UNIDAD 2:
NÚMEROS COMPLEJOS

El camino más corto entre dos verdades del
Análisis Real pasa por el Análisis Complejo.
Jacques Hadamard

1. CONSTRUCCIÓN[1]

A los pares de números reales $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ los llamaremos números complejos, cuando en $\mathbb{R}^2$ estemos considerando las siguientes operaciones:

- suma: $(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y')$
- producto: $(x,y)(x',y')=(xx'-yy',xy'+yx')$

(proceso de construcción de Hamilton).

Suele decirse que el número complejo $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ está escrito en forma cartesiana.

Los números reales x e y, como partes del número complejo $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, reciben los siguientes nombres:

$x=$parte real
$y=$ parte imaginaria

El conjunto de los números complejos se representa por $\mathbb{C}$:

$$\mathbb{C}=\left\{(x,y)\in\left(\mathbb{R}^2,+,\cdot\right)\right\}$$

y tiene estructura de cuerpo conmutativo (igual que el conjunto de los números reales).

Propiedad: Todo número real es un número complejo (de parte imaginaria cero), es decir, $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$
Por tanto, haremos la siguiente identificación: $(x,0)=x$ (es decir, los números reales son los complejos de parte imaginaria cero).

Existe un número complejo especialmente importante que representaremos por i, que se denomina unidad imaginaria:

$$i=(0,1)$$

y que verifica: $i^2=(-1,0)=-1$.

Como consecuencia de lo anterior, todo número complejo se puede escribir en la forma

$$(x,y)=(x,0)+(0,1)(y,0)=x+iy$$

y que se denomina forma binómica del número complejo (x,y).

---

[1] Generalmente se comienza definiendo $i=\sqrt{-1}$, y después los números complejos. Esto tiene un "pequeño" problema conocido como *paradoja de Bernouilli*:

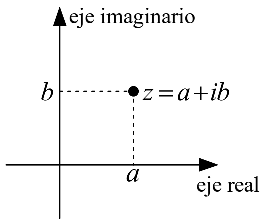
$$-1=i^2=i\cdot i=\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}=\sqrt{(-1)\cdot(-1)}=\sqrt{1}=1$$

¿Dónde está el error?

<u>Igualdad</u>: $\left.\begin{array}{l} z_1 = x_1 + iy_1 \\ z_2 = x_2 + iy_2 \end{array}\right\} z_1 = z_2 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{array}\right.$

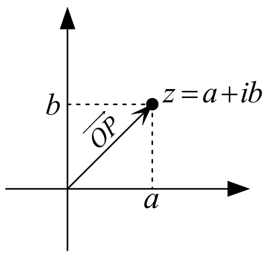
<u>Representación cartesiana o gráfica[2] (diagrama de Argand-Gauss[3])</u>:
A cada número complejo $z = a + ib$ le asociamos un (único) punto del plano cartesiano, que se denomina afijo de z.

$$z = a + ib \leftrightarrow P(a,b)$$



<u>Representación vectorial</u>:
Uniendo el origen *O* con el punto *P*, afijo del número complejo $z = a + ib$, obtenemos el vector $\overrightarrow{OP}$ asociado al número complejo z.

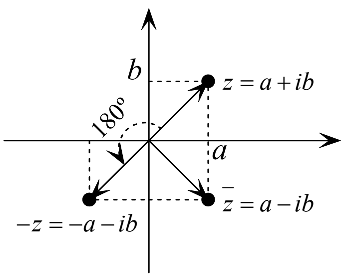
$$z = a + ib \leftrightarrow \overrightarrow{OP}$$



<u>Conjugado</u>: $z = x + iy \Rightarrow \overline{z} = x - iy$

<u>Opuesto</u>: $z = x + iy \Rightarrow -z = -(x + iy) = -x - iy$

<u>Interpretaciones geométricas</u>
z y $\overline{z}$ son simétricos respecto del eje real
z y $-z$ están relacionados por un giro de 180º



---

[2] "La visualización de los números reales mediante los puntos de una recta o de los números complejos mediante los puntos del plano no solamente penetró sin gran resistencia en el Análisis, sino que se puede decir con razón que, en el caso de los números complejos, esta visualización (Argand, Gauss) fue lo que hizo posible vencer la fuerte oposición de la comunidad matemática al dar carta de ciudadanía a los números complejos".

El rincón de la pizarra: ensayos de visualización en análisis matemático.
Miguel de Guzmán

[3] Parece ser que, en realidad, fue Hamilton el primero que representó los números complejos como puntos del plano.

2. OPERACIONES EN FORMA BINÓMICA

Suma: $\left.\begin{array}{l} z_1 = x_1 + iy_1 \\ z_2 = x_2 + iy_2 \end{array}\right\} \Rightarrow z_1 + z_2 = \left(x_1 + x_2\right) + i\left(y_1 + y_2\right)$

Propiedades de la suma:

(1) Asociativa: $\left(z_1 + z_2\right) + z_3 = z_1 + \left(z_2 + z_3\right)$

(2) Conmutativa: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

(3) Existencia de elemento neutro ($0 = 0 + i \cdot 0$): $z + 0 = 0 + z = z$

(4) Existencia de elemento opuesto ($z = x + iy \Rightarrow -z = -x - iy$): $z + \left(-z\right) = 0$

Resta: $\left.\begin{array}{l} z_1 = x_1 + iy_1 \\ z_2 = x_2 + iy_2 \end{array}\right\} \Rightarrow z_1 - z_2 = \left(x_1 - .x_2\right) + i\left(y_1 - y_2\right)$

Multiplicación: $\left.\begin{array}{l} z_1 = x_1 + iy_1 \\ z_2 = x_2 + iy_2 \end{array}\right\} \Rightarrow z_1 \cdot z_2 = \left(x_1 x_2 - y_1 y_2\right) + i\left(x_1 y_2 + y_1 x_2\right)$

Propiedades de la multiplicación:

(5) Asociativa: $\left(z_1 \cdot z_2\right) \cdot z_3 = z_1 \cdot \left(z_2 \cdot z_3\right)$

(6) Conmutativa: $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$

(7) Existencia de elemento neutro: $1 = 1 + i \cdot 0 \Rightarrow z \cdot 1 = z$

(8) Existencia de elemento inverso:

$$z = x + iy \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2}$$

(9) Distributiva de la multiplicación respecto de la suma:

$$z_1 \cdot \left(z_2 + z_3\right) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$$

Por cumplir las nueve propiedades anteriores se dice que $\mathbb{C}$ es un cuerpo conmutativo:

$$\boxed{\left(\mathbb{C}, +, \cdot\right) = \text{ cuerpo conmutativo de los números complejos}}$$

División: $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$

$$\frac{z_1}{z_2} \underset{[1]}{=} \frac{\left(x_1 + iy_1\right)\left(x_2 - iy_2\right)}{\left(x_2 + iy_2\right)\left(x_2 - iy_2\right)} = \frac{\left(x_1 + iy_1\right)\left(x_2 - iy_2\right)}{x_2^{\,2} - \left(iy_2\right)^2} = \frac{\left(x_1 + iy_1\right)\left(x_2 - iy_2\right)}{x_2^{\,2} + y_2^{\,2}}$$

donde en [1] hemos multiplicado y dividido por el conjugado del denominador.

Potenciación:

Igual que siempre.

$$\begin{cases} z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}_{n-\text{veces}} & \text{con } n \in \mathbb{N} \\ z^0 = 1 \ \text{ siempre que } z \neq 0 \\ z^{-n} = \dfrac{1}{z^n} \ \text{ siempre que } z \neq 0 \end{cases}$$

Se usa la fórmula del binomio de Newton:

$$(x+iy)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^{m-k} (iy)^k$$

donde $\binom{m}{k} := \dfrac{m!}{k!(m-k)!}$, $m! = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ y $0! := 1$.

Potencias de i:

Se tiene que:

$$\begin{array}{llll} i^0 = 1 & i^4 = 1 & i^8 = 1 & \\ i^1 = i & i^5 = i & i^9 = i & \\ i^2 = -1 & i^6 = -1 & i^{10} = -1 & \cdots \\ i^3 = -i & i^7 = -i & i^{11} = -i & \end{array}$$

esto es, las potencias de i se repiten cada cuatro. Así, calcular i^k con $k \in \mathbb{N}$ equivale a calcular i^R, donde R es el resto de dividir k entre 4:

$$i^k = i^R$$

con $\begin{array}{l|l} k & 4 \\ \hline R & \end{array}$ (matemáticamente esto se escribe $k \equiv R \bmod (4)$ y se lee "k es congruente con R módulo 4").

Ejercicios:

1. *Dados los siguientes números complejos:*

$$z_1 = 4-5i \quad z_2 = 2+3i \quad z_3 = -3+5i \quad z_4 = 6+2i$$
$$z_5 = (7,8) \quad z_6 = (-4,-9) \quad z_7 = (-12,2) \quad z_8 = (4,5)$$

efectúa las siguientes operaciones algebraicas:

1) $z_1 + z_2$
2) $z_4 - z_3$
3) $z_8 + z_7$
4) $z_1 \cdot z_3$
5) $z_1 \div z_2$
6) $z_3 \div z_4$
7) $\dfrac{z_1}{z_2 \cdot z_1}$
8) $\dfrac{z_2 \cdot z_3}{z_4}$

2. *Calcula las partes reales e imaginarias de:*

a) $\dfrac{3-2i}{2+i}$

h) $\dfrac{1}{(1-i)^5}$

m) $\dfrac{4+i}{1-3i}$

b) $\dfrac{3-2i}{2-3i}$ i) $\dfrac{5-5i}{3+4i}$ n) $\dfrac{1+3i}{2+i}$

c) $(1-i)(1+i)i$ j) $(5-i)(1+5i)$ ñ) $\dfrac{(2-i)(1-2i)^2}{3+i}$

d) $(1+i)^4$ k) $(2+5i)^3$ o) $(3-2i)^3$

e) $\dfrac{(1-i)^5}{(1+i)^5}$ l) $\dfrac{1}{(1-i)^6}$ p) $\dfrac{(1+i)(1-i)^4}{(1+2i)^3}$

f) $(1-i)(2+3i)(3+i)(2-2i)$ q) i^{3459}

g) $\dfrac{1}{2+i\sqrt{3}}-\dfrac{2}{1+i\sqrt{3}}+\dfrac{5/2-i\sqrt{3}}{2+i\sqrt{3}}$

3. *Sean z y w dos números complejos cualesquiera. Comprueba la igualdad* $\overline{z}\cdot\overline{w}=\overline{z\cdot w}$.

4. *Dados los números complejos* $z_1=2i$, $z_2=-i$ *y* $z_3=4i$, *calcula:*

a) $z_3\cdot z_2$ b) $\dfrac{z_1}{(z_2)^2}$ c) $\dfrac{z_1\cdot z_2^3}{z_3}$

d) $z_1\cdot z_2$ e) $\dfrac{(z_1)^3}{z_2\cdot(z_3)^2}$ f) $z_3\dfrac{z_1}{z_2}$

5. Sea $z=\dfrac{k+i}{2+i}$. Calcula el valor de k para que $z=2-i$.

6. Sea $z=(3-6i)(4-ki)$. Calcula el valor de *k* para que *z* sea un número imaginario puro.

7. Sea $z=(3-6i)(4-ki)$. Calcula el valor de *k* para que *z* sea un número real.

8. *Calcula m y n para que se cumpla la igualdad:* $\dfrac{4m-2i}{3+ni}=6-2i$.

9. *La suma de dos números complejos es* $3+i$ *y la parte real de uno de ellos es 2. Determina dichos números sabiendo que su cociente es imaginario puro.*

Se define el <u>módulo de un número complejo</u> $z=x+iy$ por:

$$|z|=+\sqrt{x^2+y^2}$$

<u>Ejercicios:</u>

10. *Sea* $z=\dfrac{k+i}{2+i}$. *Calcula el valor de* k *para que* $|z|=\sqrt{2}$.

11. *La suma de las partes reales de dos complejos conjugados es 6 y el módulo de uno de ellos es 5. Calcula ambos números.*

3. EXPRESIONES DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

Forma cartesiana:

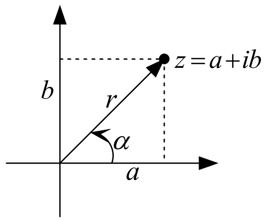
$$z=(a,b)$$

Forma binómica:

$$z=a+ib$$

Forma polar:

$$\left.\begin{array}{l} r=\left|\overrightarrow{OP}\right| \\ \alpha=\angle\left\{\overrightarrow{OX^{+}},\overrightarrow{OP}\right\} \end{array}\right\} \Rightarrow z=r_{\alpha}$$



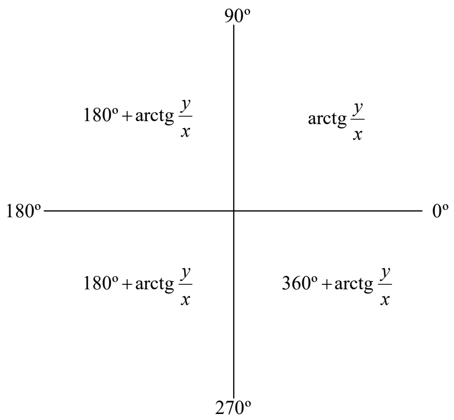
Forma trigonométrica:

$$z=r(\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha)$$

Paso de una a otra forma:

- De binómica a polar

$$z=x+iy \Rightarrow z=r_{\alpha} \text{ donde } \begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2} \\ \alpha=\beta+\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} \text{ (ver gráfico adjunto para el valor de } \beta) \end{cases}$$



- De polar a binómica

$$z=r_{\alpha} \Rightarrow z=x+iy \text{ con } \begin{cases} x=r\cos\alpha \\ y=r\operatorname{sen}\alpha \end{cases}$$

Igualdad en forma polar:

$$r_{\alpha}=s_{\beta} \Leftrightarrow \begin{cases} r=s \\ \beta=\alpha+2k\pi \text{ con } k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

Ejercicios:

12. *Expresa en forma polar:*

a) $4-3i$ b) $5+12i$

c) $-3+3i$ d) $-2-4i$

13. *Escribe en forma polar el resultado del cociente:* $\dfrac{i^5 - i^{-8}}{i\sqrt{2}}$

14. *Expresa en forma trigonométrica los complejos:*

a) $-3+3\sqrt{3}i$ b) $1-i$

c) $6-5i$ d) $-9-8i$

15. *Expresa en forma binómica los siguientes complejos:*

a) 7_{120° b) $2_{\pi/6}$ c) $3_{3\pi/4}$ d) 5_{135°

16. *Determina las formas polar y trigonométrica de los números:*

a) $-2\sqrt{3}-2i$ b) $3-3\sqrt{3}i$

c) $-4+4i$ d) $7+7i$

17. *Hallar los números complejos tales que* $\overline{z} = z^{-1}$.

4. OPERACIONES EN FORMA POLAR

Multiplicación: $\left.\begin{array}{l} z = r_\alpha \\ w = s_\beta \end{array}\right\} \Rightarrow z \cdot w = (r \cdot s)_{\alpha+\beta}$

División: $\left.\begin{array}{l} z = r_\alpha \\ w = s_\beta \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{z}{w} = \left(\dfrac{r}{s}\right)_{\alpha-\beta}$

Potenciación: $z = r_\alpha \Rightarrow z^n = (r_\alpha)^n = {r_{n\cdot\alpha}}^n \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

Fórmula de De Moivre: $(r_\alpha)^n = r^n\left[\cos(n\alpha) + i\,\mathrm{sen}(n\alpha)\right] \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

Radicación: Se llama raíz n – ésima, $n \geq 2$, del número complejo z, y la representamos por $\sqrt[n]{z}$, a cualquier número complejo w tal que $w^n = z$:

$$\sqrt[n]{z} = w \Leftrightarrow w^n = z$$

En forma polar tenemos:

$$\sqrt[n]{r_\alpha} = \left(\sqrt[n]{r}\right)_\beta \text{ donde } \beta = \frac{\alpha + 2k\pi}{n}, \quad k = 0,1,\dots n-1$$

Interpretación geométrica de las raíces n – ésimas

Todos los números complejos tienen exactamente *n* raíces distintas, cuyos afijos forman un *n* – ágono regular.

Una propiedad[4] sobre los radicales complejos:

$$\sqrt[n]{r_\alpha} \cdot \sqrt[n]{s_\beta} = \sqrt[n]{r_\alpha \cdot s_\beta} \Leftrightarrow 0 \leq \alpha + \beta < 360^\circ$$

[4] Con la que ya puedes ver dónde está el error del principio de la unidad (*Paradoja de Bernouilli*).

Raíces cuadradas de – 1:

$$\sqrt{-1} = \sqrt{1_{180^\circ}} = \begin{cases} 1_{\frac{180^\circ+0\cdot 360^\circ}{2}} = 1_{90^\circ} = i \\ 1_{\frac{180^\circ+1\cdot 360^\circ}{2}} = 1_{270^\circ} = -i \end{cases}$$

Como consecuencia, ya podemos trabajar de forma rigurosa con expresiones de la forma $\sqrt{-x}$ con $x \in \mathbb{R}$:

$$\sqrt{-x} = \sqrt{x\cdot(-1)} = \sqrt{x}\cdot\sqrt{-1} = \sqrt{x}\cdot i$$

Ejercicios:

18. *Escribe en forma binómica y en forma de par el cociente de los números* 6_{120° *y* $3_{\pi/3}$.

19. *Realiza las operaciones en forma polar y después pasa a forma binómica:*

a) $3_{45^\circ}\cdot 2_{15^\circ}$ e) $1_{33^\circ}\cdot 2_{16^\circ}\cdot 3_{41^\circ}$ i) $5_{23^\circ}\cdot 3_{97^\circ}$

b) $9_{37^\circ}:3_{97^\circ}$ f) $(2_{51^\circ})^4:(4_{72^\circ})^2$ j) $2_{106^\circ}:1_{61^\circ}$

c) $6_{-21^\circ}:2_{24^\circ}$ g) $(2_{25^\circ})^3\cdot 3_{15^\circ}$ k) $(1_{45^\circ})^{18}:(2_{90^\circ})^3$

d) $\left(\sqrt{2}-i\right)^6$ h) $\left(3-3i\right)^8$ l) $\left(-2+2i\right)^{10}$

20. *Calcula el resultado de las siguientes operaciones, y escríbelos en todas las formas que conoces:*

a) $\dfrac{(1+i)(1-i)^5}{2-2\sqrt{3}\,i}$ b) $\dfrac{2}{1-\sqrt{3}\,i}+\dfrac{2}{1+\sqrt{3}\,i}+\dfrac{2}{1+i}$

21. *Halla las siguientes raíces:*

a) $\sqrt[3]{1+i}$ c) $\sqrt[3]{-i}$

b) $\sqrt[6]{-64}$ d) $\sqrt[3]{-27}$

22. *Calcula las raíces cuartas de* -1 *y de i.*

23. *Calcula y representa*: $\sqrt[3]{\dfrac{1+i}{1-i}}$

24. *Una raíz cuarta de un número complejo es* $-1+i$. *Calcula dicho número y sus restantes raíces cuartas.*

25. *Calcula las raíces cúbicas de:*

a) $\dfrac{(1+i)\cdot(1-i)^4}{(1+2i)^3}$ b) $\dfrac{i^5-i^{-8}}{\sqrt{2}i}$ c) $\dfrac{-2+2i}{1+\sqrt{3}i}$ d) $\dfrac{1+i}{2-i}$

e) $\dfrac{i^{-3}-i^4}{\sqrt{2}i}$ f) $\dfrac{\sqrt{3}+i}{-1+i}$ g) $\dfrac{1-i}{\sqrt{3}-i}$

26. *Calcula las raíces cuartas de* $2-i$ *y represéntalas gráficamente.*

27. *Calcula las raíces quintas de* $\dfrac{1+2i}{2-i}$.

28. *Una raíz cúbica de un número complejo es* $1+i$. *Halla dicho número complejo y sus otras dos raíces cúbicas.*

29. *Calcula:*

a) $\sqrt[5]{\dfrac{32}{-i}}$ d) $\left(\dfrac{i^5-i^{-8}}{\sqrt{2}i}\right)^5$ g) $\left(\dfrac{1+i}{2-i}\right)^5$

b) $\sqrt[3]{2-2i}$ e) $\sqrt[4]{-8+8\sqrt{3}i}$ h) $\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{3}+i}\right)^4$

c) $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{-1+i}\right)^4$ f) $\sqrt[3]{(1-\sqrt{3}i)\cdot(-\sqrt{3}-i)}$

30. *Escribe en todas las formas que conoces las soluciones de las ecuaciones:*

a) $x^2+ix+2=0$ d) $x^3+2ix^2+2x=0$

b) $x^2+2=0$ e) $\dfrac{z-3}{2z-i}=1-i$

c) $\dfrac{z}{2i}+\dfrac{z+1}{4-2i}=3$ f) $z^2+3z+7=0$

5. OPERACIONES EN FORMA TRIGONOMÉTRICA

Multiplicación:

$$\left.\begin{array}{l} z=r(\cos\alpha+i\,\text{sen}\,\alpha) \\ w=s(\cos\beta+i\,\text{sen}\,\beta) \end{array}\right\} \Rightarrow z\cdot w=(r\cdot s)\left[\cos(\alpha+\beta)+i\,\text{sen}(\alpha+\beta)\right]$$

División:

$$\left.\begin{array}{l} z=r(\cos\alpha+i\,\text{sen}\,\alpha) \\ w=s(\cos\beta+i\,\text{sen}\,\beta)\neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{z}{w}=\frac{r}{s}\left[\cos(\alpha-\beta)+i\,\text{sen}(\alpha-\beta)\right]$$

Potenciación:

Fórmula de De Moivre: $\left[r(\cos\alpha+i\,\text{sen}\,\alpha)\right]^n=r^n\left[\cos(n\alpha)+i\,\text{sen}(n\alpha)\right]$

6. NO HAY ORDEN EN $\mathbb{C}$ COMPATIBLE CON SU ESTRUCTURA ALGEBRAICA

Al ampliar $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$ ganamos mucho pero también perdemos algo. En $\mathbb{R}$ tenemos dos estructuras: la algebraica (las nueve propiedades que le dotan de estructura algebraica de cuerpo conmutativo y la de orden, que hacen que ese cuerpo esté totalmente ordenado). Ambas estructuras están armoniosamente relacionadas. Pues bien, en $\mathbb{C}$ no hay nada parecido. **Podemos definir relaciones de orden en $\mathbb{C}$, pero no hay ninguna de ellas que sea compatible con la estructura algebraica**.

En efecto, si suponemos que $\leq$ es una relación de orden en $\mathbb{C}$ compatible con su estructura algebraica, como $i \neq 0$ habría de ser $0 < i^2 = -1$ (esto todavía no es contradictorio porque pudiera ocurrir que la relación $\leq$ no respetara el orden de $\mathbb{R}$). Pero también $0 < 1^2 = 1$, luego $0 < 1 + (-1) = 0$ y eso sí que es contradictorio. Por tanto, es imposible definir un concepto de número complejo positivo de forma que la suma y el producto de complejos positivos sea positivo. Por ello no se define en $\mathbb{C}$ ningún orden. Así que ya sabes: ¡mucho cuidado con no escribir desigualdades entre números complejos! Naturalmente, puedes escribir desigualdades entre las partes reales o imaginarias de números complejos, porque tanto la parte real como la parte imaginaria de un número complejo son números reales.

Francisco Javier Pérez González
Curso de Análisis Complejo
Universidad de Granada

7. TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA

Propiedad de conjugación: Sea $p(x)$ un polinomio con coeficientes reales. Si $z \in \mathbb{C}$ es una raíz de $p(x)$, entonces $\overline{z} \in \mathbb{C}$ también es raíz.

Teorema Fundamental del Álgebra: Todo polinomio de grado $n \in \mathbb{N}$, con coeficientes reales o complejos, tiene n raíces.

***Feynman** y el Teorema Fundamental del Álgebra*

> Reflexionando sobre lo que hemos hecho hasta ahora, parece que nuestros logros son más bien modestos. Hemos añadido a $\mathbb{R}$ básicamente un número, i, que nos genera "linealmente" $\mathbb{C}$, y que es una raíz del polinomio concreto $x^2 + 1$. ¿Qué sucederá con los demás polinomios? Esto lo expone estupendamente el premio Nobel de Física, **Richard Feynman**, en un capítulo llamado *Álgebra* de su libro [**Feynman, R. & al.:** *Física. Volumen I: Mecánica, radiación y calor.* Addison-Wesley Iberoamericana, Wilmington, Delaware, 1987.], p. 22-10:
> *"*Ahora ustedes dirán: ¡Esto puede seguir indefinidamente! Hemos definido las potencias de los imaginarios y todo lo demás y cuando estamos listos, viene alguien con otra ecuación que no puede ser resuelta como $x^6 + 3x^2 = -2$. ¡Entonces tenemos que generalizar todo de nuevo!" Pero resulta que *con esta invención adicional* que es simplemente un número cuyo cuadrado vale -1, *¡toda ecuación algebraica puede ser resuelta!* Este es un hecho fantástico que debemos dejar que lo demuestre el Departamento de Matemáticas. Las demostraciones son hermosas y muy interesantes, pero ciertamente no son evidentes por sí mismas. De hecho, la suposición más evidente es que vamos a tener que inventar de nuevo, de nuevo y de nuevo. Pero el milagro más grande es que no tenemos que hacerlo. Esta es la última invención. Después de esta invención de los números complejos, encontramos que las reglas siguen funcionando con los números complejos y hemos terminado de inventar cosas nuevas. Podemos encontrar la potencia compleja de cualquier número complejo, podemos resolver cualquier ecuación escrita algebraicamente en términos de un número finito de esos símbolos. No encontramos más números nuevos".