Números trascendentes

Diremos que un **número** real o complejo es **trascendente**, cuando no es raíz de ningún polinomio con coeficientes enteros. Los **números** que no son trascendentes se denominan **algebraicos**.

Por ejemplo, $\sqrt{2}$ es raíz del polinomio $P(x)=x^2-2$, ya que $P\left(\sqrt{2}\right)=0$. Como consecuencia, el número $\sqrt{2}$ no es trascendente, y es algebraico.

<u>El número o constante de Liouville</u>

$$\xi=\frac{1}{10}+\frac{1}{10^{2!}}+\frac{1}{10^{3!}}+\ldots=0{,}11000100000000000000000001000\ldots$$

En 1844, el matemático francés Joseph Liouville, demostró que ξ es trascendente.

<u>El número e</u>

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots=2{,}71828182845904523536\ldots$$

El matemático francés Charles Hermite demostró que e es trascendente en 1873.

<u>El número π</u>

$$\pi=4\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\ldots\right)$$

El matemático alemán Ferdinand von Lindemann demostró que π es trascendente en 1882.

En 1874 G. Cantor demostró la existencia de los números trascendentes a partir del hecho de que el conjunto de todos los números algebraicos tiene la misma cardinalidad que la del conjunto de los números naturales, mientras que el conjunto de todos los números reales no es numerable. De lo anterior se ve que casi todo número real es trascendente.

Por otro lado, decidir si un número particular es o no trascendente es un problema más difícil.

En 1900, David Hilbert elaboró una lista de 23 problemas que él creía serían de importancia para la matemática del S. XX. El problema número siete dice así:
"La expresión α^{β} para una base $\alpha\neq 0,1$ algebraica y un exponente β irracional y trascendente, siempre es trascendente".
La solución de éste problema la dieron, de forma independiente A.O. Gelfond y T. Schneider, en 1934.

El matemático ruso A.O. Gelfand demostró previamente, en 1929, que e^{π} es trascendente, y en 1930, el también matemático ruso, R.O. Kusmin, demostró que $2^{\sqrt{2}}$ también lo es.