EJEMPLOS DE REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES

1.	Representa gráficamente la función $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-1}$.

Dominio:

Dom $(f) = \mathbb{R}$ - {puntos que anulan el denominador}

$$x^2-1=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{1}=\pm 1$$

Dom $(f)=\mathbb{R}-\{-1,\ 1\}=(-\infty,-1)\cup(-1,\ 1)\cup(1,+\infty)$

Simetrías:

$f(-x)=\dfrac{(-x)^2}{(-x)^2-1}=\dfrac{x^2}{x^2-1}=f(x)\Rightarrow f(x)$ es par, es decir, simétrica respecto del eje *OY*.

Periodicidad:

Esta función no es periódica

Puntos de corte con los ejes de coordenadas:

- Con *OX*

  $$y=0\Rightarrow \frac{x^2}{x^2-1}=0\Rightarrow x^2=0\Rightarrow x=0\rightarrow(0,0)$$

- Con *OY*

  $$x=0\Rightarrow y=\frac{0^2}{0^2-1}=0\rightarrow(0,0)$$

Regiones de existencia:

- Intervalos de positividad

  $$f(x)>0\Leftrightarrow x^2-1>0\Leftrightarrow x^2>1\Leftrightarrow x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)\rightarrow(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$$

  Intervalos de negatividad

  $$f(x)<0\Leftrightarrow x^2-1<0\Leftrightarrow x^2<1\Leftrightarrow x\in(-1,1)\rightarrow(-1,1)$$

Asíntotas:

- Asíntotas verticales

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\infty \text{ con } \begin{cases}\lim\limits_{x\to 1-} f(x)=-\infty \\ \lim\limits_{x\to 1+} f(x)=+\infty\end{cases} \Rightarrow x=1 \text{ es una asíntota vertical}$$

$$\lim_{x\to -1} f(x)=\infty \text{ con } \begin{cases}\lim\limits_{x\to -1-} f(x)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to -1+} f(x)=-\infty\end{cases} \Rightarrow x=-1 \text{ es una asíntota vertical}$$

- Asíntotas horizontales

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2-1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{x^2-1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{x^2}} = 1 \Rightarrow$$

$y=1$ es una asíntota horizontal

Como consecuencia, la función no tiene asíntotas oblicuas.

<u>Puntos de discontinuidad:</u>

Por tratarse de una función racional, es continua en su dominio, esto es, presenta discontinuidades en los puntos $x=-1$ y $x=1$.

<u>Monotonía (crecimiento, decrecimiento y extremos):</u>

$$f'(x) = \frac{2x\left(x^2-1\right)-x^2(2x)}{\left(x^2-1\right)^2} = \frac{2x^3-2x^2-2x^3}{\left(x^2-1\right)^2} = \frac{-2x^2}{\left(x^2-1\right)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-2x^2}{\left(x^2-1\right)^2} = 0 \Leftrightarrow -2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

signo de f'

	$+$		$+$		$-$		$-$
		-1		0		1	

$$y = f(x)\begin{cases}\text{creciente en } (-\infty,-1)\cup(-1,0)\\ \text{decreciente en } (0,1)\cup(1,+\infty)\end{cases}$$

En $x=0$ tiene un posible extremo (máximo o mínimo)[1], luego hay que calcular la derivada segunda:

$$f''(x) = \frac{-4x\left(x^2-1\right)^2-\left(-2x^2\right)2\left(x^2-1\right)2x}{\left(x^2-1\right)^4} = \frac{6x^2+2}{\left(x^2-1\right)^3}$$

$$f''(0) = \frac{6\cdot 0^2+2}{\left(0^2-1\right)^3} = \frac{2}{-1} = -2 < 0 \Rightarrow x=0 \text{ es un máximo relativo}$$

Para hallar la coordenada *y* del máximo sustituimos $x=0$ en $f(x)$: $f(0) = \dfrac{0^2}{0^2-1} = 0$

<u>Curvatura (concavidad, convexidad y puntos de inflexión):</u>

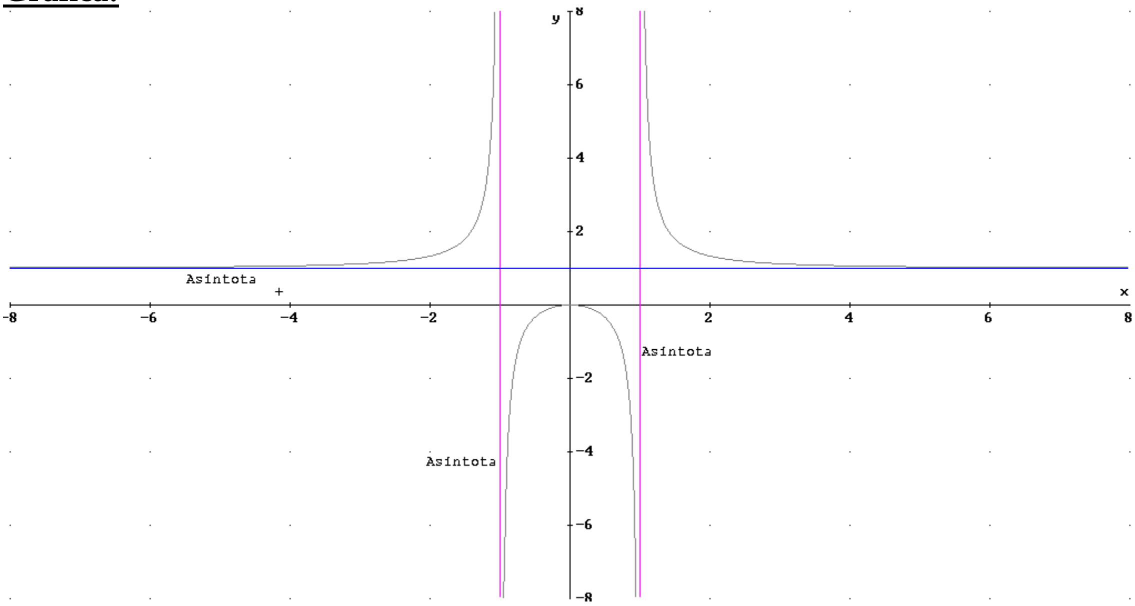
$f''(x) = \dfrac{6x^2+2}{\left(x^2-1\right)^3} = 0 \Leftrightarrow 6x^2+2=0 \Leftrightarrow 6x^2=-2 \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{-2}{6} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{-2}{6}} \notin \mathbb{R}$ y por tanto la función no tiene puntos de inflexión.

[1] En este caso sabemos que es un máximo por que la función es continua en $x=0$ y en dicho punto pasa de ser creciente a ser decreciente.

signo de f'' : $+$ $\quad -1 \quad$ $-$ $\quad 1 \quad$ $+$

$$y = f(x)\begin{cases}\text{convexa en } (-\infty, -1)\cup(1, +\infty)\\ \text{concava en } (-1, 1)\end{cases}$$

Gráfica:



2.	Representa gráficamente la función $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 9}$.

Dominio:

Dom $(f) = \mathbb{R}$ - {puntos que anulan el denominador}

$$x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$$

Dom $(f) = \text{IR} - \{-3, 3\} = (-\infty, -3)\cup(-3, 3)\cup(3, +\infty)$

Simetrías:

$f(-x) = \dfrac{(-x)}{(-x)^2 - 9} = \dfrac{-x}{x^2 - 9} \neq f(x) \Rightarrow f(x)$ no es par, es decir, no es simétrica respecto del eje *OY*.

$f(-x) = \dfrac{-x}{x^2 - 9} = -\dfrac{x}{x^2 - 9} = -f(x) \Rightarrow f(x)$ es impar, es decir, es simétrica respecto del origen de coordenadas

Periodicidad:

Esta función no es periódica

Puntos de corte con los ejes de coordenadas:

- Con *OX*

$$y = 0 \Rightarrow \frac{x}{x^2 - 9} = 0 \Rightarrow x = 0 \to (0,0)$$

- Con *OY*

$$x = 0 \Rightarrow y = \frac{0}{0^2 - 9} = 0 \to (0,0)$$

Regiones de existencia:

- Intervalos de positividad

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 - 9 > 0 \end{cases} \text{ ó } \begin{cases} x < 0 \\ x^2 - 9 < 0 \end{cases}$$

La solución del primer sistema de inecuaciones es $x \in (3,+\infty)$ y la del segundo $x \in (-3,0)$, y por tanto, la función es positiva en $(-3,0) \cup (3,+\infty)$.

- Intervalos de negatividad

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 - 9 < 0 \end{cases} \text{ ó } \begin{cases} x < 0 \\ x^2 - 9 > 0 \end{cases}$$

La solución del primer sistema de inecuaciones es $x \in (0,3)$ y la del segundo $x \in (-\infty,-3)$, y por tanto, la función es negativa en $(-\infty,-3) \cup (0,3)$.

Asíntotas:

- Asíntotas verticales

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \infty \text{ con } \begin{cases} \lim\limits_{x\to 3-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 3+} f(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow x = 3 \text{ es una asíntota vertical}$$

$$\lim_{x\to -3} f(x) = \infty \text{ con } \begin{cases} \lim\limits_{x\to -3-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to -3+} f(x) = -\infty \end{cases} \Rightarrow x = -3 \text{ es una asíntota vertical}$$

- Asíntotas horizontales

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2 - 9} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{x^2 - 9}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{9}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1 - \frac{9}{x^2}} = 0$$

$y = 0$ es una asíntota horizontal

Como consecuencia, la función no tiene asíntotas oblicuas.

Puntos de discontinuidad:

Por tratarse de una función racional, es continua en su dominio, esto es, presenta discontinuidades en los puntos $x = -3$ y $x = 3$.

Monotonía (crecimiento, decrecimiento y extremos):

$$f'(x) = \frac{1(x^2 - 9) - x(2x)}{(x^2 - 9)^2} = \frac{x^2 - 9 - 2x^2}{(x^2 - 9)^2} = \frac{-x^2 - 9}{(x^2 - 9)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2 - 9}{(x^2 - 9)^2} = 0 \Leftrightarrow -x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -9 \text{ Imposible}$$

signo de f'

$$\begin{array}{ccccc} - & & - & & - \\ \hline & -3 & & 3 & \end{array}$$

$y = f(x)$ decreciente en IR $- \{-3, 3\}$
Como consecuencia esta función no tiene ni máximos ni mínimos.

<u>Curvatura (concavidad, convexidad y puntos de inflexión):</u>

$$f''(x) = \frac{-2x(x^2-9)^2 - (-x^2-9)2(x^2-9)2x}{(x^2-9)^4} = \frac{(x^2-9)[-2x(x^2-9)-(-x^2-9)4x]}{(x^2-9)^4} =$$

$$= \frac{-2x(x^2-9)-(-x^2-9)4x}{(x^2-9)^3} = \frac{-2x^3+18x+4x^3+36x}{(x^2-9)^3} = \frac{2x^3+54x}{(x^2-9)^3}.$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^3+54x}{(x^2-9)^3} = 0 \Leftrightarrow 2x^3+54x = 0 \Leftrightarrow x(2x^2+54) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2x^2+54 = 0 \ !! \end{cases}$$

signo de f''

$$\begin{array}{ccccccc} - & & + & & - & & + \\ \hline & -3 & & 0 & & 3 & \end{array}$$

$$y = f(x) \begin{cases} \text{convexa en } (-3, 0) \cup (3, +\infty) \\ \text{concava en } (-\infty, -3) \cup (0, 3) \end{cases}$$

Como la derivada segunda sea anula en $x = 0$, en dicho punto la función puede presentar un punto de inflexión. Para ver si lo es o no, calculamos la derivada tercera:

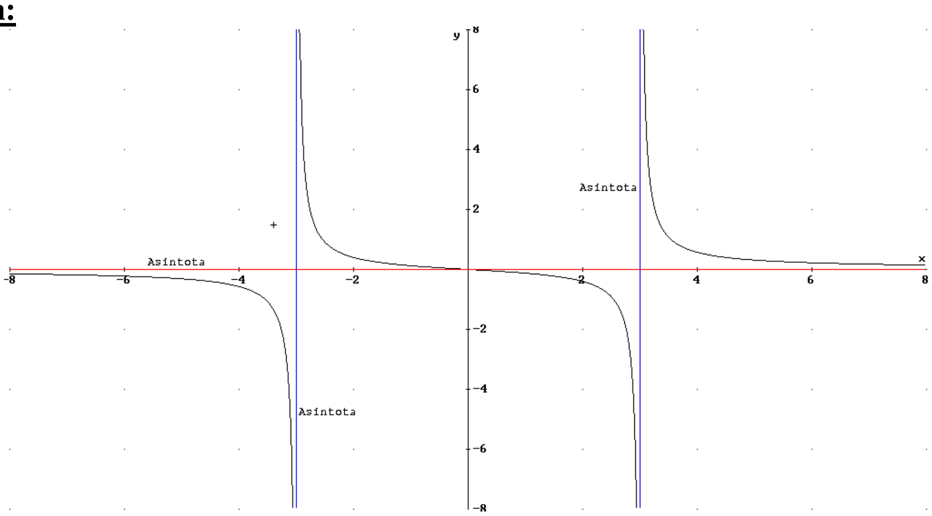
$$f'''(x) = \frac{(6x^2+54)(x^2-9)^3 - (2x^3+54x)3(x^2-9)^2\,2x}{(x^2-9)^6}$$

y evaluamos dicha derivada en cero:

$$f'''(0) = \frac{(6\cdot 0^2+54)(0^2-9)^3 - (2\cdot 0^3+54\cdot 0)3(0^2-9)^2\,2\cdot 0}{(0^2-9)^6} < 0$$

es decir, $x = 0$ es un punto de inflexión convexo-cóncavo.

<u>Gráfica:</u>



3.	Representa gráficamente la función $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x+1}$.

Dominio:

Dom $(f)=$ IR - {puntos que anulan el denominador}

$$x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$$

Dom $(f)=$ IR $-\{-1\}=(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$

Simetrías:

$f(-x)=\dfrac{(-x)^2-4}{-x+1}=\dfrac{x^2-4}{-x+1}\neq f(x)\Rightarrow f(x)$ no es par, es decir, no es simétrica respecto del eje OY.

$f(-x)=\dfrac{x^2-4}{-x+1}\neq -f(x)\Rightarrow f(x)$ no es impar, es decir, no es simétrica respecto del origen de coordenadas

Periodicidad:

Esta función no es periódica

Puntos de corte con los ejes de coordenadas:

- Con OX

  $$y=0\Rightarrow \frac{x^2-4}{x+1}=0\Leftrightarrow x^2=4\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{4}=\pm 2\rightarrow \begin{cases}(-2,0)\\(2,0)\end{cases}$$

- Con OY

  $$x=0\Rightarrow y=\frac{0^2-4}{0+1}=\frac{-4}{1}=-4\rightarrow(0,-4)$$

Regiones de existencia:

- Intervalos de positividad

  $$f(x)>0\Leftrightarrow \begin{cases}x^2-4>0\\x+1>0\end{cases}\ \text{ó}\ \begin{cases}x^2-4<0\\x+1<0\end{cases}$$

  La solución del primer sistema de inecuaciones es $x\in(2,+\infty)$ y la del segundo $x\in(-2,-1)$, y por tanto, la función es positiva en $(-2,-1)\cup(2,+\infty)$.

- Intervalos de negatividad

  $$f(x)<0\Leftrightarrow \begin{cases}x^2-4>0\\x+1<0\end{cases}\ \text{ó}\ \begin{cases}x^2-4<0\\x+1>0\end{cases}$$

  La solución del primer sistema de inecuaciones es $x\in(-\infty,-2)$ y la del segundo $x\in(-1,2)$, y por tanto, la función es negativa en $(-\infty,-2)\cup(-1,2)$.

Asíntotas:

- Asíntotas verticales

$$\lim_{x\to -1} f(x)=\infty \text{ con } \begin{cases}\lim\limits_{x\to -1-} f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to -1+} f(x)=-\infty\end{cases}\Rightarrow x=-1 \text{ es una asíntota vertical}$$

- Asíntotas horizontales

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-4}{x+1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2-4}{x^2}}{\frac{x+1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{4}{x^2}}{\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{4}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = \infty$$

$\Rightarrow f(x)$ no tiene asíntotas horizontales

- Asíntota oblicua

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2-4}{x+1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-4}{x(x+1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-4}{x^2+x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2-4}{x^2}}{\frac{x^2+x}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{4}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{4}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} = 1 \Rightarrow m = 1$$

$$n = \lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-4}{x+1}-x\right) = [\infty-\infty] = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-4-x(x+1)}{x+1}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-4-x^2-x}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{-x-4}{x+1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-x-4}{x}}{\frac{x+1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-x}{x}-\frac{4}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-1-\frac{4}{x}}{1+\frac{1}{x}} = -1 \Rightarrow n = -1$$

Por tanto la recta $y = mx + n = x - 1$ es una asíntota oblicua.

Puntos de discontinuidad:

Por tratarse de una función racional, es continua en su dominio, esto es, presenta discontinuidades en los puntos $x = -1$.

Monotonía (crecimiento, decrecimiento y extremos):

$$f'(x) = \frac{2x(x+1)-(x^2-4)\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{2x^2+2x-x^2+4}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x+4}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+2x+4}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2+2x+4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2\pm\left(\sqrt{2^2-4\cdot 1\cdot 4}\right)}{2\cdot 1} \notin \text{IR}$$

signo de f' $\qquad + \quad \Big| \quad +$

$\qquad\qquad\qquad -1$

$y = f(x)$ decreciente en IR $-\{-1\}$

Como consecuencia esta función no tiene ni máximos ni mínimos.

Curvatura (concavidad, convexidad y puntos de inflexión):

$$f''(x)=\frac{(2x+2)(x+1)^2-(x^2+2x+4)2(x+1)\cdot 1}{(x+1)^4}=\frac{(x+1)\left[(2x+2)(x+1)-(x^2+2x+4)2\right]}{(x+1)^4}=$$

$$=\frac{(2x+2)(x+1)-2(x^2+2x+4)}{(x+1)^3}=\frac{2x^2+2x+2x+2-2x^2-4x-8}{(x+1)^3}=\frac{-6}{(x+1)^3}$$

$$f''(x)=0\Leftrightarrow\frac{-6}{(x+1)^3}=0\Leftrightarrow -6=0\ \text{ Imposible}$$

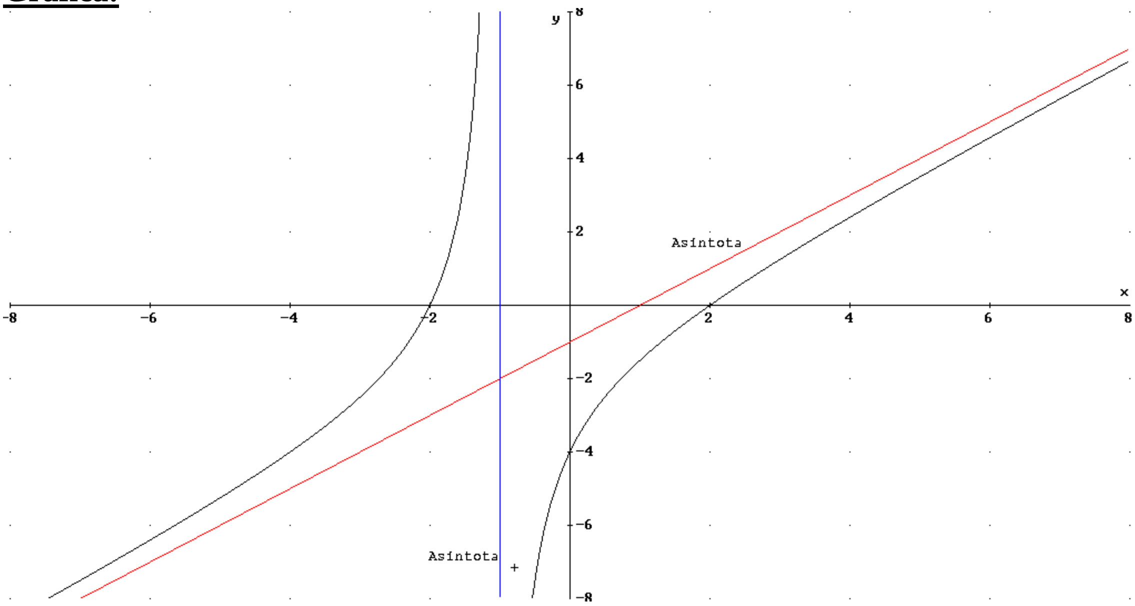
signo de f''

$$\begin{array}{ccc} + & & - \\ \hline & -1 & \end{array}$$

$$y=f(x)\begin{cases}\text{convexa en } (-\infty,-1)\\ \text{concava en } (-1,+\infty)\end{cases}$$

Como la derivada segunda no se anula, la función no tiene puntos de inflexión.

<u>Gráfica:</u>



4.	Representa gráficamente la función $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+4}$.

Dominio:

Dom (f) = IR - {puntos que anulan el denominador}

$$x^2+4=0\Leftrightarrow x^2=-4\ \text{ Imposible}$$

Dom (f) = IR

Simetrías:

$f(-x)=\dfrac{(-x)^2-1}{(-x)^2+4}=\dfrac{x^2-1}{x^2+4}=f(x)\Rightarrow f(x)$ es par, es decir, es simétrica respecto del eje *OY*.

$f(-x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+4}\neq -f(x)\Rightarrow f(x)$ no es impar, es decir, no es simétrica respecto del origen de coordenadas

Periodicidad:

Esta función no es periódica

Puntos de corte con los ejes de coordenadas:

- Con OX

  $$y=0\Rightarrow \frac{x^2-1}{x^2+4}=0\Leftrightarrow x^2-1=0\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow x=\pm 1\rightarrow \begin{cases}(-1,0)\\(1,0)\end{cases}$$

- Con OY

  $$x=0\Rightarrow y=\frac{0^2-1}{0^2+4}=-\frac{1}{4}\rightarrow\left(0,\frac{-1}{4}\right)$$

Regiones de existencia:

- Intervalos de positividad

  $$f(x)>0\Leftrightarrow \begin{cases}x^2-1>0\\x^2+4>0\end{cases}\text{ ó }\begin{cases}x^2-1<0\\x^2+4<0\end{cases}$$

  Por tanto, la función es positiva en $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

- Intervalos de negatividad

  $$f(x)<0\Leftrightarrow \begin{cases}x^2-1>0\\x^2+4<0\end{cases}\text{ ó }\begin{cases}x^2-1<0\\x^2+4>0\end{cases}$$

  Por tanto, la función es negativa en $(-1,1)$.

Asíntotas:

- Asíntotas verticales

  No tiene (ya que el denominador no se anula)

- Asíntotas horizontales

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{x^2+4}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2-1}{x^2}}{\frac{x^2+4}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{4}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{4}{x^2}}=1$$

$\Rightarrow y=1$ es una asíntota horizontal

Por tanto no hay asíntotas oblicuas.

Puntos de discontinuidad:

Por tratarse de una función racional, es continua en su dominio, luego es continua en IR.

Monotonía (crecimiento, decrecimiento y extremos):

$$f'(x)=\frac{2x(x^2+4)-(x^2-1)(2x)}{(x^2+4)^2}=\frac{2x^3+8x-2x^3+2x}{(x^2+4)^2}=\frac{10x}{(x^2+4)^2}$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow \frac{10x}{(x^2+4)^2}=0\Leftrightarrow 10x=0\Leftrightarrow x=0$$

signo de f'

$$\begin{array}{c|c} - & + \\ \hline & \\ \end{array}$$
$$0$$

$$y = f(x)\begin{cases} \text{decreciente en } (-\infty, 0) \\ \text{creciente en } (0, +\infty) \end{cases}$$

En $x = 0$ va a tener un mínimo, ya que la función es continua y en dicho punto pasa de ser creciente a ser decreciente. De todas formas lo vamos a comprobar calculando la derivada segunda:

$$f''(x) = \frac{10(x^2+4)^2 - 10x \cdot 2(x^2+4)2x}{(x^2+4)^4} = \frac{(x^2+4)\left[10(x^2+4) - 40x^2\right]}{(x^2+4)^4} = \frac{10(x^2+4) - 40x^2}{(x^2+4)^3} =$$

$$= \frac{10x^2 + 40 - 40x^2}{(x^2+4)^3} = \frac{-30x^2 + 40}{(x^2+4)^3}$$

y evaluamos dicha derivada en $x = 0$:

$$f''(0) = \frac{-30 \cdot 0^2 + 40}{(0^2+4)^3} > 0 \Rightarrow x = 0 \text{ es un mínimo}$$

Hallamos la coordenada *y* del mínimo: $f(0) = \frac{0^2 - 1}{0^2 + 4} = -\frac{1}{4} \rightarrow \text{Mínimo}\left(0, -\frac{1}{4}\right)$

Curvatura (concavidad, convexidad y puntos de inflexión):

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-30x^2 + 40}{(x^2+4)^3} = 0 \Leftrightarrow -30x^2 + 40 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{-40}{-30} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow x = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$$

signo de f''

$$\begin{array}{c|c|c} - & + & - \\ \hline -\frac{2\sqrt{3}}{3} & & \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{array}$$

$$y = f(x)\begin{cases} \text{convexa en } \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \\ \text{concava en } \left(-\infty, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, +\infty\right) \end{cases}$$

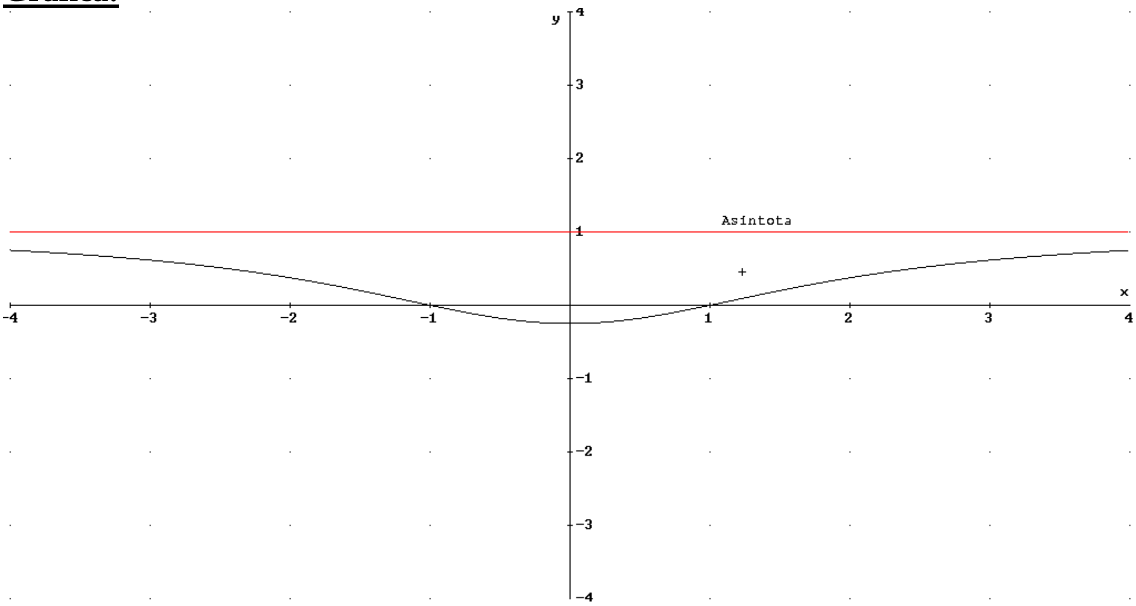
Los puntos $x = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$ y $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ son puntos de inflexión. Lo comprobamos calculando la derivada tercera y evaluando:

$$f'''(x) = \frac{-60x(x^2+4)^3 - (-30x^2+40)3(x^2+4)2x}{(x^2+4)^6}$$

$f'''\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) > 0 \Rightarrow x = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$ es un punto de inflexión cóncavo-convexo

$f'''\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) < 0 \Rightarrow x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ es un punto de inflexión convexo-cóncavo

Gráfica:



5.	Representa gráficamente la función $f(x) = \ln\sqrt{x^2+1}$.

Dominio:

El dominio de la función logaritmo es $(0,+\infty)$ y el dominio de una función radical de índice par es el conjunto de los *x* tales que el radicando es ≥ 0.

En nuestro caso, como $x^2+1>0 \quad \forall x \in \text{IR}$, se tiene que el dominio de la función *f*(*x*) es IR.

Simetrías:

$f(-x) = \ln\sqrt{(-x)^2+1} = \ln\sqrt{x^2+1} = f(x) \Rightarrow f(x)$ es par, es decir, simétrica respecto del eje *OY*.

Periodicidad:

Esta función no es periódica

Puntos de corte con los ejes de coordenadas:

- Con *OX*

  $y=0 \Rightarrow \ln\sqrt{x^2+1} = 0 \Rightarrow e^{\ln\sqrt{x^2+1}} = e^0 \Rightarrow \sqrt{x^2+1} = 1 \Rightarrow x^2+1=1 \Rightarrow x^2=0$

  $\Rightarrow x = 0 \rightarrow (0,0)$

- Con *OY*

  $x=0 \Rightarrow y = \ln\sqrt{0^2+1} = \ln 1 = 0 \rightarrow (0,0)$

Regiones de existencia:

$f(x)=0 \Leftrightarrow x=0$

signo de *f*(*x*): $\quad + \quad | \quad +$

$\qquad\qquad\qquad 0$

Así, $f(x)$ es positiva en $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

Asíntotas:
Esta función no tiene asíntotas.

Puntos de discontinuidad:
Por ser composición de funciones continuas es continua en todo su dominio.

Monotonía (crecimiento, decrecimiento y extremos):

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}-1}2x=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}\sqrt{x^2+1}}=\frac{x}{x^2+1}$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x}{x^2+1}=0 \Leftrightarrow x=0$$

signo de f' $\quad - \quad | \quad +$

$\qquad\qquad\qquad 0$

$$y=f(x)\begin{cases}\text{creciente en } (0,+\infty)\\ \text{decreciente en } (-\infty,0)\end{cases}$$

En $x=0$ tiene un posible extremo (máximo o mínimo)[2], luego hay que calcular la derivada segunda:

$$f''(x)=\frac{1\cdot\left(x^2+1\right)-x\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{x^2+1-2x^2}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{-x^2+1}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$f''(0)=\frac{-0^2+1}{\left(0^2+1\right)^2}=1>0 \Rightarrow x=0 \text{ es un mínimo}$$

Para hallar la coordenada *y* del máximo sustituimos $x=0$ en *f*(*x*): $f(0)=0$

Curvatura (concavidad, convexidad y puntos de inflexión):

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow \frac{-x^2+1}{\left(x^2+1\right)^2}=0 \Leftrightarrow -x^2+1=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1$$

signo de f'' $\quad - \quad | \quad + \quad | \quad -$

$\qquad\qquad\qquad -1 \qquad\quad 1$

$$y=f(x)\begin{cases}\text{convexa en } (-1,1)\\ \text{cóncava en } (-\infty,-1)\cup(1,+\infty)\end{cases}$$

---

[2] En este caso sabemos que es un mínimo por que la función es continua en $x=0$ y en dicho punto pasa de ser decreciente a ser creciente.

Los puntos $x = \pm 1$ son posibles puntos de inflexión. Para verlo, calculamos la derivada tercera:

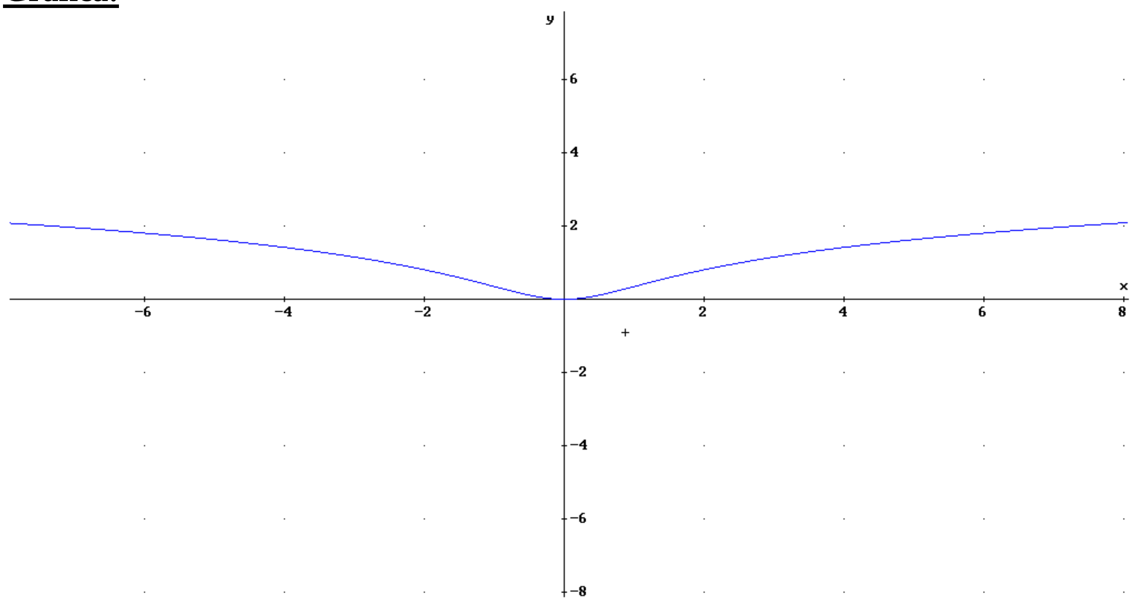
$$f'''(x) = \frac{-2x(x^2+1)^2 - (-x^2+1)2(x^2+1)2x}{(x^2+1)^4} = \frac{(x^2+1)[-2x(x^2+1) - 4x(-x^2+1)]}{(x^2+1)^4} =$$

$$= \frac{-2x(x^2+1) - 4x(-x^2+1)}{(x^2+1)^3} = \frac{-2x^3 - 2x + 4x^3 - 4x}{(x^2+1)^3} = \frac{x^3 - 6x}{(x^2+1)^3}$$

$f'''(-1) > 0 \Rightarrow x = -1$ es un punto de inflexión convexo-cóncavo $\rightarrow (-1, 0.35)$

$f'''(1) < 0 \Rightarrow x = 1$ es un punto de inflexión cóncavo-convexo $\rightarrow (1, 0.35)$

Gráfica:



6.	Representa gráficamente la función $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$.

Dominio:

$Dom(f) = \mathrm{IR} - \{1\}$

$x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Simetrías:

$f(-x) = \dfrac{(-x)^2}{-x-1} = \dfrac{x^2}{-x-1} \neq f(x) \Rightarrow f(x)$ no es par, es decir, no es simétrica respecto del eje *OY*.

$f(-x) \neq -\dfrac{x^2}{x-1} = -f(x) \Rightarrow f(x)$ no es impar, es decir, no es simétrica respecto del origen de coordenadas.

Periodicidad:

Esta función no es periódica

Puntos de corte con los ejes de coordenadas:

- Con *OX*

$$y=0 \Rightarrow \frac{x^2}{x-1}=0 \Leftrightarrow x^2=0 \Leftrightarrow x=0 \rightarrow (0,0)$$

- Con OY

$$x=0 \Rightarrow f(0)=\frac{0^2}{0-1}=0 \rightarrow (0,0)$$

Regiones de existencia:

$f(x)=0 \Leftrightarrow x=0$

signo de $f(x)$:

	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
signo de $f(x)$	$-$		$-$		$+$

Así, $f(x)$ es $\begin{cases}\text{positiva en } (1,+\infty) \\ \text{negativa en } (-\infty,0)\cup(0,1)\end{cases}$

Puntos de discontinuidad:

Es continua en todo su dominio.

Asíntotas:

- Asíntotas verticales

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2}{x-1}=\left[\frac{1}{0}\right]=\infty \text{ con } \begin{cases}\lim\limits_{x\to 1-} f(x)=-\infty \\ \lim\limits_{x\to 1+} f(x)=+\infty\end{cases}$$

Por tanto, la recta $x=1$ es una asíntota vertical.

- Asíntotas horizontales

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x-1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{x-1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{x}{x^2}-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}=\infty$$

Es decir, esta función no tiene asíntotas horizontales.

- Asíntotas oblicuas

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x-1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x(x-1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x-1}=1 \Rightarrow m=1$$

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x-1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-x(x-1)}{x-1}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x^2+x}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x-1}=1 \Rightarrow n=1$$

Así, la recta $y=x+1$ es una asíntota oblicua.

Monotonía (crecimiento, decrecimiento y extremos):

$$f'(x)=\frac{2x(x-1)-x^2\cdot 1}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-2x-x^2}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}=0 \Leftrightarrow x^2-2x=0 \Leftrightarrow x(x-2)=0 \Leftrightarrow \begin{cases}x=0 \\ x-2=0 \Leftrightarrow x=2\end{cases}$$

signo de f'	$+$	0	$-$	1	$-$	2	$+$

$$y = f(x)\begin{cases}\text{creciente en } (-\infty,0)\cup(2,+\infty)\\ \text{decreciente en } (0,1)\cup(1,2)\end{cases}$$

En $x = 0$ y $x = 2$ tiene posibles extremos (máximo o mínimo), luego hay que calcular la derivada segunda:

$$f''(x) = \frac{(2x-2)(x-1)^2-(x^2-2x)2\,(x-1)\cdot 1}{(x-1)^3} = \frac{(2x-2)(x-1)-2(x^2-2x)}{(x-1)^3} =$$

$$= \frac{2x^2-2x-2x+2-2x^2+4x}{(x-1)^3} = \frac{2}{(x-1)^3}$$

$$f''(0) < 0 \Rightarrow x = 0 \text{ es un máximo } \rightarrow (0,0)$$

$$f''(0) > 0 \Rightarrow x = 2 \text{ es un mínimo } \rightarrow \left(2,\frac{4}{3}\right)$$

<u>Curvatura (concavidad, convexidad y puntos de inflexión):</u>

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{(x-1)^3} = 0 \text{ Absurdo}$$

signo de f''	$-$	1	$+$

$$y = f(x)\begin{cases}\text{convexa en } (1,+\infty)\\ \text{cóncava en } (-\infty,1)\end{cases}$$

Esta función no tiene puntos de inflexión.

<u>Gráfica:</u>