una compra de golosinas. La razón entre la suma y la diferencia de las cantidades de dinero que tienen A y B es 11/5. Dividiendo la cantidad de dinero que tiene A entre la cantidad de dinero que tiene B se obtiene de cociente 2 y de resto la cantidad de dinero que tiene C. Halla la cantidad de dinero que tiene cada uno sabiendo, además, que el doble de la suma de las que tienen B y C excede en 2 euros a la que tiene A.*

23. *Hallar las edades de un padre y de sus dos hijos sabiendo que actualmente las tres suman 88 años; que, dentro de 10 años, la suma de las edades que tendrán el padre y el hijo menor excederá en 2 años al triple de la edad que tendrá el hijo mayor y que hace 12 años, la suma de las edades que tenía el padre y el hijo mayor era doce veces la edad que tenía el hijo pequeño.*

24. *A los 10 minutos de comenzar una clase de matemáticas de 2° de bachillerato, una parte de los alumnos están mirando las anotaciones que el profesor hace en la pizarra, otra parte está tomando apuntes y el resto, que es la sexta parte del total, están distraídos. Quince minutos más tarde, tres alumnos distraídos pasan a tomar* *apuntes, un alumno de los que toma apuntes pasa a mirar la pizarra y 8 alumnos que miraban la pizarra, se distraen. En este momento hay el mismo número de alumnos en cada uno de los tres grupos: los que miran la pizarra, los que toman apuntes y los distraídos. Hallar el número de alumnos que hay en la clase.*

25. *Las edades de tres vecinos suman 54 años y son proporcionales a 2, 3 y 4. Halla la edad de cada uno de ellos.*

26. *En una clase se celebran elecciones para Delegado. Se presentan dos candidatos: X e Y. El 5% del total de votos emitidos es nulo. Cuatro veces el número de votos obtenido por Y menos tres veces el número de votos obtenidos por X excede al número de votos nulos en una unidad. Si dividimos el número de votos obtenidos por X entre el número de los obtenidos por Y se obtiene de cociente 1 y de resto 7. ¿Cuántos votos obtuvo cada candidato?*

27. *Una determinada Universidad tiene 1000 profesores entre Catedráticos, Titulares y Asociados. Si 50 Titulares pasaran a ser Catedráticos, el número de Titulares restantes sería doble que el número de Catedráticos que resultarían del traspaso más el número de Asociados. En cambio, si 100 Titulares pasaran a ser Catedráticos, entonces el número de Titulares restantes sería igual que la suma del número de Catedráticos resultantes del traspaso y el número de Asociados. Halla el número inicial de profesores de cada categoría.*

3. SISTEMAS DE ECUACIONES NO LINEALES 2×2

Los que estudiaremos son sistemas en los que una de las dos ecuaciones es no lineal, es decir, aparecerán productos de las variables, una variable al cuadrado o la inversa de una variable y la otra ecuación será, en general, lineal.

Para su **resolución** utilizaremos los mismos métodos que para los sistemas de ecuaciones lineales (igualación, sustitución y reducción).

Ejercicio:

28. *Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones no lineales, por el método que creas más conveniente:*

1) $\begin{cases} y - x = 1 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 58 \\ x^2 - y^2 = 40 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x - y = 15 \\ xy = 100 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 21 \\ x + y = 1 \end{cases}$

4. SISTEMAS EXPONENCIALES

Son sistemas en los que al menos una de sus ecuaciones lo es.

Para **resolver** dichos sistemas utilizaremos las técnicas vistas en el apartado anterior, y los transformaremos en sistemas lineales, que resolveremos por el método que consideremos más adecuado.

Ejercicio:

29. *Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones exponenciales:*

a) $\begin{cases} 3^x + 3^y = 90 \\ 3^{x+y} = 729 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 7^{x+y} = 49^3 \\ 7^{x-y} = 49 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2^x + 2^y = 24 \\ 2^{x+y} = 128 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2^{x+y} = 2^2 2^{x-y} \\ 3^{xy} = 3^{12} \end{cases}$ e) $\begin{cases} 2^y - 2^x = 2 \\ x - y = -6 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2^{x+2y} = 32 \\ 2^{3x-5y} = 8 \end{cases}$

5. SISTEMAS LOGARÍTMICOS

Un **sistema** de ecuaciones es **logarítmico** si, por lo menos, una de las ecuaciones que lo forman lo es.

Para **resolver** un sistema de ecuaciones logarítmicas se aplicarán los procedimientos vistos en el apartado anterior, para transformarlo en un sistema lineal o no lineal, que resolveremos por el método que consideremos más adecuado.

Como en el caso de las ecuaciones logarítmicas, **hay que comprobar** que los pares de valores obtenidos son solución del sistema.

Ejercicio:

30. *Resuelve los siguientes sistemas logarítmicos:*

a) $\begin{cases} x - y = 9 \\ \log_{10} x - \log_{10} y = 1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x + y = 65 \\ \log_{10} x + \log_{10} y = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - 9y = 1100 \\ \log_{10} x - \log_{10} y = 1 \end{cases}$ g) $\begin{cases} 3x + 5y = 35 \\ \log_{10} x + \log_{10} y = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y = 22 \\ \log_{10} x = 1 + \log_{10} y \end{cases}$ h) $\begin{cases} x - y = 3 \\ \log_{10} x + \log_{10} y = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x - 14y = 4 \\ \log_{10} 2x - \log_{10} 3y = 3 \end{cases}$ i) $\begin{cases} x - y = 30 \\ \log_{10} x + \log_{10} y = 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + y = 110 \\ \log_{10} x + \log_{10} y = 3 \end{cases}$ j) $\begin{cases} \log_{10} \dfrac{x}{y} = 1 \\ \log_{10} x + \log_{10} y = 3 \end{cases}$

6. SISTEMAS DE INECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

Varias inecuaciones forman un sistema cuando se buscan las soluciones comunes a todas ellas.
Como el **conjunto de soluciones** de una inecuación de primer grado con dos incógnitas es un semiplano, el conjunto de soluciones de un sistema de inecuaciones de este tipo es la intersección de varios semiplanos, es decir, un recinto poligonal o bien un recinto abierto.

Es posible que los semiplanos no tengan ningún punto en común. En tal caso el sistema no tiene solución y se dice que es incompatible.

Ejercicio:

31. *Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones con dos incógnitas:*

a) $\begin{cases} x+y\le 5 \\ -2x+3y\ge 6 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x-y\le 4 \\ -x+3y\ge -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x-y>6 \\ 3x+5y<10 \end{cases}$ d) $\begin{cases} y\le 2-x \\ y\le x+2 \end{cases}$

7. SISTEMAS DE INECUACIONES LINEALES Y NO LINEALES CON UNA INCÓGNITA

Para resolver este tipo de sistemas de inecuaciones lo haremos analíticamente: Resolviendo cada una de las inecuaciones que forman el sistema, y estudiando la intersección, caso de existir.

Ejercicio:

32. *Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones con una incógnita:*

a) $\begin{cases} x-5>1 \\ 3x+1\le 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2-3x-4\ge 0 \\ 2x-7>5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x-5\ge 6 \\ 3x+1>15 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x-4>1 \\ x^2-4\le 0 \end{cases}$