TEMA 13 – INTEGRAL DEFINIDA

ÁREAS

EJERCICIO 1 : Obtén el área del recinto limitado por las curvas $y = e^x$, $y = -e^x$ y las rectas $x = 0$ y $x = 1$.

Solución:

- Función diferencia: $e^x - (-e^x) = e^x + e^x = 2e^x$
(No se anula para ningún valor de x; es decir, las dos curvas no se cortan en ningún punto).
- $G(x) = \int 2e^x \, dx = 2e^x$
- $G(1) - G(0) = 2e - 2 = 2(e-1)$
- $\text{Área} = 2(e-1) \approx 3{,}44 \ \text{u}^2$

EJERCICIO 2 : Halla el área del recinto limitado por la curva $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

Solución:

- La curva $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ no corta al eje X, pues $y > 0$ para todo x.
- $G(x) = \int \dfrac{1}{1+x^2} \, dx = arctg\, x$
- $G(1) - G(-1) = \dfrac{\pi}{4} - \left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$
- $\text{Área} = \dfrac{\pi}{2} \ \text{u}^2$

EJERCICIO 3 : Calcula el área limitada por las curvas $y = 2x^2 + 2x - 15$ e $y = x^2 + 3x + 5$.

Solución:

- Puntos de corte: $2x^2 + 2x - 15 = x^2 + 3x + 5 \ \rightarrow \ x^2 - x - 20 = 0 \ \rightarrow$
$\rightarrow \ x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+80}}{2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{81}}{2} = \dfrac{1 \pm 9}{2} \ \rightarrow \ \begin{cases} x = -4 \\ x = 5 \end{cases}$
- Función diferencia: $2x^2 + 2x - 15 - (x^2 + 3x + 5) = x^2 - x - 20$
- Primitiva: $G(x) = \int (x^2 - x - 20)\, dx = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} - 20x$
- $G(5) - G(-4) = \dfrac{-425}{6} - \dfrac{152}{3} = \dfrac{-243}{2}$
- $\text{Área} = \dfrac{243}{2} = 121{,}5 \ \text{u}^2$

EJERCICIO 4 : Calcula el área del recinto limitado por la curva $y = 3(x+2)(x-4)$, las rectas $x = -2$, $x = 3$ y el eje de abscisas.

Solución:

- Puntos de corte con el eje X: $3(x+2)(x-4) = 0 \ \rightarrow \ \begin{cases} x = -2 \\ x = 4 \end{cases}$

  Entre -2 y 3 no está $x = 4$.
- $G(x) = \int 3(x+2)(x-4)\, dx = 3\int (x^2 - 2x - 8)\, dx = 3\left(\dfrac{x^3}{3} - x^2 - 8x\right) = x^3 - 3x^2 - 24x$
- $G(3) - G(-2) = -72 - 28 = -100$
- $\text{Área} = 100 \ \text{u}^2$

EJERCICIO 5 : Halla el área limitada entre la curva $y = x^3 - 2x^2 - 3x$ y el eje X.

Solución:

• Puntos de corte con el eje X: $x^3 - 2x^2 - 3x = 0 \rightarrow x(x^2 - 2x - 3) = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \dfrac{2 \pm 4}{2} \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases} \end{cases}$$

• $G(x) = \int (x^3 - 2x^2 - 3x)dx = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{2x^3}{3} - \dfrac{3x^2}{2}$

• $G(0) - G(-1) = 0 - \left(\dfrac{-7}{12}\right) = \dfrac{7}{12}$

$G(3) - G(0) = \dfrac{-45}{4} - 0 = \dfrac{-45}{4}$

• $\text{Área} = \dfrac{7}{12} + \dfrac{45}{4} = \dfrac{71}{6}\ u^2$

VOLUMEN

EJERCICIO 6 : Halla el volumen engendrado al girar la curva $y = \sqrt{x^2 + 5}$ alrededor del eje X, entre x=0 y x=3

Solución: $\text{Volumen} = \int_0^3 \pi (x^2 + 5) dx = \pi \left[\dfrac{x^3}{3} + 5x\right]_0^3 = \pi [24 - 0] = 24\pi\ u^3$

EJERCICIO 7 : Calcula el volumen del cuerpo engendrado al girar la recta 4x – 3y + 5 = 0, entre x = 0 y x = 3, alrededor del eje X.

Solución: $4x - 3y + 5 = 0 \rightarrow y = \dfrac{4x+5}{3}$

$$\text{Volumen} = \int_0^3 \pi \left(\frac{4x+5}{3}\right)^2 dx = \pi \int_0^3 \left(\frac{16x^2 + 40x + 25}{9}\right) dx = \frac{\pi}{9}\left[\frac{16x^3}{3} + 20x^2 + 25x\right]_0^3 = = \frac{\pi}{9}[399 - 0] = \frac{133\pi}{3}\ u^3$$

EJERCICIO 8 : Halla el cuerpo engendrado por la curva $y = \sqrt{x^2 + 3x}$, entre x = 1 y x = 2.al girar alrededor del eje de abscisas.

Solución: $\text{Volumen} = \int_1^2 \pi (x^2 + 3x) dx = \pi \left[\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{3x^2}{2}\right]_1^2 = \pi \left[\dfrac{26}{3} - \dfrac{11}{6}\right] = \dfrac{41\pi}{6}\ u^3$

EJERCICIO 9 : Calcula el volumen del cuerpo engendrado por la elipse $x^2 + \dfrac{y^2}{3} = 1$ al girar alrededor del eje X.

Solución:

$x^2 + \dfrac{y^2}{3} = 1 \rightarrow 3x^2 + y^2 = 3 \rightarrow y^2 = 3 - 3x^2;\ -1 \le x \le 1$

$\text{Volumen} = \int_{-1}^1 \pi [f(x)]^2 dx = \int_{-1}^1 \pi (3 - 3x^2)dx = \pi [3x - x^3]_{-1}^1 = \pi [2 - (-2)] = 4\pi\ u^3$

EJERCICIO 10 : Obtén el volumen del cuerpo engendrado al girar la parábola $y^2 = 4x$ alrededor del eje X, entre x = 0 y x = 4.

Solución: $\text{Volumen} = \int_0^4 \pi (4x) dx = \pi [2x^2]_0^4 = 32\pi\ u^3$