TEOREMA DE ROLLE

1) Dada la función f(x) = $|x|$, comprobar qué condiciones del teorema de Rolle se verifican en el intervalo [-2,2].

2) Dada las funciones siguientes, comprueba que se verifican las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo dado. En caso afirmativo halla el valor c determinado por dicho teorema.
   a) $f(x) = x^3 - 4x + 3$ en [0,2]

   b) $f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$ en [0,1]

   c) $f(x) = \left|2x^2 - 1\right|$ en [0,1]

3) Halla a, b y c para que la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{si} \quad x < 2 \\ cx + 1 & \text{si} \quad x \ge 2 \end{cases}$ verifique las hipótesis del Teorema de Rolle en el intervalo [0,4].

4) Comprueba que se verifican las hipótesis del teorema de Rolle para la función $f(x) = x^3 - 4x$ en el intervalo [-2 , 2]. En caso afirmativo halla el valor c determinado por dicho teorema.

5) Dada las funciones siguientes, comprueba que se verifican las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo dado. En caso afirmativo halla el valor c determinado por dicho teorema
   a) $f(x) = x^2 - 4x + 1$ en [1,3]

   b) $f(x) = x^3 - x$ en [0,1]

   c) $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad 0 \le x \le 1 \\ -x + 3 & \text{si} \quad 1 < x \le 3 \end{cases}$ en el intervalo [0,3].

SOLUCIONES

1) f(x) = $|x|$,es continua en R, en particular en el intervalo [-2,2]

pero no es derivable en (-2,2), ya que $f'(0^-) = -1$ y $f'(0^+) = 1$
por tanto, no se puede aplicar el teorema de Rolle.

2) a) f(x) = $x^3 - 4x + 3$ en [0,2]
como f es polinómica, es continua en [0,2] y derivable en (0,2), veamos si se cumple la tercera hipótesis: $f(0) = 3$ y $f(2) = 8 - 8 + 3 = 3$, se puede aplicar Rolle, por tanto, podemos asegurar que existe al menos un $c \in (0,2) / f'(c) = 0$

$$f'(x) = 3x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{4}{3}} = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow c = \frac{2\sqrt{3}}{3} \in (0,2)$$

b) f(x) = $\begin{cases} x & si \quad 0 \le x < 1 \\ 0 & si \quad x = 1 \end{cases}$ esta función NO es continua en [0,1],ya que f(1) = 0 y sin embargo $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 1$, no es aplicable el teorema de Rolle.

c)f(x) = $|2x^2 - 1| \rightarrow f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1 & si\ 2x^2 - 1 \ge 0 \\ -2x^2 + 1 & si\ 2x^2 - 1 < 0 \end{cases} \rightarrow f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1 & si\ 0 \le x < \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -2x^2 + 1 & si\ \frac{1}{\sqrt{2}} \le x \le 1 \end{cases}$

$f(0) = f(1) = 1$, pero sin embargo, f no es derivable en el intervalo (0,1), ya que no es derivable en $x = \frac{1}{\sqrt{2}} \in (0,1)$

3) $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & si \quad x < 2 \\ cx + 1 & si \quad x \ge 2 \end{cases}$ cada trozo es continuo y derivable, por ser funciones polinómicas, tendrá que ser continua y derivable también en x=2 y f(0) = f(4):

Continua en x = 2: $\left.\begin{array}{l} f(2) = 2c + 1 \\ \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2}(cx + 1) = 2c + 1 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2}(x^2 + ax + b) = 4 + 2a + b \end{array}\right\} \rightarrow 2c + 1 = 4 + 2a + b$

Derivable: $f'(x) = \begin{cases} 2x + a & si\ x < 2 \\ c & si\ x > 2 \end{cases} \rightarrow f'(2^-) = f'(2^+) \Rightarrow 4 + a = c$

Y por último: $f(0) = f(4) \Rightarrow b = 4c + 1$

Sistema a resolver: $\left.\begin{array}{l} 2a + b - 2c = -3 \\ a - c = -4 \\ b - 4c = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = -3 \\ b = 5 \\ c = 1 \end{array}\right| \rightarrow f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 5 & si\ x < 2 \\ x + 1 & si\ x \ge 2 \end{cases}$

Teorema de Rolle $\rightarrow \exists c \in (0,4) / f'(c)=0$ y como $f'(c)=\begin{cases} 2c-3 & si\ x<2 \\ 1 & si\ x \geq 2 \end{cases}$

$\Rightarrow 2c-3=0 \Rightarrow c=\dfrac{3}{2} \in (0,4)$

4) f(x) = $x^3 - 4x$ es continua y derivable en R, polinómica, en particular es continua en el intervalo [-2,2] derivable en (-2,2), y por otra parte $f(-2)=0=f(2)$ por tanto, se puede aplicar el teorema de Rolle $\rightarrow \exists c \in (-2,2) / f'(c)=0 \Rightarrow f'(c)=3c^2-4=0 \rightarrow c=\pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ ambos en el intervalo pedido.

5) a) f(x) = $x^2 - 4x + 1$ es continua y derivable en R, polinómica, en particular es continua en el intervalo [1,3] derivable en (1,3), y por otra parte $f(1)=-2=f(3)$ por tanto, se puede aplicar el teorema de Rolle
$\rightarrow \exists c \in (1,3) / f'(c)=0 \Rightarrow f'(c)=2c-4=0 \rightarrow c=2 \in (1,3)$

b) f(x) = $x^3 - x$ es continua y derivable en R, polinómica, en particular es continua en el intervalo [0,1] derivable en (0,1), y por otra parte $f(0)=0=f(1)$ por tanto, se puede aplicar el teorema de Rolle
$\rightarrow \exists c \in (0,1) / f'(c)=0 \Rightarrow f'(c)=3c^2-1=0 \rightarrow c=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow c=\dfrac{1}{\sqrt{3}} \in (0,1)$

c) f(x) = $\begin{cases} 2x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ -x+3 & \text{si} \quad 1 < x \leq 3 \end{cases}$ cada trozo es continuo y derivable, por ser funciones polinómicas, tendrá que ser continua y derivable también en x=1 y f(0) = f(3):

continuidad en 1: $\left.\begin{array}{l} f(1)=2 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(2x)=2 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(-x+3)=2 \end{array}\right\}$ continua

derivabilidad en 1: $f'(x)=\begin{cases} 2 & x<1 \\ -1 & x>1 \end{cases}$ obviamente, no es derivable en 1, por lo tanto, no cumple las hipótesis del teorema de Rolle