

# LÍMITES Y CONTINUIDAD

## Límites

1. Halla, si existe, el límite de las siguientes funciones cuando  $x$  tiende a cero:

a)  $f(x) = \frac{|x| - x}{2}$

b)  $f(x) = \frac{x^2 + |x|}{x}$

2. Calcula los siguientes límites, resolviendo la correspondiente indeterminación, cuando ésta se presente:

a)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+5}{x-3}$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 + 5} - (x+2)]$

c)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 - 8}{x^2 + x - 2}$

d)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{\sqrt{x^4 - 2}}$

e)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^4 + 2x^2 - 5}{4x^4 - 7}$

f)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2 + 3}{x^2 - 1} \right)^{2x}$

3. Calcula los siguientes límites:

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 + 6x - 9}{x - 3}$

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x + 6}{x^2 + 3x + 2}$

d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + 6x - 3}{2x^2 + 5x}$

e)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 1}{x^2 + 1}$

f)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2 - x + 3}{x^2 - 5x + 4}$

g)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$

h)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2})$

i)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x + 6}{x^3 + 3x^2 + 2x}$

j)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x)$

k)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4x + 4}$

l)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x} - \sqrt{2x^2 + 1})$

m)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$

n)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{5x+1}{5x-1} \right)^{3x+2}$

o)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{4-x}}{x}$

p)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x^3 + 1}{x^2 + 1} \right)^{\frac{3}{x-1}}$

q)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}$

r)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2} \right)^{\frac{x^2+1}{x-1}}$

4. Calcula los siguientes límites:

a)  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{x^2 - 4}{x+1} \cdot \frac{x^2 + 4}{x^2 - 2x} \right)$

b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x+2}{x-1} - \frac{x+5}{x^2-1} \right)$

c)  $\lim_{x \rightarrow 2} (x-1)^{\frac{3}{x-2}}$

d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3x^2 - 5}{3x^2 + x} \right)^{x^2-1}$

$$e) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 - 5} - (2x - 3))$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{2x-4}}{x-2}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2 - 2}{x^2 - 2x + 1}$$

$$h) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x+3} - 3}$$

$$i) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}+1}$$

$$j) \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x^2 + 4}{x + 4} \right)^{\frac{x}{x-1}}$$

$$k) \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1+x}{2+x} \right)^{\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}}$$

$$l) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2+5} - 3}{\sqrt{x+7} - 3}$$

5. Calcula los siguientes límites, resolviendo la correspondiente indeterminación, cuando ésta se presente:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{x^2 + 5}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 4x - 6}{3 - \sqrt{x+6}}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 1}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 3x^2 - x - 3}{2x^2 - 2x - 4}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x^2 + 1}{x^2 + x} \right)^{\sqrt{x^2+1} - x}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x-1}{(x-2)^2}$$

$$h) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}}{x}$$

$$i) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2 - x + 6}{x(x-2)^2}$$

$$j) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} (\sqrt{x+2} - \sqrt{x})$$

$$k) \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{x+2}{x-2} - \frac{6x+4}{x^2-4} \right)$$

$$l) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + \sqrt{x+2}}{x+1}$$

$$m) \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x+3}{x-1} \cdot \frac{x^2+x-2}{x^2-3} \right)$$

$$n) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - \sqrt{x+1}}$$

$$o) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \left( \frac{2x+1}{2x+2} \right)^{\frac{2x-1}{\sqrt{2x-1}}}$$

$$p) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - \sqrt{x}}$$

### Asíntotas

6. Determina, si existen, las asíntotas de cada una de las siguientes funciones:

$$a) f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$$

$$b) g(x) = \frac{x^2}{x+2}$$

$$c) h(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$$

$$d) i(x) = \frac{2x^3 - 4x^2}{2x^2 - 1}$$

$$e) j(x) = \frac{2x^3 + 3}{x^3 - 9x}$$

$$f) k(x) = \frac{x^3 + x^2 - 2}{x^2 - 3x - 4}$$

### Continuidad

7. Estudia la continuidad de esta función según los valores de  $a$ .

$$f(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 - ax + 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

8. Calcula  $a$  y  $b$  para que sea continua la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & \text{si } x \leq -1 \\ b & \text{si } -1 < x < 3 \\ 2x + 4 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

9. Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3 & \text{si } x \leq -1 \\ bx + a & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ x^2 - b & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Halla  $a$  y  $b$  para que sea continua en  $\mathbb{R}$ .

10. Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} a - x^2 & \text{si } -2 \leq x \leq 0 \\ e^x - a & \text{si } 0 < x < 2 \end{cases}$$

Halla el valor de  $a$  para que la función sea continua en  $[-2, 2]$ .

11. Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 5 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 + k & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Determina  $k$  para que  $f(x)$  sea continua en  $x = 1$ .

12. Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{si } 0 < x < 1 \\ ax^2 + b & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Determina los valores de  $a$  y  $b$  para que  $f(x)$  sea continua y  $f(2) = 3$ .

13. Calcula  $a$  y  $b$  para que  $f(x)$  sea continua en  $x = 0$  y en  $x = 1$ :

$$f(x) = \begin{cases} e^x + a & \text{si } x \leq 0 \\ ax^2 + 2 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ \frac{b}{2x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

14. Calcula el valor de  $k$  para que la función  $f(x)$  sea continua:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ k & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

15. Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} |x+2| & \text{si } x < -1 \\ x^2 & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ 2x+1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad \text{b) } g(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x-1}}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ k & \text{si } x = 1 \end{cases}$$