Junio 2010

1A. a) Enuncia el teorema de Bolzano. (0,5 puntos)

b) ¿Se puede aplicar dicho teorema a la función $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ en algún intervalo? (1 punto)

c) Demuestra que la función ***f(x)*** anterior y ***g(x) = 2x — 1*** se cortan al menos en un punto. (1 punto)

2A. a) Representa gráficamente las parábolas $f(x)=x^2-3x-1$ y $g(x)=-x^2+x+5$. (0,5 puntos)

b) Calcula el área del recinto limitado por ambas gráficas. (2 puntos)

1B. La velocidad de una partícula, medida en m/sg, está determinada en función del tiempo $t \geq 0$, medido en segundos, por la expresión $v(t)=(t^2+2t)e^{-t}$. Se pide:

a) ¿En qué instante de tiempo del intervalo $[0,3]$ se alcanza la velocidad máxima? (1,25 puntos)

b) Calcula $\lim\limits_{t\to\infty} v(t)$, e interpreta el resultado obtenido. (1,25 puntos)

2B. Calcula la integral indefinida: $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1+sen^2 x}\,dx$.

(Nota: Puedes probar el cambio de variable $y = sen\,x$) (2,5 puntos)

Septiembre 2010

1A. a) Definición de derivada de una función en un punto. (0,5 puntos)

b) Dada la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{ax+sen\,x}{2x-x^2} & \text{si } x<0 \\ bx+c & \text{si } 0\leq x<1 \\ \dfrac{1}{1+x} & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$, determina los parámetros $a, b, c \in \mathbb{R}$ para que $f(x)$ sea una función continua en $x=0$, y además sea continua y derivable en $x=1$. (2 puntos)

2A. a) Determina el dominio de la función $f(x)=\sqrt{2x+1}$. (1 punto)

b) Calcula la integral definida: $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{0} f(x)\,dx$. (1,5 puntos)

1B. Dada la función definida por $f(x) = \begin{vmatrix} 3x & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ -1 & 0 & x-6 \end{vmatrix}$, se pide:

a) Halla su expresión polinómica simplificada calculando el determinante. (0,5 puntos)

b) Calcula las coordenadas de su punto de inflexión y los intervalos en donde sea cóncava hacia arriba ($\cup$) y cóncava hacia abajo ($\cap$). (2 puntos)

2B. a) Enuncia la fórmula de integración por partes. (0,5 puntos)

b) Calcula la integral indefinida: $\int x\, Ln\, x\, dx$.

Nota: $Ln\, x$ representa el logaritmo neperiano de x. (2 puntos)

Reserva 1 2010

1A. Dada la función $f(x) = 3x^3 - 36x + 2$, se pide:

a) Determina las coordenadas de sus máximos y mínimos relativos. (1 punto)

b) Enuncia el teorema del valor medio de Lagrange. Analiza si es posible aplicarlo a la función $f(x)$ en el intervalo $[-2, 2]$ y, en caso afirmativo, calcula en qué puntos se verifica la tesis del teorema en dicho intervalo. (1,5 puntos)

2A. a) Dado un número real $a > 0$, calcula el área del recinto encerrado entre la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, el eje de abscisas y las rectas $x = a$ y $x = a + 1$. (1,5 puntos)

b) Explica razonadamente que cuando a tiende a ∞, dicho área tiende a cero. (1 punto)

1B. El espacio recorrido por una partícula, medido en metros, está determinado en función del tiempo $t \geq 0$, medido en segundos, por la expresión $e(t) = A\,t^2 + B\,Ln(t+1) + C$. Se pide:

a) Determina los coeficientes $A, B, C \in \mathbb{R}$ sabiendo que en el instante $t = 0$ la partícula ha recorrido $6\,m$, la velocidad inicial para $t = 0$ es de $8\,m/sg$ y que la aceleración cuando $t = 1$ segundo es de $2\,m/sg^2$. (1,5 puntos)

b) Para los valores obtenidos de A, B y C, calcula $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{e(t)}{t^2}$. (1 punto)

(Nota: $Ln(t+1)$ representa el logaritmo neperiano de $t+1$. Recuerda además que la velocidad es la derivada primera del espacio respecto del tiempo y la aceleración la derivada segunda.)

2B. Calcula la integral indefinida: $\displaystyle\int \frac{1}{x^3 + x^2}\, dx$. (2,5 puntos)

Reserva 2 2010

1A. Dada la función $f(x) = arctg\left(\sqrt{x-1}\right)$ definida para $x \geq 1$, se pide:

a) Calcula y simplifica $f'(x)$. (1,5 puntos)

b) Explica razonadamente por qué en ningún punto de la gráfica de la función $f(x)$ la recta tangente es horizontal. (1 punto)

2A. Calcula $a \in \mathbb{R}$, siendo $a > 0$, para que el área de la región limitada por la gráfica de la función $f(x) = 6x^2$, el eje de abscisas y la recta $x = a$ sea igual a $2000\, u^2$. (2,5 puntos)

1B. Determina los valores de los parámetros $a, b, c \in \mathbb{R}$ de forma que la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ cumpla que pasa por el punto de coordenadas $(3, 10)$ y tiene un extremo relativo en el punto de coordenadas $(1, -2)$. (2,5 puntos)

2B. Calcula la integral indefinida: $\displaystyle\int \frac{x+2}{\sqrt{x+1}}\, dx$.

(Nota: Puedes probar el cambio de variable $y = x + 1$) (2,5 puntos)

Junio 2009

A. Encuentra el punto de la recta $x+y = 4$, que cumpla que la suma de los cuadrados de sus coordenadas sea mínima.

B. Enuncia el Teorema de Bolzano. Como aplicación de este teorema, demuestra que las gráficas de las funciones $f(x) = e^{x^2}$ y $g(x) = 2\cos(x^2)$ se cortan en, al menos, un punto.

A. Encuentra una primitiva de la función $f(x) = \dfrac{x+36}{4+9x^2}$

B. Calcula la integral definida $\displaystyle\int_1^4 \frac{\sqrt{x} + e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$ (puede ayudarte hacer un cambio de variable).

Septiembre 2009

A. Un depósito cilíndrico construido sin la tapa superior tiene una capacidad de $27\pi\, m^3$. Determina cuánto miden el radio de su base y su altura sabiendo que se ha construido de forma que su superficie sea mínima.

B. Se sabe que la recta $y = 9$ es una asíntota horizontal de la función $f(x) = \dfrac{x^2}{ax^2 - 4}$. Calcula el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$. Estudia si para dicho valor del parámetro tiene asíntotas verticales u oblicuas.

A. Calcula las integrales $a)$ $\int \tan(x)\, dx$, $b)$ $\int \left(1 + \tan^2(x)\right)\, dx$, $c)$ $\int \arctan(x)\, dx$

B. a) Estudia la continuidad y derivabilidad de la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 3 & \text{si } x < -1 \\ 1 - x^2 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$

b) Determina el área encerrada por la gráfica de la función $f(x)$ y el eje de abscisas.

Reserva 1 2009

A. Según el artículo "The design of honeycombs" de A. L. Peressini, el área de la superficie de una celda de un panal de abejas está determinada por la función

$$A(\theta) = p + q\frac{\sqrt{3} - \cos\theta}{sen\,\theta}$$

donde p y q son dos constantes reales positivas, y $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ un cierto ángulo. Calcula con qué ángulo θ construyen las abejas las celdas de un panal sabiendo que minimizan dicha área.

B. Se sabe que la recta recta $x = -3$ es una asíntota vertical de la función $f(x) = \dfrac{x^2}{x - a}$. Calcula el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$. Estudia si para dicho valor del parámetro la función $f(x)$ tiene asíntotas horizontales u oblicuas.

A. Según el artículo "The design of honeycombs" de A. L. Peressini, el área de la superficie de una celda de un panal de abejas está determinada por la función

$$A(\theta) = p + q\frac{\sqrt{3} - \cos\theta}{sen\,\theta}$$

donde p y q son dos constantes reales positivas, y $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ un cierto ángulo. Calcula con qué ángulo θ construyen las abejas las celdas de un panal sabiendo que minimizan dicha área.

B. Se sabe que la recta recta $x = -3$ es una asíntota vertical de la función $f(x) = \dfrac{x^2}{x - a}$. Calcula el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$. Estudia si para dicho valor del parámetro la función $f(x)$ tiene asíntotas horizontales u oblicuas.

Reserva 2 2009

A. Encuentra el punto de la gráfica de la función $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ en el que la pendiente de la recta tangente sea mínima.

B. Dada la función $f(x) = \dfrac{1}{\ln(x)}$, donde $\ln(x)$ es el logaritmo neperiano de x,

a) Determina su dominio y sus asíntotas.
b) Razona que la función es decreciente en su dominio.

A. Calcula la integral indefinida $\displaystyle\int \frac{2x^3 - 9x^2 + 9x + 6}{x^2 - 5x + 6}\,dx$

B. Halla una primitiva $F(x)$ de la función $f(x) = 8x^3 + 2x$, que cumpla que $F(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, y de forma que el área comprendida entre la gráfica de $F(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 1$ sea $\dfrac{41}{15}$.

Junio 2008

A. Calcula los siguientes límites:

$$a)\ \lim_{x\to 0} \frac{x^3 - 8x^2 + 7x}{x^2 - x} \qquad b)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{2x}{\pi} + \cos(x)\right)^{\frac{1}{\cos(x)}}$$

B. Definición de punto de inflexión de una función. Calcula el valor de los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$ para que la función $f(x) = (x^2 - a)e^x + bx$ tenga un punto de inflexión en $x = 0$ y un mínimo relativo en $x = 1$.

A. Calcula la integral $\int \frac{2x^3-9x^2+9x+6}{x^2-5x+6}\,dx$

B. Calcula la integral definida $\int_0^{\pi} e^x \text{sen}(x)\,dx$

Septiembre 2008

A. Dadas las funciones $f(x)=\ln(1-x^2)$ y $g(x)=\ln(1+x^2)$, se pide:

a) Determina el dominio de cada una de ellas.

b) Estudia si dichas funciones tienen puntos de inflexión.

B. Determina los valores de los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$ para que la función $f(x)=(ax^2+bx)e^{-x}$ tenga un extremo relativo en el punto de abscisa $x=3$ y además pase por el punto $(1,-1/e)$. Halla la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto de abscisa $x=0$.

A. De la función $f(x)=(x+a)\text{sen}(x)$, donde a es un número real, se sabe que la integral definida $\int_0^{\pi} f(x)dx$ es tres veces el valor de la pendiente de la recta tangente a $f(x)$ en $x=0$. Calcula el valor de a.

B. Definición de primitiva de una función. Sabiendo que $F(x)=e^{x^2}$ es una primitiva de la función $f(x)$:

a) Comprueba que $f(x)$ es una función creciente en $\mathbb{R}$.

b) Calcula el área determinada por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas, y las rectas $x=-1$ y $x=1$.

Reserva 1 2008

A. Enuncia el Teorema del valor medio de Lagrange. Explica su interpretación geométrica. Determina los valores de los parámetros $k, p \in \mathbb{R}$ para que la función $f(x)=\begin{cases} \frac{k+x}{x-1} & \text{si} \quad x \leq 0 \\ e^x+p & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$ verifique las hipótesis de dicho teorema en el intervalo $[-1,3]$.

B. Determina los valores $a, b \in \mathbb{R}$ para que la función $f(x)=a\,\text{sen}(x)+b\cos(x)$ pase por el punto $(\pi/4,\sqrt{2})$ y además cumpla que la pendiente de la recta tangente en el punto de abscisa $x=\pi/2$ sea 5. Calcula la derivada de orden 2008 de dicha función.

A. Enuncia la Regla de Barrow. Calcula la integral definida $\int_0^1 (x^2+x)e^x dx$.

B. Calcula la integral $\int \frac{e^{2x}+e^x}{1+e^{2x}}dx$. Indicación: Puede ayudarte hacer un cambio de variable adecuado.

Reserva 2 2008

A. Determina el valor de $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, para que se cumpla que

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{kx}-kx-1}{kx^2} = \lim_{x\to 0} \frac{8\,\text{sen}(x)+2\tan(x)}{x+\text{sen}(x)}$$

B. Determina los valores de $a, b, c \in \mathbb{R}$ para que la función $f(x)=ax^3+bx+c$ pase por el punto $(2,8)$, tenga un mínimo relativo en $x=\sqrt{3}/3$ y además la recta tangente a $f(x)$ en el punto de abscisa $x=1$ tenga pendiente 4. Calcula la ecuación de la recta normal a $f(x)$ en el punto de abscisa $x=1$.

A. Calcula el área determinada por la gráfica de la función $f(x)=x^3-9x$ y el eje de abscisas.

B. Calcula las siguientes integrales: a) $\int \ln(x)\,dx$, b) $\int \tan(x)\,dx$.

Junio 2007

A. a) Define el concepto de función continua en un punto.

b) Si $f(x)=\dfrac{e^{3x}-e^{-3x}}{4x}$, indica de forma razonada en qué valor $x=a$ no está definida $f(x)$.

c) Calcula el valor de $b\in\mathbb{R}$ para que la función $g(x)=\begin{cases} f(x) & si \quad x\neq a \\ b & si \quad x=a \end{cases}$ sea continua.

B. Dada la función $f(x)=9x+6x^2-x^4$, se pide: a) Halla los puntos en los que la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ tiene pendiente 1. b) Calcula los puntos de inflexión de $f(x)$.

A. Calcula la siguiente integral: $\int \dfrac{2}{1+\sqrt{x}}\,dx$.

(Indicación: Puede ayudarte realizar un cambio de variable adecuado.)

B. Dadas las funciones $f(x)=\dfrac{1}{x}$ y $g(x)=-x+\dfrac{5}{2}$, se pide: a) Esboza sus gráficas y sombrea el recinto encerrado entre ellas. b) Calcula el área de dicho recinto.

Septiembre 2007

A. En agosto de 1548 el matemático Ludovico Ferrari le propuso a su colega Niccolo Fontana, apodado Tartaglia, el siguiente problema: "Halla dos números reales no negativos cuya suma sea 8 de manera que su producto multiplicado por su diferencia sea máximo." Obtén las soluciones de este problema con dos decimales de aproximación.

B. De la función $f(x)=\dfrac{ax^2+b}{a-x}$, con $a,b\in\mathbb{R}$, sabemos que pasa por el punto $(1,2)$, y que tiene una asíntota oblicua cuya pendiente es -6. a) Determina los valores a y b de la función. b) Determina, si existen, las asíntotas verticales de dicha función.

A. Calcula la siguiente integral: $\int \dfrac{x}{(x+1)^3}\,dx$.

B. Esboza las gráficas de las parábolas $f(x)=2x^2$ y $g(x)=-x^2+3$, sombreando el recinto cerrado que determinan. Calcula el área de dicho recinto.

Reserva 1 2007

A. Enuncia el Teorema de Bolzano. Aplícalo para probar que la ecuación $sen\,x=x^2-1$ tiene al menos una solución. (Indicación: El ángulo x lo consideraremos en radianes.)

B. De entre todos los triángulos rectángulos cuya hipotenusa mide 3 metros, determina la medida de los catetos de aquél que tenga área máxima.

A. Sea $a\in\mathbb{R}$ una constante real no nula, y considera la parábola $f(x)=ax^2-4a$. Encuentra el valor de a para que se verifiquen simultáneamente las dos siguientes condiciones: 1ª, que el área comprendida entre la parábola y el eje de abscisas sea de 32 unidades cuadradas. 2ª, que la función $f(x)$ sea cóncava hacia arriba $(\cup)$.

B. Encuentra una primitiva de $f(x)=x^2\cdot sen\,x$ que pase por el origen de coordenadas.

Reserva 2 2007

A. Enuncia el Teorema del valor medio de Lagrange. Dada la función $f(x)=\dfrac{1+x}{2-x}$, se pide:

a) ¿Se puede aplicar dicho teorema a la función dada en el intervalo $[1,6]$?
b) ¿Se puede aplicar dicho teorema a la función dada en el intervalo $[3,11]$?
c) Si en algún caso se cumplen las hipótesis del teorema, calcula el valor para el cual se verifica la tesis del mismo.

B. Dada la función $f(x)=2-x^2\cdot e^{-x}$, se pide:

a) Halla las coordenadas de sus máximos y mínimos relativos.
b) Calcula, si existe, la ecuación de la asíntota horizontal por la derecha (cuando $x\to+\infty$).

A. Considera la parábola $f(x)=-x^2+4$. Se pide: a) Calcula las ecuaciones de las rectas tangentes a $f(x)$ en $x=2$ y en $x=-2$, esbozando una gráfica con la parábola y las dos rectas tangentes. b) Calcula el área comprendida entre la parábola y dichas rectas tangentes.

B. Calcula la siguiente integral: $\displaystyle\int\frac{-x+3}{4x^2+9}\,dx$

Junio 2006

A. Determina los valores $a,b,c\in\mathbb{R}$ para que la función $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ pase por el origen de coordenadas, tenga un punto de inflexión en $x=-1$, y su recta tangente en $x=1$ tenga pendiente 3.

B. Enuncia el teorema de Rolle. En los ejemplos siguientes $f(-2)=f(2)$ pero no hay ningún valor $c\in(-2,2)$ tal que $f'(c)=0$. Justifica en cada caso por qué no contradicen el teorema de Rolle. a) $f(x)=\dfrac{1}{x^4}$, b) $g(x)=2-|x|$. (Nota: $|x|$ representa el valor absoluto de x)

A. Calcula la integral indefinida $\displaystyle\int\frac{x+2}{x^2-2x+1}dx$

B. Dadas las funciones $f(x)=x^2-1$ y $g(x)=1-x$: a) Esboza el recinto encerrado entre sus gráficas. b) Calcula el área de dicho recinto.

Septiembre 2006

A. Determina, si es posible, los valores del parámetro $k\in\mathbb{R}$ para que la función definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1-e^x}{2x+1-e^{2x}} & si \quad x<0\\ (2x-k)^2-6 & si \quad x\geq 0\end{cases}$$

, sea continua en $x=0$.

B. Para la función $f(x)=(x+2)\cdot e^x$, se pide: a) Estudia su dominio y continuidad. b) Determina sus puntos de corte con los ejes. c) Obtén las coordenadas de los máximos y mínimos relativos. d) Determina las coordenadas de los puntos de inflexión.
(Recuerda que: $e^x\neq 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$)

A. Calcula la siguiente integral: $\displaystyle\int\frac{x^3+1}{x^2+4}dx$

B. Dibuja aproximadamente las gráficas de las funciones $f(x)=x^2-3$ y $g(x)=2x$, y sombrea el área que queda encerrada entre ellas. Calcula el valor de dicho área.

R1 – 2006

A. Enuncia el teorema de Bolzano. Aplícalo para demostrar que la ecuación $2^{x-1}=1+(1+x)^2$ tiene al menos una solución, determinando un intervalo (a,b) con $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}$ y $a<b$, en el cual se encuentre dicha solución.

B. De entre todos los rectángulos de perímetro 20, ¿cuál tiene diagonal menor?

A. Calcula el valor de la integral $\int_0^1 \frac{2\,arctg\,x}{1+x^2}dx$ (siendo $arctg\,1=\frac{\pi}{4}$ y $arctg\,0=0$)

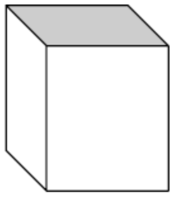
B. Para la función $f(x)=\frac{Ln(x)}{x^2}$, donde $Ln(x)$ significa logaritmo neperiano de x, se pide:

a) Determina las asíntotas horizontales de la función.

b) Calcula el área comprendida entre la gráfica de la función $f(x)$, el eje de abscisas, y las rectas $x=e$ y $x=e^2$. (Observa que $f(x)$ es positiva en el intervalo $\left[e,e^2\right]$)

R2 – 2006

A. Se dispone de 1.200 m^2 de chapa para construir un depósito en forma de prisma recto de base cuadrada, que no incluya la tapa superior. Halla el lado de su base ***x***, y su altura ***y***, de manera que el volumen que pueda almacenar sea máximo. Calcula dicho volumen.



B. Dada la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por: $f(x)=\frac{1}{4}x^4-2x^2+3$, se pide:

a) Determina sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) Calcula las coordenadas de sus puntos de inflexión.

A. Halla el área encerrada entre la curva $y=x^3-4x^2+3x+2$, y la recta $y=2$.

B. Sea la función $f(x)=axe^x+b$ con $a\in\mathbb{R}, a>0$ y $b\in\mathbb{R}, b>0$. Calcula a y b para que la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x=0$ tenga pendiente 1, y que además se cumpla que el área comprendida entre la gráfica de la función $f(x)$, el eje de abscisas, y las rectas $x=0$ y $x=1$ sea $3u^2$.

(Obsérvese que como $a>0$ y $b>0$ entonces $f(x)\geq 0$ en $[0,1]$)

Junio 2005

A. Estudia si la función $f(x)=\begin{cases} x & (x\leq -1) \\ 1-x^2 & (-1<x\leq 2) \\ -3 & (2<x) \end{cases}$ es continua en los puntos $x=-1$ y $x=2$.

Representa gráficamente dicha función.

B. Determina $f(x)$ sabiendo que $f'''(x)=24x;\ f''(0)=2,\ f'(0)=1$ y $f(0)=0$.

A. Una imprenta recibe el encargo de diseñar un cartel con las siguientes características: la zona impresa debe ocupar 100 cm², el margen superior debe medir 3 cm, el inferior 2 cm, y los márgenes laterales 4 cm cada uno.

Calcula las dimensiones que debe tener el cartel de modo que se utilice la menor cantidad de papel posible.

B. a) Enuncia la regla de l'Hôpital.

b) Resuelve el límite siguiente: $\lim_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x-\operatorname{sen} x}$

Septiembre 2005

A. De todos los prismas rectos de base cuadrada y tales que el perímetro de una cara lateral es de 30 cm, halla las dimensiones del que tiene volumen máximo.

B. Estudia el crecimiento y la concavidad de la función $f:(0,+\infty)\to R$ definida por $f(x)=\dfrac{Lx}{x}$. (L = logaritmo neperiano)

A. a) Halla los valores de los coeficientes *b*, *c* y *d* para que la gráfica de la función $y=x^3+bx^2+cx+d$ corte al eje OY en el punto (0,-1), pase por el punto (2,3) y, en ese punto, tenga tangente paralela al eje OX.

b) Una vez hallados esos valores, halla los máximos y mínimos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la citada función.

B. Calcula la primitiva de $\displaystyle\int\frac{x+\sqrt{x}}{x^2}\,dx$.

R1 – 2005

A. Dada la función $f(x)=(2x+1)e^{x^2+x}$, determina la función $g(x)$ tal que $g'(x)=f(x)$, con la condición de que su gráfica pase por el punto (0,2).

B. Se desea construir una lata de conservas en forma de cilindro circular recto, de área total 150 cm² y volumen máximo. Determina el radio de la tapa y la altura del cilindro.

A. Se sabe que la función $f:[0,5]\to R$ dada por $f(x)=\begin{cases} ax+bx^2 & \text{si} \quad 0\le x<2 \\ c+\sqrt{x-1} & \text{si} \quad 2\le x\le 5\end{cases}$ es derivable en el intervalo (0,5), y verifica que $f(0)=f(5)$. ¿Cuánto valen a,b y c?

B. Considera la función $f:R\to R$ definida por $f(x)=(x-2)e^x$.

a) Determina los intervalos en los que la función f es creciente.

b) Dibuja la región limitada por la gráfica de *f*, el eje de abscisas y las rectas de ecuaciones x = 1 y x = 3.

c) Halla el área de la región descrita en el apartado anterior.

R2 – 2005

A. Un objeto se lanza hacia arriba, verticalmente, desde un determinado punto. La altura, en metros, alcanzada al cabo de t segundos viene dada por $h(t) = 5 - 5t - 5e^{-2t}$.
Calcula el tiempo transcurrido hasta alcanzar la altura máxima y el valor de ésta.

B. De la función $f : R \to R$ definida por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ se sabe que tiene un máximo relativo en $x = 1$, un punto de inflexión en (0,0) y que $\int_0^1 f(x)dx = \frac{5}{4}$.
Calcula a, b, c y d.

A. La función $f : R \to R$ dada por $f(x) = \begin{cases} x^2 + bx + c & \text{si} \quad x \le 0 \\ \dfrac{L(x+1)}{x} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$ es derivable en el punto $x = 0$. ¿Cuánto valen b y c?

B. a) Halla el valor positivo de a para que $\int_0^{a-1} (x+1)dx = \frac{9}{2}$.

b) Calcula el área de la superficie comprendida entre el eje $\overline{OX}$, la recta $y = x + 1$ y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.

Junio 2004

A. La curva y = $2x^2$ divide al cuadrado de vértices A(0,0), B(1,0), C(1,1) y D(0,1) en dos recintos.

a) Dibuja dichos recintos.
b) Halla el área de cada uno de ellos.

B. Un alambre de 100 metros de largo se divide en dos trozos. Con uno de los trozos se forma un cuadrado y con el otro una circunferencia. Halla la longitud de los trozos para que la suma de las áreas del cuadrado y del círculo sea mínima.

A. Dada la curva $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ se pide:

a) Dominio de definición de la función y puntos de corte con los ejes, si los hay.
b) Asíntotas, si las hay.
c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
d) Máximos y mínimos, si los hay.
e) Una representación aproximada de la misma.

B. Determina b y c para que la función $f(x) = \begin{cases} x^3 & si \quad x \le 2 \\ -x^2 + bx + c & si \quad x > 2 \end{cases}$

a) Sea derivable en todos los puntos de R.(R = números Reales)
b) Calcula la ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa 1.

Septiembre 2004

A. Considera la función siguiente $f(x)=\begin{cases} x^3-x^2 & si \quad x\le 1 \\ ax+b & si \quad x>1 \end{cases}$.

a) Determina los valores de *a* y *b* para que sea derivable en todos los puntos.
b) Esboza la gráfica de la curva representativa de la función para los valores de *a* y *b* calculados.

B. Considera la función $f(x)=-x^4+4x^3$. Calcula:

a) Puntos de corte con los ejes.
b) Máximos y mínimos.
c) Puntos de inflexión.
d) Halla el área de la región encerrada por la gráfica y el eje X.

A. Expresa el número 60 como suma de tres números positivos de forma que el segundo sea doble del primero.
Si el producto de los tres es máximo, determina el valor de dicho producto.

B. Considera la función $f(x)=\begin{cases} x^3 & si \quad x<1 \\ -x^2+2x & si \quad x\ge 1 \end{cases}$

a) Haz un dibujo aproximado de su gráfica.
b) Calcula el área encerrada por la gráfica y el eje X.

R1 – 2004

A. a)Estudia la continuidad y derivabilidad de la función $f(x)=\begin{cases} 5x+b & si \quad x<1 \\ ax^2+3x+5 & si \quad x\ge 1 \end{cases}$

b)Determina los valores de *a* y *b* para que sea continua y derivable en todo número real.

B. Considera las funciones $f(x)=x^2-2x+8$; $\quad g(x)=-x^2+8x$.

a) Dibuja sus gráficas utilizando los mismos ejes.
b) Halla el área de la región encerrada por ellas.

A. En un concurso se da a cada participante un alambre de dos metros de longitud para que, doblándolo convenientemente, haga con el mismo un cuadrilátero con los cuatro ángulos rectos. Aquellos que lo logren reciben como premio tantos euros como decímetros cuadrados tenga de superficie el cuadrilátero construido.
Calcula la cuantía del máximo premio que se puede obtener en ese concurso.

B. Considera la función $f(x)=\begin{cases} x^3 & si \quad x\le 2 \\ -x^2+6x & si \quad x>2 \end{cases}$

a) ¿Cumple las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo [0, 3]?
b) ¿Hay algún punto de la gráfica en el que la recta tangente sea paralela a la recta que pasa por los puntos (0, f(0)), (3, f(3))?

R2 – 2004

A. a) Enuncia la regla de L'Hôpital.

b) Calcula $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1}$.

B. Calcula las dimensiones de 3 campos cuadrados de modo que: el perímetro del mayor sea el doble del perímetro del menor, se necesiten exactamente 1120 metros de valla para vallar los tres campos y las sumas de sus áreas sea la mínima posible. Cada campo tiene su propia valla.

A. Determina un polinomio P(x) de segundo grado sabiendo que: P(0) = P(2) = 1 y que $\int_0^2 P(x)dx = \dfrac{1}{3}$.

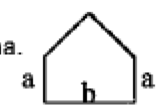
B. Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$, estudia:

a) Asíntotas.
b) Máximos y mínimos.
c) Intervalos de concavidad y convexidad.
d) Haz un dibujo aproximado de la gráfica aprovechando los apartados anteriores.

Junio 2003

PRIMER BLOQUE

A. El perímetro de la ventana del dibujo mide 6 metros. Los dos lados superiores forman entre sí un ángulo de 90º.
Calcula la longitud de los lados *a* y *b* para que el área de la ventana sea máxima.



SEGUNDO BLOQUE

A. Enuncia la regla de L'Hôpital. Calcula el siguiente límite: $\lim_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{L(1+x)} - \dfrac{1}{x} \right)$.

(L= logaritmo neperiano)

TERCER BLOQUE

A. Dada la curva $y = x^2 - 4x$ y la recta $y = 3x - 6$:

a) Dibuja la gráfica de ambas.
b) Señala el recinto plano comprendido entre ellas.
c) Calcula el área del recinto señalado.

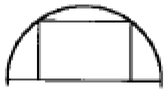
CUARTO BLOQUE

A. Determina las ecuaciones de la recta tangente y de la recta normal (recta perpendicular a la tangente) en el punto de abscisa 0, a la gráfica de la función *f* dada por $f(x) = 2xe^x + \dfrac{x^3-2}{x^2+4}$.

Septiembre 2003

PRIMER BLOQUE

A. En un semicírculo de radio 10 m se quiere inscribir un rectángulo, uno de cuyos lados esté sobre el diámetro y el opuesto a él tenga sus extremos en la parte curva. Calcula las dimensiones del rectángulo para que su área sea máxima.



SEGUNDO BLOQUE

A. Calcula la siguiente integral: $\int_{e}^{e^3} \frac{Lx}{x}\,dx$ (*L = Logaritmo neperiano*)

TERCER BLOQUE

A. Dada la función $f: R \longrightarrow R$ definida por $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5x$:

a) Halla las coordenadas del punto de inflexión.

b) Halla las coordenadas de los puntos de corte con el eje de abscisas.

c) Determina las ecuaciones de las rectas tangentes a $f(x)$ en el punto de inflexión y en el origen de coordenadas.

A. Sea la función $f: R \longrightarrow R$ dada por: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & si \quad x \le 3 \\ 2x - 4 & si \quad x > 3 \end{cases}$.

a) Define continuidad de una función en un punto.

b) ¿En qué puntos es continua la función $f(x)$?

c) ¿En qué puntos es derivable la función $f(x)$?

d) Si una función no es continua en un punto, ¿puede ser derivable en él?

R1 – 2003

PRIMER BLOQUE

A. De la función f de R en R definida por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, se sabe que tiene un máximo relativo en $x = 1$ y un punto de inflexión en (0, 0), y que $\int_0^1 f(x)dx = \frac{5}{4}$. Calcula a, b, c, y d.

A. Dada la función f de R en R definida por: $f(x) = \begin{cases} x - 1 & si \quad x \le 1 \\ x^2 - 1 & si \quad 1 < x \le 2 \\ x^2 & si \quad x > 2 \end{cases}$;

a) Representa gráficamente la función.

b) Estudia su continuidad en los puntos de abscisa $x = 1$ y $x = 2$.

A. Resuelve la siguiente integral: $\int \frac{x^4 + 1}{x^3 - 3x + 2}\,dx$.

A. Supongamos que el rendimiento $r(t)$ de una alumna en un examen que dura dos horas viene dado por la relación $r(t) = 75\,t\,(2 - t)$ donde t, con $0 \le t \le 2$, es el tiempo en horas.

a) ¿En qué intervalos aumenta el rendimiento y en qué intervalos disminuye?

b) ¿En qué momento se obtiene mayor rendimiento?

c) ¿En qué momento el rendimiento es nulo?

R2 – 2003

PRIMER BLOQUE

A. Una compañía de venta a domicilio ha determinado que sus beneficios anuales dependen del número de vendedores verificando la expresión: $B(x) = -9x^2 + 360x + 1875$, donde $B(x)$ es el beneficio en miles de euros para x vendedores.

a) ¿Qué número de vendedores ha de tener la empresa para que sus beneficios sean máximos?

b) ¿Cuál será el valor máximo de los beneficios?

SEGUNDO BLOQUE

A. Dada la función $f(x)$ de ecuación $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 3$:

a) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

b) Halla los puntos máximos, mínimos y de inflexión de $f(x)$.

c) Representa su gráfica.

TERCER BLOQUE

A. Determina los números reales a y b para que la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} a\, e^{\frac{sen^2 x}{x}} + b \cos x & si \quad x < 0 \\ 6 & si \quad x = 0 \\ 3a \dfrac{senx}{x} + b(x-1) & si \quad x > 0 \end{cases}$$

sea continua en toda la recta real.

CUARTO BLOQUE

A. Dadas las curvas de ecuaciones $y = \sqrt{3x}$; $y = \frac{1}{3}x^2$:

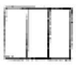
a) Dibuja sus gráficas.

b) Señala el recinto plano comprendido entre ambas.

c) Calcula el área de dicho recinto.

Junio 2002

A La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \begin{cases} x^2 + bx + c & si \quad x \le 0 \\ \dfrac{L(1+x)}{x} & si \quad x > 0 \end{cases}$ es derivable en el punto x=0. Calcula cuánto valen las constantes b y c. (L= logaritmo neperiano).

A Un solar rectangular de 11.250 m^2 se divide en tres zonas rectangulares iguales (como muestra la figura ) para venderlo. Se valla el borde del campo y la separación de las zonas. Calcula las dimensiones del solar para que la longitud de valla utilizada sea mínima.

A Halla la ecuación de la recta tangente a la curva de ecuación $y = x^3 - 3x$ en el punto de abscisa x=-1. Calcula el área del recinto limitado por la recta tangente y la curva dada.

A Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^3}$. Calcula: a) Los máximos y mínimos relativos. b) Las asíntotas. c) Los puntos de inflexión.

Septiembre 2002

A La capacidad de concentración de una saltadora de altura en una reunión atlética de tres horas de duración viene dada por la función $f(t) = 300t(3-t)$ donde t mide el tiempo en horas.

a) Calcula los intervalos en los cuales la capacidad de concentración aumenta y los intervalos en los que disminuye. ¿Cuándo es nula?.

b) ¿Cuál es el mejor momento, en términos de su capacidad de concentración, para que la saltadora pueda batir su propia marca?.

c) Representa gráficamente la función capacidad de concentración.

A Calcula $\int \frac{x^2-2}{x^3-3x+2}dx$

A El alcalde de un pueblo quiere preparar un recinto rectangular para celebrar fiestas. Aprovecha para uno de los lados una tapia existente y dispone de 300 m de tela metálica para cercar los otros tres lados.

a) Halla las dimensiones del recinto máximo que se puede acotar.

b) Calcula el área de dicho recinto.

A Dadas las funciones $y = -x^2 + 4$ e $y = |x+2|$.

a) Dibuja ambas gráficas.

b) Señala el recinto plano comprendido entre las dos gráficas anteriores.

c) Calcula el área del recinto plano señalado.

R1 – 2002

PRIMER BLOQUE

A Calcula $\int (x^2+2x+1)Lxdx$ (L= logaritmo neperiano).

A Se toma una cuerda de 5 metros de longitud y se unen los extremos. Construimos con ella triángulos isósceles de diferentes medidas. Calcula las dimensiones del que tiene mayor área.

A Enuncia la Regla de L'Hôpital y calcula el siguiente límite: $\lim_{x\to 0} \frac{2x\cos 2x - \text{sen}2x}{x^3}$

A La función $f:[0,5]\to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \begin{cases} ax+bx^2 & \text{si } 0 \le x < 2 \\ c+\sqrt{x-1} & \text{si } 2 \le x \le 5 \end{cases}$ es derivable en el intervalo (0,5) y verifica que f(0)=f(5). ¿Cuánto valen a, b y c?

R2 – 2002

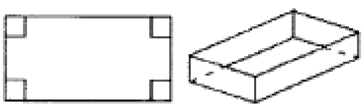
A Considera la función f(x) definida para $x \neq 0$ por la relación: $f(x) = \frac{4x^2+3x+4}{x}$

a) Halla las ecuaciones de sus asíntotas.

b) Determina los máximos y mínimos locales.

c) Dibuja la gráfica de f(x).

A Con una lámina rectangular de 30 cm de largo por 15 cm de ancho se quiere construir una caja sin tapa. Para ello se recortan unos cuadrados de los vértices y se doblan en ángulo recto las pestañas resultantes tal y como muestra la figura.



a) Calcula el lado del cuadrado recortado para que el volumen sea máximo.

b) Calcula el volumen máximo.

A Dada la curva de ecuación $y = x^2 - 4x + 3$ y la recta $y = -x + 3$

a) Dibuja la gráfica de la parábola y de la recta.

b) Señala el recinto plano comprendido entre ambas.

c) Calcula el área del recinto plano señalado.

A Dada la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{x^2+2} & \text{si } x \le 0 \\ x^2 - 4x + 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a) Determina los intervalos de continuidad. b) Determina los intervalos de derivabilidad.

Junio 2001

Dada la parábola $y = \dfrac{x^2}{4}$, y la recta y = x

a) Dibuja las gráficas de la parábola y de la recta.

b) Señala el recinto plano comprendido entre las dos gráficas anteriores.

c) Calcula el área del recinto plano señalado.

Resuelve $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{x(x^2+1)}\,dx$

Dada la función: $f(x) = \begin{cases} 2x+5 & \text{si } x \le 1 \\ x^2 + k & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a) Determina *k* para que *f(x)* sea continua en *x=1*.

b) ¿Es la función *f(x)* para el valor de *k* calculado derivable en *x=1*?

Calcular: $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{(e^x - 1)}$

Septiembre 2001

Hallar las dimensiones de un depósito abierto superiormente, en forma de prisma recto de base cuadrada, de 1000 metros cúbicos de capacidad que tenga un revestimiento interior de coste mínimo. El precio del m^2 de revestimiento lateral es 100 euros, el precio del m^2 de revestimiento del fondo es 200 euros. Halla también el coste mínimo.

Dada la función: $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \le -2 \\ ax^2 + bx & \text{si } -2 < x \le 4 \\ x - 4 & \text{si } 4 > x \end{cases}$, determina *a* y *b* de modo que sea continua. Para los valores que se obtengan, estudia la derivabilidad.

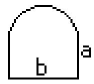
Enuncia la Regla de L' Hopital y calcula el siguiente límite: $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{4(x - Ln(1+x))}{xLn(1+x)}$,

(*Ln*=logaritmo neperiano)

Calcular: $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^3 - 4x^2 + 4x}\,dx$

R1 – 2001

Se considera una ventana rectangular en la que el lado superior ha sido sustituido por una semicircunferencia (ver dibujo) Sabiendo que el perímetro de la ventana es 6 m, halla las dimensiones a y b par que la superficie sea máxima.



B Estudia la continuidad y la derivabilidad de la función: $f(x)=\begin{cases} \dfrac{4}{x+2} & \text{si } x \le 0 \\ x^2-x+2 & \text{si } x>0 \end{cases}$

Halla el polinomio P(x) cuya derivada sea $6x^2-6x-36$ y que además P(x) alcance un máximo y un mínimo relativos tales que el valor máximo del polinomio sea doble que el valor mínimo. Halla también esos valores máximo y mínimo.

D Dibuja el recinto delimitado por las curvas $y=x^2+2x+3$ e $y=|x+1|$. Halla el área del recinto.

R2 – 2001

A Dada la función $y = xe^x$ y las rectas $x = 1$ e $y = 0$

a) Dibuja la gráfica de la función para $x \ge 0$ y la de las rectas.

b) Señala el recinto plano comprendido entre las tres gráficas anteriores.

c) Calcula el área del recinto plano señalado.

B Resuelve $\displaystyle\int \frac{x^2-x+1}{x^3+x}\,dx$

C Dada la función: $f(x)=\begin{cases} x+b & \text{si } x<0 \\ ax^2+3 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$, determina *a* y *b* para que *f(x)* sea continua y no derivable en x = 0. Propuesto en 00/01

D Enuncia la Regla de L' Hopital y calcula: $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^3-3x+2}{x^4-2x^2+1}$

Junio 2000

El coste de producción de x unidades de un producto viene dado por la expresión: $C = x^2 - 300x + 100$ y el precio de venta de una unidad es $U = 1000 - x$ €. ¿Cuántas unidades se deben vender para que el beneficio sea máximo?

B Calcular: $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^3+x^2-6x}\,dx$

C Dada la función $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } x \le 0 \\ a+bx & \text{si } 0<x\le 1 \\ 3 & \text{si } x>1 \end{cases}$, determinar a y b de modo que sea continua.

Para los valores que se obtengan, estudiar la derivabilidad.

D Calcular el área del recinto limitado por las curvas $y = x^2 - 1$, $y = 11 - x$ y el eje OX. Dibujar el recinto.

Septiembre 2000

A Hallar el área del recinto plano delimitado por las curvas de ecuación y = x2 - 2 e y = -|x|. Dibujar el recinto.

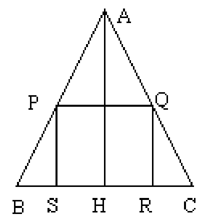
B Calcular: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - sen\ x}{tg\ x - sen\ x}$

C Estudiar la continuidad y la derivabilidad de la función: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2-x} & \text{si } x \le 1 \\ -x^2 + 4x - 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

D Calcular: $\displaystyle\int \frac{3x}{x^2 + 2x + 3}\,dx$

R1 – 2000

El triángulo BAC es isósceles en A. La base (BC) mide 12 cm. y la altura (AH) mide 18 cm. Se quiere inscribir un rectángulo PQRS de superficie máxima. Hallar las dimensiones de este rectángulo.



B Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{2x+1} & \text{si } x \le -1 \\ x^2 - 2x - 5 & \text{si } -1 < x \le 4 \\ 5 & \text{si } x > 4 \end{cases}$

C Hallar el área de la región plana limitada por la curva $f(x) = |x^2-4x|$ y la recta $y = 12$. Dibujar el recinto

D Calcular: $\displaystyle\int \frac{x^4 - 3x^3 - 3x - 2}{x^3 - x^2 - 2x}\,dx$

R2 – 2000

A Hallar los puntos en que la función: $f(x) = \left|x^2 - 4x - 5\right|$, no es derivable. Razonar la respuesta.

B Calcular: $\displaystyle\int \frac{6x + 10}{-x^3 + x^2 + x - 1}\,dx$

C Hallar el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x) = -2x^2 + 4x$ y las tangentes a dicha gráfica en los puntos en que ésta corta al eje de abscisas. Dibujar el recinto.

D Calcular: $\lim_{x\to 0}\left(\frac{5}{Ln(1+x)}-\frac{5}{x}\right)$

Junio 1999

Septiembre 1999

Hallar los máximos y mínimos relativos, los puntos de inflexión y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función: $f(x)=\frac{x^3}{x^2-1}$

Calcular: $\int x^3\, e^{-4x^2}\, dx$

Hallar el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $y = x^2 - 2x$ e $y = -x^2 + 4x$

Calcular: $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{tg\, x-8}{\sec x+10}$
