TEMA 10 – APLICACIONES DE LA DERIVADA

RECTA TANGENTE

<u>EJERCICIO 1</u> : Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x)=\dfrac{x^2+1}{e^x}$ en $x_0=0$.

Solución:

- Ordenada del punto: $f(0)=1$
- Pendiente de la recta: $f'(x)=\dfrac{2xe^x-\left(x^2+1\right)\cdot e^x}{(e^x)^2}=\dfrac{e^x\left(2x-x^2-1\right)}{(e^x)^2}=\dfrac{2x-x^2-1}{e^x}\Rightarrow f'(0)=-1$
- Ecuación de la recta tangente: $y-1=-1\,(x-0)\ \rightarrow\ y=-x+1$

<u>EJERCICIO 2</u> : Escribe las ecuaciones de la rectas tangentes a la curva $x^2-3y^2+2x+9=0$ en $x_0=1$.

Solución:

- Ordenadas de los puntos: $1-3y^2+2+9=0\ \rightarrow\ 12=3y^2\ \rightarrow\ 4=y^2\ \rightarrow\ \begin{cases}y=-2\\ y=2\end{cases}$

  Hay dos puntos: $(1,-2)$ y $(1,2)$
- Pendientes de las rectas: $2x-6y\cdot y'+2=0\Rightarrow y'=\dfrac{-2-2x}{-6y}\ \rightarrow\ y'=\dfrac{1+x}{3y}$

  $y'(1,-2)=\dfrac{1+1}{-6}=\dfrac{2}{-6}=\dfrac{-1}{3}$ $\qquad$ $y'(1,2)=\dfrac{1+1}{6}=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$
- Ecuaciones de las rectas tangentes:

- En $(1,-2)\ \rightarrow\ y=-2-\dfrac{1}{3}(x-1)\ \rightarrow\ y=\dfrac{-1}{3}x-\dfrac{5}{3}$

- En $(1,2)\ \rightarrow\ y=2+\dfrac{1}{3}(x-1)\ \rightarrow\ y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{5}{3}$

<u>EJERCICIO 3</u> : Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y=\dfrac{x^2(x-1)}{\sqrt{x+1}}$ en $x_0=3$.

Solución:

- Ordenada en el punto: $y(3)=9$
- Pendiente de la recta: $y=\dfrac{x^2(x-1)}{\sqrt{x+1}}=\dfrac{x^3-x^2}{\sqrt{x+1}}\Rightarrow$

$$y'=\frac{\left(3x^2-2x\right)\sqrt{x+1}-\left(x^3-x^2\right)\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}}{(x+1)}=\frac{2\left(3x^2-2x\right)(x+1)-\left(x^3-x^2\right)}{2\sqrt{(x+1)^3}}==\frac{5x^3+3x^2-4x}{2\sqrt{(x+1)^3}}\Rightarrow y'(3)=\frac{75}{8}$$

- Ecuación de la recta tangente: $y=9+\dfrac{75}{8}(x-3)\ \rightarrow\ y=\dfrac{75}{8}x-\dfrac{153}{8}$

ESTUDIO DE FUNCIONES

<u>EJERCICIO 4</u> : Halla los intervalos de crecimiento y los máximos y mínimos de la función: $f(x)=\dfrac{3x^2-9x+3}{3x-1}$

Solución:

$$f'(x)=\frac{(6x-9)\,(3x-1)-\left(3x^2-9x+3\right)3}{(3x-1)^2}=\frac{18x^2-6x-27x+9-9x^2+27x-9}{(3x-1)^2}==\frac{9x^2-6x}{(3x-1)^2}$$

$$f'(x)=0 \quad \to \quad 9x^2-6x=0 \quad \to \quad 3x(3x-2)=0 \quad \to \quad \begin{cases} 3x=0 & \to \quad x=0 \\ 3x-2=0 & \to \quad x=\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:

$f'>0$		$f'<0$		$f'>0$
↗	0	↘	$\frac{2}{3}$	↗

$f(x)$ es creciente en $(-\infty,\ 0)\cup\left(\dfrac{2}{3},\ +\infty\right)$; es decreciente en $\left(0,\ \dfrac{2}{3}\right)$. Tiene un máximo en $(0,\ -3)$ y un mínimo en $\left(\dfrac{2}{3},\ \dfrac{-5}{3}\right)$.

<u>EJERCICIO 5</u> : Halla los máximos, mínimos y puntos de inflexión de la curva: *$f(x) = 5x^2\ (x-1)^2$* Di dónde es creciente, decreciente, cóncava y convexa.

Solución:

- Primera derivada: $f'(x) = 10x\,(x-1)^2 + 5x^2 \cdot 2\,(x-1) = 10x\,(x-1)^2 + 10x^2\,(x-1) =$

$$= 10x\,(x-1)\,(x-1+x) = 10x\,(x-1)\,(2x-1) \Rightarrow \ f'(x)=0 \ \begin{cases} x=0 \\ x=1 \\ x=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:

$f'<0$		$f'>0$		$f'<0$		$f'>0$
↘	0	↗	$\frac{1}{2}$	↘	1	↗

$f(x)$ es decreciente en $(-\infty,\ 0)\cup\left(\dfrac{1}{2},\ 1\right)$; es creciente en $\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)\cup(1,\ +\infty)$. Tiene un máximo en $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{5}{16}\right)$ y dos mínimos: $(0,\ 0)$ y $(1,\ 0)$.

- Segunda derivada:

$f'(x) = 10x\,(x-1)\,(2x-1) = 20x^3 - 30x^2 + 10x$
$f''(x) = 60x^2 - 60x + 10 = 10\,(6x^2 - 6x + 1)$

$$f''(x)=0 \quad \to \quad 6x^2-6x+1=0 \quad \to \quad x=\frac{6\pm\sqrt{36-24}}{12}=\frac{6\pm\sqrt{12}}{12} \quad \to \quad \begin{cases} x\approx 0{,}21 \\ x\approx 0{,}79 \end{cases}$$

Signo de $f''(x)$:

$f''>0$		$f''<0$		$f''>0$
∪	$0{,}21$	∩	$0{,}79$	∪

$f(x)$ es cóncava en $(-\infty;\ 0{,}21) \cup (0{,}79;\ +\infty)$; es convexa en $(0{,}21;\ 0{,}79)$. Tiene dos puntos de inflexión: $(0{,}21;\ 0{,}14)$ y $(0{,}79;\ 0{,}14)$.

CÁLCULO DE PARÁMETROS

<u>EJERCICIO 6</u> : Halla los valores de a y b en la función f(x) = x^2 + ax + b sabiendo que pasa por el punto P(-2,1) y tiene un extremo relativo en el punto de abscisa x = -3

Solución:

Si pasa por el punto *(-2, 1)*⇒ *f(-2) = 1* ⇒ $(-2)^2 + a(-2) - b = 1 \Rightarrow \ -a - b = -3$

Como tiene un extremo para *x = -3* ⇒ f'(-3) = 0 ⇒ $f'(x) = 2x + a \ \Rightarrow \ 2(-3) + a = 0 \ \Rightarrow \ a = 6$

Resolviendo el sistema: Como a = 6 , b = -3

EJERCICIO 7 : Halla a, b y c en la función f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d sabiendo que el punto P(0,4) es un máximo y el punto Q(2,0) es un mínimo.

Solución:

$$\text{Máximo en P}(0,4) \Rightarrow \begin{cases} \text{Pasa por el punto } (0,4) \ \Rightarrow f(0)=4 \Rightarrow a.0^3+b.0^2+c.0+d=4 \Rightarrow d=4 \\ \text{Máximo en } x=0 \Rightarrow \begin{cases} f'(0)=0 \\ f'(x)=3ax^2+2bx+c \end{cases} \Rightarrow \ 3a.0^2+2b.0+c=0 \Rightarrow c=0 \end{cases}$$

$$\text{Mínimo en Q}(2,0) \Rightarrow \begin{cases} \text{Pasa por el punto } (2,0) \ \Rightarrow f(2)=0 \Rightarrow a.2^3+b.2^2+c.2+d=0 \Rightarrow 8a+4b+2c+d=0 \\ \text{Mínimo en } x=2 \Rightarrow \begin{cases} f'(2)=0 \\ f'(x)=3ax^2+2bx+c \end{cases} \Rightarrow \ 3a.2^2+2b.2+c=0 \Rightarrow 12a+4b+c=0 \end{cases}$$

Formando un sistema con las 4 ecuaciones obtenidas resulta:

$$\begin{cases} d=4 \\ 8a+4b+2c+d=0 \\ c=0 \\ 12a+4b+c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8a+4b=-4 \\ 12a+4b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a+b=-1 \\ 3a+b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a-b=1 \\ 3a+b=0 \end{cases} \Rightarrow \ a=1; \ b=-3$$

PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

EJERCICIO 8 : La suma de tres números positivos es 60. El primero más el doble del segundo más el triple del tercero suman 120. Halla los números que verifican estas condiciones y cuyo producto es máximo.

Solución:
Llamamos x al primer número, y al segundo y z al tercero. Así, tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=60 \quad (x,\ y,\ z>0) \\ x+2y+3z=120 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x+y=60-z \\ x+2y=120-3z \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=z \\ y=60-2z \end{array}$$

El producto de los tres números es: $P = x \cdot y \cdot z = z \cdot (60-2z) \cdot z = z^2\,(60-2z) = f(z), \ z>0$
Buscamos z para que $f(z)$ sea máximo:

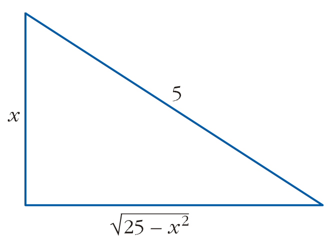
$$f'(z) = 2z\,(60-2z) + z^2 \cdot (-2) = 2z\,(60-2z-z) = 2z\,(60-3z) = 120z - 6z^2$$

$$f'(z)=0 \quad \to \quad \begin{cases} z=0 \ \ (\text{no vale, pues ha de ser } \ z>0). \\ z=20 \end{cases}$$

Veamos que en $z=20$ hay un máximo: $f''(z) = 120 - 12z$; $f''(20) = -120 < 0 \ \to$ hay un máximo
Por tanto, el producto es máximo para $x=20, \ y=20, \ z=20$.

EJERCICIO 9 : Entre todos los triángulos rectángulos de hipotenusa 5 metros, determina razonadamente el que tiene área máxima.

Solución:



$$\text{Área} = \frac{x\sqrt{25-x^2}}{2} = f(x), \quad 0<x<5$$

Buscamos x para que el área sea máxima: $f(x) = \dfrac{\sqrt{25x^2-x^4}}{2}$

$$f'(x) = \frac{50x-4x^3}{4\sqrt{25x^2-x^4}} = \frac{25x-2x^3}{2\sqrt{25x^2-x^4}} = \frac{x\left(25-2x^2\right)}{2x\sqrt{25-x^2}} = \frac{25-2x^2}{2\sqrt{25-x^2}}$$

$$f'(x)=0 \;\rightarrow\; 25-2x^2=0 \;\rightarrow\; x^2=\frac{25}{2} \;\rightarrow\; \begin{cases} x=-\dfrac{5\sqrt{2}}{2} \text{ (no vale)} \\ x=\dfrac{5\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

(Como $f'(x)>0$ a la izquierda de $x=\frac{5\sqrt{2}}{2}$ y $f'(x)<0$ a su derecha, en $x=\frac{5\sqrt{2}}{2}$ hay un máximo).

Por tanto, el área es máxima cuando los dos catetos miden $x=\frac{5\sqrt{2}}{2}$ metros.

<u>EJERCICIO 10</u> : Un móvil se desplaza según la función: $e(t)=600t+150t^3-115t^4+27t^5-2t^6$, que nos da el espacio en metros recorrido por el móvil en t minutos.
Determina a cuántos metros de la salida está el punto en el que alcanza la máxima velocidad.

Solución:
La función que nos da la velocidad es la derivada de $e(t)$:

$e'(t)=600+450t^2-460t^3+135t^4-12t^5=v(t)$

Para obtener el máximo de la velocidad, derivamos $v(t)$:

$v'(t)=900t-1\,380t^2+540t^3-60t^4=60t(15-23t+9t^2-t^3)==-60t(t-1)(t-3)(t-5)$

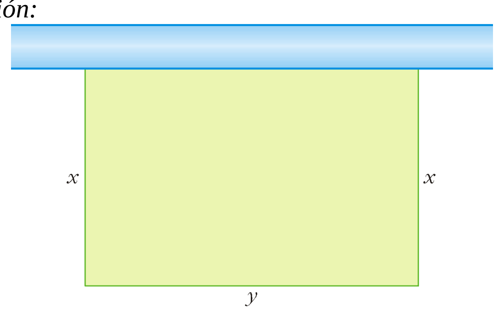
$v'(t)=0 \;\rightarrow\; t=0,\; t=1,\; t=3,\; t=5$

Obtenemos el valor de $v(t)$ en estos puntos: $v(0)=600,\; v(1)=713,\; v(3)=249,\; v(5)=1\,225$

Por tanto, la máxima velocidad se alcanza en el minuto $t=5$ y el espacio recorrido es
$e(5)=3\,000$ m.

<u>EJERCICIO 11</u> : Un granjero desea vallar un terreno rectangular de pasto adyacente a un río. El pastizal debe tener 180 000 m^2 para producir suficiente forraje para su ganado.
¿Qué dimensiones tendrá el terreno rectangular de forma que utilice la mínima cantidad de valla, si el lado que da al río no necesita ser vallado?

Solución:



$\text{Área}=xy=180\,000 \text{ m}^2 \;\rightarrow\; y=\frac{180\,000}{x}$

Cantidad de valla necesaria: $f(x)=2x+y=2x+\frac{180\,000}{x},\; x>0$

Buscamos $x>0$ que haga $f(x)$ mínima:

$$f'(x)=2-\frac{180\,000}{x^2}$$

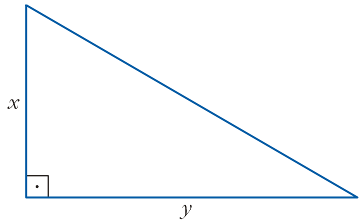
$$f'(x)=0 \;\rightarrow\; 2x^2-180\,000=0 \;\rightarrow\; x^2=90\,000 \;\rightarrow\; \begin{cases} x=-300 \text{ (no vale)} \\ x=300 \end{cases}$$

Veamos que en $x=300$ hay un mínimo: $f''(x)=\frac{360\,000}{x^3};\; f''(300)>0 \;\rightarrow\;$ hay un mínimo

Por tanto, han de ser: $x=300$ m, $y=600$ m

EJERCICIO 12 : Entre todos los triángulos rectángulos de área 5 cm^2, determina las longitudes de los lados del que tiene la hipotenusa mínima.

Solución:



$$\text{Área} = x \cdot y = 10 \quad \to \quad y = \frac{10}{x},\ \ x > 0$$

$$\text{Hipotenusa} = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + \frac{100}{x^2}}$$

Buscamos el valor de $x > 0$ que hace mínima la función: $f(x) = \sqrt{x^2 + \dfrac{100}{x^2}}$

Derivamos:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + \dfrac{100}{x^2}}} \cdot \left(2x - \frac{200}{x^3}\right)$$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad 2x - \frac{200}{x^3} = 0 \quad \to \quad 2x^4 - 200 = 0 \quad \to \quad x^4 = 100 \quad \to \to \quad x = \sqrt[4]{100} = \sqrt{10} \quad \to \quad y = \sqrt{10}$$

(Como $f'(x) < 0$ a la izquiera de $\sqrt{10}$ y $f'(x) > 0$ a su derecha, en $x = \sqrt{10}$ hay un mínimo).

Por tanto, los catetos miden $\sqrt{10}$ cm cada uno; y la hipotenusa medirá $\sqrt{20}$ cm.

CÁLCULO DE LÍMITES

EJERCICIO 13 : Calcular los siguientes límites:

$$\textbf{a)}\ \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x + \operatorname{sen} x} \qquad \textbf{b)}\ \lim_{x\to 0} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^3 + 3x^2} \qquad \textbf{c)}\ \lim_{x\to 0} \frac{2x - 2\operatorname{sen} x}{x + \operatorname{sen} x} \qquad \textbf{d)}\ \lim_{x\to 0} \frac{4 - 4\cos x}{x^2} \qquad \textbf{e)}\ \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x\cos x + \operatorname{sen} x}$$

$$\textbf{f)}\ \lim_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{x} \qquad \textbf{g)}\ \lim_{x\to 0^+} (xLx) \qquad \textbf{h)}\ \lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^2 x} \qquad \textbf{i)}\ \lim_{x\to 0} \frac{x \operatorname{sen} x}{1 - \cos x} \qquad \textbf{j)}\ \lim_{x\to 0^+} x^x \qquad \textbf{k)}\ \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \operatorname{sen} x}$$

Solución:

a) $$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x + \operatorname{sen} x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1 + \cos x} = \frac{1}{2}$$

b) $$\lim_{x\to 0} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^3 + 3x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x + x\cos x}{3x^2 + 6x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x + \cos x - x\operatorname{sen} x}{6x + 6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

c) $$\lim_{x\to 0} \frac{2x - 2\operatorname{sen} x}{x + \operatorname{sen} x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2 - 2\cos x}{1 + \cos x} = \frac{2-2}{1+1} = 0$$

d) $$\lim_{x\to 0} \frac{4 - 4\cos x}{x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{4\operatorname{sen} x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\operatorname{sen} x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2\cos x}{1} = 2$$

e) $$\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x\cos x + \operatorname{sen} x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{3x^2}{\cos x - x\operatorname{sen} x + \cos x} = \frac{0}{2} = 0$$

f) $$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{x} = \left(\frac{a^0 - b^0}{0} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{a^x.La - b^x.Lb}{1} = \lim_{x\to 0}(a^x La - b^x Lb) = a^0 La - b^0 Lb = La - Lb$$

g) $$\lim_{x\to 0^+} (xLx) = (0.\infty) = \lim_{x\to 0^+} \frac{Lx}{1/x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{-x} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0$$

h) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{sen}x}{\operatorname{sen}^2 x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{2\operatorname{sen}x.\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\operatorname{sen}2x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}x}{\cos 2x.2}=\dfrac{0}{2}=0$

i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\operatorname{sen}x}{1-\cos x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1.\operatorname{sen}x+x\cos x}{\operatorname{sen}x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x+1.\cos x+(-\operatorname{sen}x).x}{\cos x}=\dfrac{2}{1}=2$

j) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x=\lim\limits_{x\to 0^+} e^{Lnx^x}=\lim\limits_{x\to 0^+} e^{x.Lnx}=\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{Lnx}{1/x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{Lnx}{1/x}}\overset{L´H}{=}e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-1/x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}-x}=e^0=1$

k) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\operatorname{sen}x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\operatorname{sen}x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=2$

TEOREMAS DE DERIVABILIDAD

<u>EJERCICIO 14</u> : Comprueba que la función $f(x)=x^2+2x-1$ cumple las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[-3, 1]$. ¿Dónde cumple la tesis?

Solución:

- La función $f(x)=x^2+2x-1$ es continua y derivable en todo **R**; por tanto, será continua en $[-3, 1]$ y derivable en $(-3, 1)$.
- Además: $\left.\begin{cases} f(-3)=2 \\ f(1)=2 \end{cases}\right\}$ son iguales.
- Por tanto, se cumplen las hipótesis del teorema de Rolle. Así, sabemos que existe $c\in(-3, 1)$ tal que $f'(c)=0$.
- Veamos dónde se cumple la tesis: $f'(x)=2x+2 \;\rightarrow\; f'(c)=2x+2 \;\rightarrow\; c=-1\in(-3, 1)$

<u>EJERCICIO 15</u> : Calcula *m* y *n* para que la función: $f(x)=\begin{cases} 3x^2-2x+m & \text{si} \quad x\le 1 \\ nx-2 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$ cumpla las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo $[0, 2]$. ¿Dónde cumple la tesis?

Solución:

- Continuidad en $[0, 2]$:

- Si $x\ne 1$, la función es continua, pues está formada por polinomios, que son funciones continuas.
- En $x=1$: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(3x^2-2x+m\right)=1+m \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(nx-2)=n-2 \\ f(1)=1+m \end{cases}$ $\Rightarrow$ Para que sea continua en, ha de ser $1+m=n-2$

- Derivabilidad en $(0, 2)$:

- Si $x\ne 1$, la función es derivable, y su derivada es: $f'(x)=\begin{cases} 6x-2 & \text{si} \quad x<1 \\ n & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$
- Para que sea derivable en $x=1$, han de coincidir las derivadas laterales: $\left.\begin{array}{l} f'(1^-)=4 \\ f'(1^+)=n \end{array}\right\}\; n=4$

- Por tanto, $f(x)$ cumplirá las hipótesis del teorema del valor medio en $[0, 2]$ si:

$\begin{cases} 1+m=n-2 \\ n=4 \end{cases}\quad \begin{cases} m=1 \\ n=4 \end{cases}$

Este caso quedaría: $f(x)=\begin{cases} 3x^2-2x+1 & \text{si} \quad x\le 1 \\ 4x-2 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$ $\qquad f'(x)=\begin{cases} 6x-2 & \text{si} \quad x\le 1 \\ 4 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$

Veamos dónde cumple la tesis:

$f'(c)=\dfrac{f(2)-f(0)}{2-0}=\dfrac{6-1}{2}=\dfrac{5}{2}\Rightarrow f'(c)=6c-2=\dfrac{5}{2} \;\rightarrow\; c=\dfrac{3}{4}\in(0, 2) \quad (\text{si } c>1)$

<u>EJERCICIO 16</u> : Comprueba que la función: $\mathbf{f(x)=\begin{cases}-x^2+1 & \text{si} \quad x\le 2\\ -4x+5 & \text{si} \quad x>2\end{cases}}$

satisface las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo [0, 3]. ¿Dónde cumple la tesis?

Solución:

- Continuidad en [0, 3]:

- Si $x \neq 2$, la función es continua, pues está formada por polinomios, que son funciones continuas.

- En $x = 2$: $\left.\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \left(-x^2+1\right) = -3 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \left(-4x+5\right) = -3 \\ f(2) = -3 \end{cases}\right\}$ $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2)$ $f(x)$ es continua en $x = 2$.

Por tanto, $f(x)$ es continua en [0, 3].

- Derivabilidad en (0, 3):

- Si $x \neq 2$, la función es derivable, y su derivada es: $f'(x)=\begin{cases}-2x & \text{si} \quad x<2\\ -4 & \text{si} \quad x>2\end{cases}$

- En $x = 2$, como $f'(2^-) = f'(2^+) = -4$, también es derivable; y $f'(2) = -4$.

Por tanto, $f(x)$ es derivable en (0, 3).

- Se cumplen las hipótesis del teorema del valor medio en [0, 3]; por tanto, existe $c \in (0, 3)$ tal que: $f'(c)=\dfrac{f(3)-f(0)}{3-0}=\dfrac{-7-1}{3-0}=\dfrac{-8}{3}$

Veamos dónde se cumple la tesis: $-2x=\dfrac{-8}{3} \;\rightarrow\; x=\dfrac{4}{3} \;\rightarrow\; c=\dfrac{4}{3}\in(0,3)$

<u>EJERCICIO 17</u> : Calcula los valores de *a*, *b* y *c* para que la función: $\mathbf{f(x)=\begin{cases}x^2+ax & \text{si} \quad -2\le x<1\\ bx+c & \text{si} \quad 1\le x\le 2\end{cases}}$

cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [–2, 2]. ¿Qué asegura el teorema en este caso?

Solución:

- Continuidad en [–2, 2]:

- Si $x \neq 1$, la función es continua, pues está formada por polinomios, que son funciones continuas.

- En $x = 1$: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \left(x^2+ax\right) = 1+a \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \left(bx+c\right) = b+c \\ f(1) = b+c \end{cases}$ $\Rightarrow$ Para que sea continua en $x = 1$, ha de ser $1 + a = b + c$.

- Derivabilidad en (–2, 2):

- Si $x \neq 1$, la función es derivable, y su derivada es: $f'(x)=\begin{cases}2x+a & \text{si} \quad -2<x<1\\ b & \text{si} \quad 1<x<2\end{cases}$

- En $x = 1$, han de ser iguales las derivadas laterales: $\left.\begin{array}{l} f'\left(1^-\right)=2+a \\ f'\left(1^+\right)=b \end{array}\right\}$ $2+a=b$

- Además, debe ser $f(-2) = f(2)$; es decir: $4 - 2a = 2b + c$

- Uniendo las condiciones anteriores, tenemos que: $\left.\begin{array}{l} 1+a=b+c \\ 2+a=b \\ 4-2a=2b+c \end{array}\right\}$ $a=\dfrac{1}{4}$ $b=\dfrac{9}{4}$ $c=-1$

- En este caso, el teorema de Rolle asegura que existe $c \in (-2, 2)$ tal que $f'(c) = 0$.

<u>EJERCICIO 18</u> : Comprueba que la función $f(x) = 3x^2 - 6x + 7$ cumple las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo [–1, 2]. ¿Dónde cumple la tesis?

Solución:

- La función $f(x) = 3x^2 - 6x + 7$ es continua y derivable en **R**; por tanto, será continua en $[-1, 2]$ y derivable en $(-2, 1)$. Luego, cumple las hipótesis del teorema del valor medio.
- Entonces, existe $c \in (-1, 2)$ tal que: $f'(c) = \frac{f(2) - f(1)}{2-(-1)} = \frac{7-16}{2+1} = \frac{-9}{3} = -3$

Veamos cuál es el valor de c en el que se cumple la tesis: $f'(x) = 6x - 6 \rightarrow f'(c) = 6c - 6 = -3 \rightarrow 6c = 3 \Rightarrow$ $c = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. La tesis se cumple en $c = \frac{1}{2} \in (-1, 2)$

<u>EJERCICIO 19</u> : La función f: [-1,1] → R definida por $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ toma el valor en los extremos del intervalo, f(-1) = 1; f(1) = 1. Encontrar su derivada y comprobar que no se anula nunca. ¿Contradice esto el teorema de Rolle?

Solución:

1) ¿ f continua en [-1,1]?: Cierto porque f es continua en todo R

2) ¿f derivable en (-1,1)? : $f'(x) = \frac{2}{3}.\frac{1}{\sqrt[3]{x}} \Rightarrow$ Falsa porque f no se derivable en x = 0 ⇒ No es cierta

Esto no contradice el teorema de Rolle porque la segunda hipótesis no se verifica.

<u>EJERCICIO 20</u> : Calcula b para que la función $f(x) = x^3 - 4x + 3$ cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [0,b]. ¿Dónde se cumple la tesis?

Solución:

1) ¿f continua en [0,b]?: Cierto porque f es continua en todo R.

2) ¿f derivable en (0,b)?: $f'(x) = 3x^2 - 4$ cierto porque f es derivable en todo R

3) ¿f(0) = f(b)?:

$f(0) = 3$; $f(b) = b^3 - 4b + 3 = 3 \Rightarrow b^3 - 4b = 0 \Rightarrow b(b^2 - 4) = 0$

Cuyas soluciones son b = 0; b = 2; b = -2 : La única solución válida es b = 2.

¿Dónde se cumple la tesis?: $f'(x) = 3x^2 - 4$; $f'(c) = 3c^2 - 4 = 0 \Rightarrow c = 2/\sqrt{3}$

<u>EJERCICIO 21</u> : Comprueba que la función $f(x) = \begin{cases} 2x+2 & \text{si } -1/2 \le x < 1 \\ 5-(x-2)^2 & \text{si } 1 \le x \le 4 \end{cases}$ cumple las hipótesis del Teorema de Rolle. Si las cumple, averiguar dónde cumple la tesis

Solución:

1) ¿f continua en [-1/2,4]?
f continua en [-1/2,4] – {1} por composición de funciones continuas
En x = 1

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}(2x+2) = 4 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}\left[5-(x-2)^2\right] = 4 \end{cases}$$

$f(1) = 5 - (1-2)^2 = 4$
Por tanto f continua en x = 1. Por tanto f continua en [-1/2,4] y se cumple la primera hipótesis

2) ¿f derivable en (-1/2,4)?

$$f'(x)=\begin{cases} 2 \quad \text{si} \quad -1/2 \le x < 1 \\ -2x+4 \quad \text{si} \quad 1 \le x \le 4 \end{cases}$$

f derivable en (-1/2,4) – {1} por composición de funciones derivables.
En x = 1:

$$f'(1^-) = 2$$

$$f'(1^+) = -2.1 + 4 = 2$$

Las derivadas laterales son iguales, luego es derivable en *x = 1*
Por tanto es derivable en (-1/2,4) y se cumple la 2ª hipótesis.

3) ¿f (-1/2) = f(4)?

$$f(-1/2) = 2(-\frac{1}{2}) + 2 = 1$$

$$f(4) = -4^2 + 4.4 + 1 = 1$$

Como toma el mismo valor en los extremos del intervalo, se cumple la 3ª hipótesis.

Por tanto cumple las hipótesis del Teorema de Rolle.

Veamos dónde se verifica la tesis: c ∈ (-1/2,4) tal que f ´(c) = 0

$$f'(c)=\begin{cases} 2 \quad \text{si} \quad -1/2 \le c < 1 \\ -2c+4 \quad \text{si} \quad 1 \le c \le 4 \end{cases}$$

Haciendo $f'(c) = 0$, resulta:

0 = 2 que es absurdo.

0 = –2c + 4, es decir, *c = 2, porque pertenece a (-1/2,4)*

La tesis se verifica en c = 2

<u>**EJERCICIO 22**</u> **: Siendo f(x) = (x – 2)^2(x + 1), hallar un número c, en el intervalo (0,4) de modo que se verifique el teorema del valor medio.**

Solución: Como es una función polinómica, es continua y derivable en todo R, luego podemos aplicar el teorema:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \Rightarrow \frac{f(4)-f(0)}{4-0} = f'(c)$$

f(4) = (4 – 2)^2(4 + 1) = 20

f(0) = (0 – 2)^2(0 + 1) = 4

f´(x) = 2(x – 2)(x + 1) + 1. (x – 2)^2 = (x – 2)[2(x + 1) + (x – 2)] = (x – 2)3x ⇒ f´(c) = (c – 2)3c

$$\frac{20-4}{4-0} = (c-2)3c \Rightarrow 3c^2 - 6c = 4 \Rightarrow 3c^2 - 6c - 4 = 0$$

$$c = \frac{6 \pm \sqrt{36+48}}{6} = \frac{6 \pm \sqrt{84}}{6} = \frac{6 \pm 2\sqrt{21}}{6} = \begin{cases} 1 + \sqrt{21}/3 \\ 1 - \sqrt{21}/3 \end{cases}$$ *La solución válida es la 1ª porque tiene que estar entre 0 y 4*

<u>**EJERCICIO 23**</u> **: Prueba que la función $f(x)=\begin{cases} \frac{3-x^2}{2} & \text{si} \quad x<1 \\ \frac{1}{x} & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$ satisface las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo [0,2] y calcula el o los valores vaticinados por el teorema.**

Solución:
1) ¿f continua en [0,2]?

f continua en [0,2] – {1}
En x = 1

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{3-x^2}{2} = \frac{3-1^2}{2} = 1 \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x} = \frac{1}{1} = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{Por tanto f continua en } x = 1$$

$f(1) = 1/1 = 1$

f continua en [0,2] y se cumple la primera hipótesis

2) ¿f derivable en (0,2)? $f'(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 1 \\ \frac{-1}{x^2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

f derivable en (0,2) – {1} por composición de funciones derivables.
En x = 1

$f'(1^-) = -1$

$f'(1^+) = -1$

f derivable en x = 1
Por tanto derivable en (0,2) y se cumplen la segunda hipótesis
Satisface las dos hipótesis del teorema del valor medio

Tesis: Existe un $c \in (0,2)$ tal que : $\frac{f(2)-f(0)}{2-0} = f'(c)$

$f(2) = 1/2$; $f(0) = 3/2$, $f'(c) = \begin{cases} -c & \text{si } c < 1 \\ -1/c^2 & \text{si } c \geq 1 \end{cases}$

luego $\frac{1/2 - 3/2}{2-0} = \begin{cases} -c & \text{si } c < 1 \\ -1/c^2 & \text{si } c \geq 1 \end{cases}$

De la primera ecuación se obtiene: $-1/2 = -c \Rightarrow c = ½ \in (0,2) \Rightarrow$ Una solución válida c = 1/2

Y de la segunda ecuación: $-1/2 = -1/c^2 \Rightarrow c^2 = 2 \Rightarrow c = \sqrt{2} \in (0,2) \Rightarrow$ Otra solución válida $c = \sqrt{2}$

<u>EJERCICIO 24</u> : Aplica el teorema de Cauchy a las funciones $f(x) = x^2 - 2$; $g(x) = 3x^2 + x - 1$ en el intervalo [0,4]

Solución:
Las funciones son continuas y derivables por tratarse de funciones polinómica, por tanto,

$f'(x) = 2x$; $f'(c) = 2c$

$g'(x) = 6x + 1$; $g'(c) = 6c + 1$

Valores de las funciones en los extremos de los intervalos:

$f(0) = -2$; $f(4) = 14$

$g(0) = -1$; $g(4) = 51$

Entonces, $\frac{14-(-2)}{51-(-1)} = \frac{2c}{6c+1} \Rightarrow \frac{16}{52} = \frac{2c}{6c+1} \Rightarrow \frac{4}{13} = \frac{2c}{6c+1}$

es decir, $24c + 4 = 26c \Rightarrow 2c = 4 \Rightarrow c = 2 \in (0,4)$

La tesis se verifica en c = 2