INTEGRAL INDEFINIDA. MÉTODOS DE INTEGRACIÓN

Método de integración por cambio de variable

Consiste en sustituir x por una función adecuada para que la expresión resultante sea más sencilla de integrar que la primera.

Si x es función de t: $x = g(t)$, entonces la diferencial de x es: $dx = g'(t)dt$, con lo cual:

$$\boxed{\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt}$$

Aplicaremos este método cuando la segunda integral sea más fácil de calcular que la primera. La cuestión más difícil es saber la función $g(t)$ adecuada en cada caso.

Ejemplo 1

Calcular la siguiente integral: $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$

Llamando $x = \text{sen}t$, será $dx = \cos t dt$, y la integral anterior se puede escribir:

$$\int \sqrt{1-sen^2 t}\cos t dt = \int cos^2 t dt = \frac{t}{2} + \frac{sen 2t}{4} + C = \frac{t}{2} + \frac{2 sent \cos t}{4} + C = (*)$$

Si $x = \text{sen}t$, entonces $t = \text{arcsen}x$, y además $\cos t = \sqrt{1-sen^2 t} = \sqrt{1-x^2}$

Por lo tanto, (*) $= \dfrac{arcsenx}{2} + \dfrac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + C$

Nota: La integral $\int \cos^2 t dt$ se ha realizado teniendo en cuenta la siguiente igualdad trigonométrica: $cos^2 t = \dfrac{1+\cos 2t}{2}$

Generalmente, al hacer un cambio de variable, se escribe t en función de x, en lugar de x en función de t, es decir, se hace $t = h(x)$, con lo cual será: $dt = h'(x)dx$.

Ejemplo 2

Calcular la siguiente integral: $\int \dfrac{10x+5}{\left(x^2+x\right)^3}dx$

Pongamos $\int \dfrac{10x+5}{\left(x^2+x\right)^3}dx = 5\int \dfrac{2x+1}{\left(x^2+x\right)^3}dx = (*)$. Llamando $t = x^2 + x$, será

$dt = (2x+1)dx$, luego: $(*) = 5\int \dfrac{dt}{t^3} = 5\int t^{-3}dt = -\dfrac{5}{2}t^{-2} + C = \dfrac{-5}{2\left(x^2+x\right)^2} + C$

Método de integración por partes

Consiste en aplicar la fórmula de la derivabilidad del producto: $(u\cdot v)' = u'\cdot v + u\cdot v'$, es decir: $u\cdot v' = (u\cdot v)' - u'\cdot v$.

Integrando en ambas partes: $\int u\cdot v' dx = \int ((u\cdot v)' - u'\cdot v)dx = \int (u\cdot v)' dx - \int u'\cdot v dx$. Así pues: $\int u\cdot v' dx = u\cdot v - \int u'\cdot v dx$, fórmula más conocida de la forma:

$$\boxed{\int u dv = uv - \int v du}$$

que se puede memorizar así: ***"Un día vi una vaca vestida de uniforme"***.

Podemos aplicar la fórmula anterior para calcular una integral del tipo $\int \mathrm{udv}$ siempre que sepamos calcular v y $\int \mathrm{vdu}$.

Ejemplo 3

Calcular la siguiente integral: $\int x\cos x dx$.

Esta integral es del tipo $\int u dv$, siendo: $\begin{cases} u = x \\ dv = \cos x dx \end{cases}$.

De aquí se deduce que: $\begin{cases} du = dx \\ v = senx \end{cases}$

Aplicando la fórmula de integración por partes tenemos:

$$\int x\cos x dx = xsenx - \int senx dx = xsenx + \cos x + C$$

Ejemplo 4

Calcular la siguiente integral: $\int arctgx dx$.

Esta integral es del tipo $\int u dv$, siendo: $\begin{cases} u = arctgx \\ dv = dx \end{cases}$. De aquí se deduce:

$\begin{cases} du = \dfrac{1}{1+x^2} \\ v = x \end{cases}$. Aplicando la fórmula de integración por partes tenemos:

$$\int arctgx dx = xarctgx - \int \frac{1}{1+x^2}dx = xarctgx - \frac{1}{2}ln\left|1+x^2\right| + C$$

Ejemplo 5

Calcular la siguiente integral: $\int x^p e^x dx$ siendo p un número natural.

Esta integral es del tipo $\int u dv$, siendo: $\begin{cases} u = x^p \\ dv = e^x dx \end{cases}$. De aquí se deduce que:

$\begin{cases} du = px^{p-1} dx \\ v = e^x \end{cases}$. Aplicando la fórmula de la integración por partes tenemos:

$$\int x^p e^x dx = x^p e^x - p \int x^{p-1} e^x dx$$

De esta forma el cálculo de la primera integral se ha convertido en el cálculo de otra integral del mismo tipo en la que el exponente p se ha rebajado una unidad. Realizando el proceso p veces se llega a la integral $\int e^x dx$ que es inmediata.

Otras veces, al aplicar la integración por partes llegamos a la misma integral que teníamos al principio, y entonces, podemos calcularla pasándola al primer miembro y despejándola.

Ejemplo 6

Calcular la integral: $\int sen^4 x dx$.

Esta integral es del tipo $\int u dv$, siendo: $\begin{cases} u = sen^3 x \\ v = sen x \end{cases}$. Por lo tanto:

$\begin{cases} du = 3 sen^2 x \cos x dx \\ v = -\cos x \end{cases}$. Aplicando la fórmula de integración por partes tenemos:

$$\int sen^4 x dx = -sen^3 x \cos x + 3 \int sen^2 x \cos^2 x dx = - sen^3 x \cos x + 3 \int sen^2 x (1 - sen^2 x) dx =$$

$$= -sen^3 x \cos x + 3 \int sen^2 x dx - 3 \int sen^4 x dx = (*)$$

$$= -sen^3 x \cos x + \frac{3}{2} x - \frac{3}{4} sen 2x - 3 \int sen^4 x dx$$

Observemos que la última integral es precisamente la que queríamos calcular, luego si la pasamos al primer miembro tenemos:

$4 \int sen^4 x dx = -sen^3 x \cos x + \frac{3}{2} x - \frac{3}{4} sen 2x$ y finalmente:

$$\int sen^4 x dx = -\frac{1}{4} sen^3 x \cos x + \frac{3}{8} x - \frac{3}{16} sen 2x + C$$

Nota: En $(*)$ se ha utilizado que $\int sen^2 x dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} sen 2x$

Integración de funciones racionales

Una función racional es de la forma $y=\frac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios.

Si el grado del numerador es mayor o igual que el grado del denominador, se divide el primero por el segundo, con lo cual se obtiene un cociente $C(x)$ y un resto $R(x)$.

Entonces se cumple: $P(x) = Q(x)C(x) + R(x)$, luego:

$$\boxed{\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{Q(x)C(x)+R(x)}{Q(x)}=C(x)+\frac{R(x)}{Q(x)}}$$

Ejemplo 7

Calcular la siguiente integral: $\int \frac{x^5-2x^4 10x^3+16x^2+18x-9}{x^2-2x-3}dx$

Como el grado del numerador es 5 y el del denominador es 2, dividimos el primero por el segundo y obtenemos x^3-7x+2 de cociente y $x-3$ de resto. Por lo tanto:

$$\int \frac{x^5-2x^4-10x^3+16x^2+18x-9}{x^2-2x-3}dx=\int\left(x^3-7x+2+\frac{x-3}{x^2-2x+3}\right)dx=$$

$$=\frac{x^4}{4}-\frac{7x^2}{2}+2x+\int\frac{x-3}{x^2-2x+3}dx$$

Como los polinomios son sencillos de integrar, el problema se ha reducido al cálculo de una integral del tipo $\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx$, siendo el grado del numerador menor que el del denominador.

En primer lugar descomponemos en factores el denominador $Q(x)$. Vamos a considerar los tres casos siguientes:

1º) Q(x) tiene solamente raíces reales simples

Supongamos que éstas son $x_1,x_2,\dots,x_n$. Entonces: $Q(x)=a_0(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$ y podemos escribir: $\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{x-x_2}+\dots+\frac{A_n}{x-x_n}$, donde $A_1,A_2,\dots,A_n$ son números que se calculan de la forma que veremos en el siguiente ejemplo.

Por lo tanto:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int \frac{A_1}{x-x_1}dx + \int \frac{A_2}{x-x_2}dx + \ldots + \int \frac{A_n}{x-x_n}dx =$$
$$= A_1 \ln(x-x_1) + A_2 \ln(x-x_2) + \ldots + A_n \ln(x-x_n)$$

Ejemplo 8

Calcular la siguiente integral: $\int \frac{3x+2}{2x^3+9x^2+7x-6}dx$

Resolviendo la ecuación $2x^3+9x^2+7x-6=0$ encontramos sus soluciones:

$x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = -2,\ x_3 = -3$ que son reales y distintas. Entonces:

$$2x^3+9x^2+7x-6 = 2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+2)(x+3) = (2x-1)(x+2)(x+3);$$

$$\frac{3x+2}{2x^3+9x^2+7x-6} = \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3}$$

y vamos a hallar los números *A*, *B*, *C* que cumplan esta condición.

La suma de las tres fracciones del segundo miembro es:

$\frac{A(x+2)(x+3)+B(2x-1)(x+3)+C(2x-1)(x+2)}{(2x-1)(x+2)(x+3)}$, y como

$2x^3+9x^2+7x-6 = (2x-1)(x+2)(x+3)$, los numeradores también deberán de ser iguales, luego: $3x+2 = A(x+2)(x+3)+B(2x-1)(x+3)+C(2x-1)(x+2)$

Esta igualdad es cierta para cualquier valor que demos a *x*.

En particular, si hacemos $x = \frac{1}{2}$ resulta:

$$3\cdot\frac{1}{2}+2 = A\left(\frac{1}{2}+2\right)\left(\frac{1}{2}+3\right) + B\left(2\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}+3\right) + C\left(2\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}+2\right);\ \frac{7}{2} = A\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}$$

de donde $A = \frac{2}{5}$. Análogamente, si hacemos $x = -2$ resulta $B = \frac{4}{5}$, y si hacemos $x = -3$ resulta $C = -1$. Por lo tanto:

$$\int \frac{3x+2}{2x^3+9x^2+7x-6}dx = \int \left(\frac{2/5}{2x-1} + \frac{4/5}{x+2} + \frac{-1}{x+3}\right)dx =$$
$$= \frac{1}{5}\ln(2x-1) + \frac{4}{5}\ln(x+2) - \ln(x+3) + C$$

2º) Q(x) tiene raíces reales múltiples

Supongamos que x_1 es una raíz múltiple de orden *k*. Eso significa que en la descomposición de $Q(x)$ aparecerá $(x-x_1)^k$. Entonces se opera de una forma similar al apartado anterior, haciendo una descomposición en suma de fracciones. La raíz x_1 dará origen a la suma de fracciones: $\frac{A_1}{(x-x_1)^k}+\frac{A_2}{(x-x_1)^{k-1}}+\ldots+\frac{A_k}{x-x_1}$, donde $A_1, A_2, \ldots, A_k$ son números que se calculan de la forma que veremos en el ejemplo siguiente. Integrando la suma de fracciones anterior tenemos:

$$\boxed{\begin{array}{l}\displaystyle\int\frac{A_1}{(x-x_1)^k}dx+\int\frac{A_2}{(x-x_1)^{k-1}}dx+\ldots+\int\frac{A_k}{x-x_1}dx=\\ \displaystyle=\frac{A_1}{-k+1}(x-x_1)^{-k+1}+\frac{A_2}{-k+2}(x-x_1)^{-k+2}+\ldots+A_k\,ln(x-x_1)+C\end{array}}$$

Ejemplo 9

Calcular la siguiente integral: $\int\frac{1}{x^4-x^3-3x^2+5x-2}dx$.

Resolviendo la ecuación $x^4-x^3-3x^2+5x-2=0$ encontramos que sus soluciones son $x_1=1$ y $x_2=-2$, siendo x_1 una raíz triple, es decir:

$x^4-x^3-3x^2+5x-2=(x-1)^3(x+2)$.

Luego: $\frac{1}{x^4-x^3-3x^2+5x-2}=\frac{A}{(x-1)^3}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-1}+\frac{D}{x+2}$, y vamos a hallar los números *A*, *B*, *C*, *D* que cumplen esta condición. La suma de las cuatro fracciones del segundo miembro es: $\frac{A(x+2)+B(x-1)(x+2)+C(x-1)^2(x+2)+D(x-1)^3}{(x-1)^3(x+2)}$, y como $x^4-x^3-3x^2+5x-2=(x-1)^3(x+2)$, los numeradores deberán ser iguales,

luego: $1=A(x+2)+B(x-1)(x+2)+C(x-1)^2(x+2)+D(x-1)^3$.

Esta igualdad es cierta para cualquier valor que demos a *x*.

En particular, si hacemos *x* = −2: $1=D(-2-1)^3\Rightarrow 1=-27D\Rightarrow D=-1/27$, si hacemos *x* = 1: $1=A(1+2)\Rightarrow 1=3A\Rightarrow A=1/3$, si hacemos *x* = 0:

$1=2A-2B+2C-D\Rightarrow -2B+2C=1-2A+D\Rightarrow -2B+2C=\frac{8}{27}$, y si hacemos

x = 2: $1=4A+4B+4C+D\Rightarrow 4B+4C=1-4A-D\Rightarrow 4B+4C=-\frac{8}{27}$

Resolviendo el sistema formado por las dos últimas ecuaciones: $B=-1/9, C=1/27$

$$\int\frac{1}{x^4-x^3-3x^2+5x-2}dx=\int\left(\frac{1/3}{(x-1)^3}+\frac{-1/9}{(x-1)^2}+\frac{1/27}{x-1}+\frac{-1/27}{x+2}\right)dx=$$

$$=-\frac{1}{6(x-1)^2}+\frac{1}{9(x-1)}+\frac{1}{27}ln(x-1)-\frac{1}{27}ln(x+2)+C$$

3º) Q(x) tiene raíces imaginarias simples

Entonces la descomposición en fracciones simples de $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ da lugar a fracciones de la forma $\dfrac{hx+k}{ax^2+bx+c}$, donde *h*, *k* son números que se calculan de la forma que veremos en los ejemplos siguientes, y las raíces de ax^2+bx+c son imaginarias.

Veamos cómo se calcula la integral $\displaystyle\int \frac{hx+k}{ax^2+bx+c}dx$.

Vamos a distinguir dos casos, según que sea o no sea nulo el valor de *h* del numerador *hx* + *k*.

h = 0

Entonces aplicamos al denominador el método del completamiento del cuadrado. De esta forma, el denominador ax^2+bx+c toma la forma $a\left((x+m)^2+n^2\right)$.

Así pues, $\displaystyle\int \frac{k}{ax^2+bx+c}dx = \int \frac{k}{a\left((x+m)^2+n^2\right)}dx = \frac{k}{a}\int \frac{1}{(x+m)^2+n^2}dx =$

$\displaystyle= \frac{k}{an^2}\int \frac{1}{\left(\frac{x+m}{n}\right)^2+1}dx = (*)$. Si hacemos ahora el cambio de variable: $t=\dfrac{x+m}{n}$; $dt=\dfrac{dx}{n}$. Entonces $\displaystyle (*) = \frac{k}{an}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{k}{an}arctg\, t + C = \frac{k}{an}arctg\left(\frac{x+m}{n}\right)+C$

Ejemplo 10

Calcular la siguiente integral: $\displaystyle\int \frac{5}{2x^2-12x+26}dx$

Aplicando el método del completamiento del cuadrado al polinomio $2x^2-12x+26$:

$$2x^2-12x+26 = 2\left(x^2-6x+13\right) = 2\left(x^2-2x+3^2-3^2+13\right) = 2\left((x-3)^2+4\right)$$

Por lo tanto, $\displaystyle\int \frac{5}{2x^2-12x+26}dx = \int \frac{5dx}{2\left((x-3)^2+4\right)} = \frac{5}{2}\int \frac{dx}{(x-3)^2+4} =$

$$= \frac{5}{2\cdot 4}\int \frac{dx}{\frac{(x-3)^2}{4}+1} = \frac{5}{2\cdot 4}\int \frac{dx}{\left(\frac{x-3}{2}\right)^2+1} = (*)$$

Haciendo el cambio de variable: $t=\dfrac{x-3}{2} \Rightarrow dt = \dfrac{1}{2}dx \Rightarrow dx = 2dt$ tenemos:

$$(*) = \frac{5}{8}\int \frac{2dt}{t^2+1} = \frac{10}{8}arctg\, t + C = \frac{5}{4}arctg\left(\frac{x-3}{2}\right)+C$$

h ≠ 0

Entonces descomponemos el numerador $hx + k$ buscando una expresión que sea la derivada del denominador (es decir, $2ax + b$), y procedemos de la siguiente forma:

$hx+k=h\left(x+\frac{k}{h}\right)=\frac{h}{2a}\left(2ax+\frac{2ak}{h}\right)=\frac{h}{2a}\left(2ax+b-b+\frac{2ak}{h}\right)$, y llamando $p=\frac{2ak}{h}-b$,

tenemos: $\int\frac{hx+k}{ax^2+bx+c}dx=\frac{h}{2a}\int\frac{2ax+b+p}{ax^2+bx+c}dx=\frac{h}{2a}\int\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx+$

$$+\frac{h}{2a}\int\frac{p}{ax^2+bx+c}dx=\frac{h}{2a}ln\left|ax^2+bx+c\right|+\frac{h}{2a}\int\frac{p}{ax^2+bx+c}dx.$$

Esta última integral carece de término en x en el numerador, luego se calcula por el procedimiento visto en el apartado anterior, para $h = 0$.

Ejemplo 11

Calcular la siguiente integral: $\int\frac{4x+3}{x^2+2x+50}dx$

Teniendo en cuenta que la derivada del denominador es $2x + 2$, transformamos el numerador de la siguiente forma:

$$4x+3=4\left(x+\frac{3}{4}\right)=\frac{4}{2}\left(2x+\frac{3}{2}\right)=2\left(2x+2-2+\frac{3}{2}\right)=2(2x+2)-1$$

Por lo tanto:

$$\int\frac{4x+3}{x^2+2x+50}dx=\int\frac{2(2x+2)-1}{x^2+2x+50}dx=2\int\frac{2x+2}{x^2+2x+50}dx-\int\frac{1}{x^2+2x+50}dx=$$

$=2ln\left(x^2+2x+50\right)-\int\frac{1}{x^2+2x+50}dx$. Esta última integral se calcula así:

$$x^2+2x+50=x^2+2\cdot x\cdot 1+50=x^2+2\cdot x\cdot 1+1^2-1^2+50=(x+1)^2+49$$

Entonces: $\int\frac{1}{x^2+2x+50}dx=\int\frac{1}{(x+1)^2+49}dx=\frac{1}{49}\int\frac{dx}{\frac{(x+1)^2}{49}+1}=$

$$=\frac{1}{49}\int\frac{dx}{\left(\frac{x+1}{7}\right)^2+1}=\frac{1}{7}\int\frac{1/7}{\left(\frac{x+1}{7}\right)^2+1}dx=\frac{1}{7}arctg\left(\frac{x+1}{7}\right)+C$$

Finalmente tenemos:

$$\int\frac{4x+3}{x^2+2x+50}dx=2ln\left(x^2+2x+50\right)-\frac{1}{7}arctg\left(\frac{x+1}{7}\right)+C$$

Ejemplo 12

Calcular la siguiente integral: $\displaystyle\int \frac{x^2+15x-38}{x^3-7x^2+9x+17}dx$.

Resolviendo la ecuación $x^3-7x^2+9x+17=0$ encontramos que tiene $x_1=-1$ como única solución real. Entonces: $x^3-7x^2+9x+17=(x+1)(x^2-8x+17)$.

Así pues: $\dfrac{x^2+15x-38}{x^3-7x^2+9x+17}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{hx+k}{x^2-8x+17}$ y vamos a hallar los números A, h y k que cumplen esta condición.

La suma de las dos fracciones del segundo miembro es:

$$\frac{A(x^2-8x+17)+(hx+k)(x+1)}{(x+1)(x^2-8x+17)},$$

luego: $x^2+15x-38=A(x^2-8x+17)+(hx+k)(x+1)$.

Esta igualdad es cierta para todo valor que le demos a x.

En particular, si hacemos $x=-1$, resulta: $-52=A\cdot 26$, de donde $A=-2$.

Análogamente, si hacemos $x=0$ resulta $k=-4$, y si hacemos $x=1$ resulta $h=3$.

Por lo tanto: $\displaystyle\int \frac{x^2+15x-38}{x^3-7x^2+9x+17}dx=\int\frac{-2}{x+1}dx+\int\frac{3x-4}{x^2-8x+17}dx$.

La primera de estas dos integrales es: $-2\,ln(x+1)$.

Para calcular la segunda integral tengamos en cuenta que la derivada del denominador es $2x-8$, luego el numerador se transforma así:

$3x-4=3\left(x-\dfrac{4}{3}\right)=\dfrac{3}{2}\left(2x-\dfrac{8}{3}\right)=\dfrac{3}{2}\left(2x-8+8-\dfrac{8}{3}\right)=\dfrac{3}{2}(2x-8)+8$, y la segunda de las dos integrales anteriores se convierte en:

$$\frac{3}{2}\int\frac{2x-8}{x^2-8x+17}dx+8\int\frac{1}{x^2-8x+17}dx=\frac{3}{2}\int\frac{2x-8}{x^2-8x+17}dx+$$

$$+8\int\frac{1}{(x-4)^2+1}dx=\frac{3}{2}ln(x^2-8x+17)+8arctg(x-4).$$

Por lo tanto, finalmente tenemos:

$$\int\frac{x^2+15x-38}{x^3-7x^2+9x+17}dx=-2\,ln(x+1)+\frac{3}{2}ln(x^2-8x+17)+8arctg(x-4)+C$$