

## TEMAS 6 Y 7 – GEOMETRÍA EN EL ESPACIO

### ECUACIONES DE RECTAS Y PLANOS

**EJERCICIO 1** : Escribe la ecuación del plano que contiene a la recta  $r : \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y - z = 2 \end{cases}$  y es paralelo a

$$s : \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{1}.$$

*Solución:* Para hallar la ecuación de un plano, necesitamos un punto y dos vectores:  $P_s, \vec{v}_r, \vec{v}_s$   
- Pasamos la recta  $r$  a paramétricas para hallar un punto y un vector de  $r$ :

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right) \approx \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} x - y + z = 1 \\ y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = \alpha \\ y = \alpha \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_r = (1,0,0) \\ v_r = (0,1,1) \end{cases}$$

- Hallamos el vector director de  $s$ :  $\vec{v}_s(3,2,1)$

- Ecuación del plano: 
$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -(x-1) + 3y - 3z = 0 \Rightarrow -x + 3y - 3z + 1 = 0$$

**EJERCICIO 2** : Halla la ecuación del plano que contiene a estas rectas:  $r : \begin{cases} x + y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$   $s : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -2\lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$

*Solución:* Hallamos un vector y un punto de cada recta, para ello pasamos  $r$  a paramétricas:

Recta  $r$ :  $\begin{cases} x = 1 - \alpha \\ y = \alpha \\ z = 2 \end{cases}$   $P_r(1,0,2)$   $\vec{v}_r(-1,1,0)$

Recta  $s$ :  $P_s(1,0,2)$   $\vec{v}_s(1,-2,1)$

Como no son paralelas tomamos un punto:  $P_r(1,0,2)$  y los dos vectores  $\vec{v}_r(-1,1,0)$ ,  $\vec{v}_s(1,-2,1)$

La ecuación del plano es: 
$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z-2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (x-1) + y + (z-2) = 0 \Rightarrow x + y + z - 3 = 0$$

**EJERCICIO 3** : Escribe la ecuación del plano,  $\pi$ , que contiene al punto  $P(3, 0,-2)$  y a la recta

$$r : \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

*Solución:* Necesitamos un punto y dos vectores:  $P, v_r, PP_r$

Recta  $r$ :  $P_r(3,1,1)$   $\vec{v}_r(2,-1,1)$

Plano:  $P(3,0,-2)$ ,  $\vec{v}_r(2,-1,1)$ ,  $\vec{PP}_r(0,1,3) \Rightarrow \begin{vmatrix} x-3 & y & z+2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -4(x-3) - 6y + 2(z+2) = 0 \Rightarrow$

$$-4x - 6y + 2z + 16 = 0 \Rightarrow 2x + 3y - z - 8 = 0$$

**EJERCICIO 4 :** Halla la ecuación del plano,  $\pi$ , que contiene a la recta  $r : \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+1}{0}$  y es

$$\text{paralelo a } s : \begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = 3 \end{cases}$$

*Solución:* Necesitamos un punto y dos vectores:  $P_r(1, -2, -1)$ ,  $\vec{v}_r(2, 3, 0)$ ,  $\vec{PP}_{rs}(-1, 2, 0)$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z+1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 7(z+1) = 0 \Rightarrow z+1 = 0$$

**EJERCICIO 5 :** Determina la ecuación del plano que contiene a la recta  $r : \begin{cases} 3x + y - 4z + 1 = 0 \\ -2x - y + z + 1 = 0 \end{cases}$  y es

ortogonal al plano  $\pi : 5x - 2y + 4z - 2 = 0$ .

*Solución:* Necesitamos un punto y dos vectores:  $P_r$ ,  $\vec{v}_r$ ,  $\vec{n}_\pi$

Pasamos la recta  $r$  a paramétricas:  $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & | & -1 \\ -1 & -2 & 1 & | & -1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & | & -1 \\ 0 & 1 & -3 & | & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y + 3x - 4z = -1 \\ x - 3z = -2 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 3\alpha - 2 \\ y = 5 - 5\alpha \\ z = \alpha \end{cases} \quad P_r(-2, 5, 0) \quad \vec{v}_r(3, -5, 1)$$

$$\text{La ecuación del plano es: } \begin{vmatrix} x+2 & y-5 & z \\ 3 & -5 & 1 \\ 5 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -18(x+2) - 7(y-5) + 19z = 0 \Rightarrow -18x - 7y + 19z - 1 = 0$$

## POSICIÓN RELATIVA

**EJERCICIO 6 :** Dados las rectas:  $r : \begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$ ;  $s : \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{1}$ ;

y el plano  $\pi : 2x - 3y + 2 = 0$ ; halla la posición relativa entre: a)  $r$  y  $s$       b)  $r$  y  $\pi$

*Solución:*

a) Ponemos las dos rectas en paramétricas y resolvemos el sistema:

$$r : \begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}; \quad s : \begin{cases} x = -1 + 3\alpha \\ y = 1 + 2\alpha \\ z = -2 + \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2\lambda + 3\alpha = -4 \\ \lambda - 2\alpha = 0 \\ \lambda - \alpha = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & | & -1 \\ 1 & -2 & | & 0 \\ -2 & 3 & | & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & | & -1 \\ 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & | & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & | & -1 \\ 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & | & -1 \end{pmatrix}$$

Rango  $A = 2 \neq$  Rango  $A' = 3 \Rightarrow$  Sistema Incompatible  $\Rightarrow$  No tiene solución (Paralelas o se cruzan)

Hallamos los vectores directores:  $\vec{v}_r = (-2, 1, 1)$ ,  $\vec{v}_s = (3, 2, 1) \Rightarrow$  Los vectores no son paralelos porque no son proporcionales  $\Rightarrow$  Las rectas no son paralelas, por tanto, SE CRUZAN.

b) Como la recta ya está en paramétricas, resolvemos el sistema:

$2(3 - 2\lambda) - 3(1 + \lambda) + 2 = 0 \Rightarrow 5 - 7\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 5/7 \Rightarrow$  Sistema compatible determinado  $\Rightarrow$  Existe una única solución  $\Rightarrow$  SE CORTAN EN UN PUNTO.

**EJERCICIO 7 :** Estudia, según los valores del parámetro  $a$ , la posición relativa de las rectas  $r$  y  $s$ :

$$r : \frac{x-a}{-1} = \frac{y-2}{a^3} = \frac{z-a}{a-1} \quad \text{y} \quad s : \begin{cases} x = (a+2)\lambda \\ y = 1 \\ z = a \end{cases} \quad \text{y obtén, si fuese posible, sus puntos de corte.}$$

**Solución:**

Pasamos las ecuaciones a paramétricas y resolvemos el sistema:

$$r: \begin{cases} x = a - \alpha \\ y = 2 + a^3\alpha \\ z = a + (a-1)\alpha \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = (a+2)\lambda \\ y = 1 \\ z = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - \alpha = (a+2)\lambda \\ 2 + a^3\alpha = 1 \\ a + (a-1)\alpha = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - \alpha = (a+2)\lambda \\ a^3\alpha = -1 \\ (a-1)\alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} -1 & -a-2 & -a \\ a^3 & 0 & -1 \\ a-1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} a+2 & 1 & a \\ 0 & a^3 & -1 \\ 0 & a-1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{a \neq 0} \left( \begin{array}{cc|c} a+2 & 1 & a \\ 0 & a^3 & -1 \\ 0 & 0 & -a+1 \end{array} \right)$$

Igualamos los elementos de la diagonal, por separado a cero:  $a = -2, a = 0, a = 1 \Rightarrow$  Cuatro casos

Caso I:  $a = -2 \Rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 0 & 1 & -2 \\ 0 & -8 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{array} \right) \Rightarrow$  Sistema incompatible  $\Rightarrow$  Paralelas o se cruzan

$\vec{v}_r = (-1, -8, 3), \vec{v}_s = (0, 0, 0)$  s no es una recta sino un punto.

Caso II:  $a = 0 \Rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow$  Sistema incompatible  $\Rightarrow$  Paralelas o se cruzan

$\vec{v}_r = (-1, 0, -1), \vec{v}_s = (2, 0, 0)$  No son paralelos  $\Rightarrow$  SE CRUZAN

Caso III:  $a = 1 \Rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow$  Sistema compatible determinado.  $\alpha = -1, \lambda = 2/3 \Rightarrow$  SE CORTAN

EN UN PUNTO (2,1,1)

Caso IV:  $a \in \mathbb{R} - \{0, 1, -2\}$  Sistema incompatible  $\Rightarrow$  Paralelas o se cruzan:

$\vec{v}_r(-1, a^3, a-1) \quad \vec{v}_s(a+2, 0, 0) \quad \frac{-1}{a+2} = \frac{a^3}{0} = \frac{a-1}{0} \Rightarrow (a-1)(a+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -2 \end{cases}$  No puede ser  $\Rightarrow$  SE

CRUZAN

**SOLUCIÓN**

Si  $a = -2$ . s no es una recta sino un punto

Si  $a = 1$ : Se cortan en el punto (2,1,1)

Si  $a \in \mathbb{R} - \{1, -2\}$  Se cruzan

**EJERCICIO 8** : Calcula el valor de  $a$  para que las rectas:  $r: \begin{cases} 2x + z = a \\ y = 1 \end{cases}$  y  $s: \begin{cases} -x + 2y + 2z = 5 \\ x + y = a \end{cases}$

se corten en un punto, y halla el punto de corte.

**Solución:**

Pasamos la rectas a paramétricas

$$r \equiv \begin{cases} x = \alpha \\ y = 1 \\ z = a - 2\alpha \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} x = a - \beta \\ y = \beta \\ z = \frac{5 + a - 3\beta}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha + \beta = a \\ \beta = 1 \\ 4\alpha - 3\beta = a - 5 \end{cases}$$

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & a-5 \end{array} \right) \approx \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & -3a-5 \end{array} \right) \approx \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3a+2 \end{array} \right)$$

Igualamos, por separado, los elementos de la diagonal a cero:  $-3a + 2 = 0 \Rightarrow a = 2/3 \Rightarrow$  Dos casos

Caso I : Si  $a = 2/3 \Rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2/3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$  Sistema compatible determinado. Existe una única solución  $\Rightarrow$

$\beta = 1, \alpha = -1/3 \Rightarrow$  SE CORTAN EN UN PUNTO  $P(-1/3, 1, 4/3)$

Caso II : Si  $a \neq 2/3 \Rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & * \end{array} \right) \Rightarrow$  Sistema Incompatible  $\Rightarrow$  Paralelas o se cruzan

**EJERCICIO 9** : Estudia la posición relativa de estas rectas:  $r : \begin{cases} x = 1 - 3\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = -1 + 4\lambda \end{cases} \quad s : \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{4}$

*Solución:*

Pasamos las rectas a paramétricas y resolvemos el sistema:

$$r : \begin{cases} x = 1 - 3\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = -1 + 4\lambda \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = -1 + 3\alpha \\ y = 2 + \alpha \\ z = 4\alpha \end{cases} \Rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} -3 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & -4 & 1 \end{array} \right) \approx \left( \begin{array}{cc|c} -3 & -3 & -2 \\ 0 & -9 & 2 \\ 0 & 0 & -5 \end{array} \right) \Rightarrow \text{Sistema Incompatible. No existe}$$

solución  $\Rightarrow$  Paralelas o se cruzan

Hallamos los vectores directores:  $\vec{v}_r(-3, 2, 4) \quad \vec{v}_s(3, 1, 4)$  No son paralelos  $\Rightarrow$  SE CRUZAN

### **EJERCICIO 10**

a) Calcula el valor de  $m$  para que las siguientes rectas sean coplanarias:

$$r : \begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = m + \lambda \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases} \quad s : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{3}$$

b) ¿Cuál será la posición relativa de  $r$  y  $s$  para ese valor de  $m$ ?

*Solución:*

a) Para que sean coplanarias no se deben cruzar. Estudiamos su posición relativa (pasamos  $s$  a paramétricas y resolvemos el sistema)

$$r : \begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = m + \lambda \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = -\alpha \\ z = -2 + 3\alpha \end{cases} \Rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -m \\ 2 & -3 & -4 \end{array} \right) \approx \left( \begin{array}{cc|c} -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -m-2 \\ 0 & -5 & -8 \end{array} \right) \approx \left( \begin{array}{cc|c} -1 & -1 & -2 \\ 0 & -5 & -8 \\ 0 & 0 & -m-2 \end{array} \right)$$

Igualamos, por separado, los elementos de la diagonal a cero:  $-m - 2 = 0 \Rightarrow m = -2$

Caso I :  $m = -2 \Rightarrow$  Sistema compatible determinado. Existe una solución. Se cortan en un punto.

Caso II :  $m \neq -2 \Rightarrow$  Sistema incompatible  $\Rightarrow$  Paralelas o se cruzan.

Hallamos los vectores directores:  $\vec{v}_r(-1, 1, 2) \quad \vec{v}_s(1, -1, 3)$  No paralelos  $\Rightarrow$  Se cruzan

Por tanto:  $m = -2$

b) Para  $m = -2 \Rightarrow$  Las rectas se cortan en un punto  $\Rightarrow$  SECANTES

### **EJERCICIO 11**

a) Halla los valores de  $m$  y  $n$  para que los siguientes planos sean paralelos:

$$\pi_1: 2x - y + z - 5 = 0 \quad \text{y} \quad \pi_2: mx + ny + 2z + 3 = 0$$

b) Obtén la ecuación de un plano paralelo a  $\pi_1$  que pase por el punto  $A(3, -2, 1)$ .

*Solución:*

a) Si  $\pi_1$  y  $\pi_2$  han de ser paralelos, se tiene que:  $\frac{m}{2} = \frac{n}{-1} = \frac{2}{1} \rightarrow m = 4, n = -2$

b) El plano buscado ha de ser de la forma:  $2x - y + z + D = 0$

Si contiene al punto  $A$ , debe verificarse:  $2 \cdot 3 - (-2) + 1 + D = 0 \Rightarrow D = -9 \Rightarrow 2x - y + z - 9 = 0$

**EJERCICIO 12 :** Determina, en función de  $a$ , la posición relativa de los siguientes planos:

$$\left. \begin{array}{l} (a-2)x + y - z = -1 \\ -ax + (2a-1)y + (-a+2)z = a \\ -x + ay + z = a \end{array} \right\}$$

*Solución:*

Estudiamos la posición relativa resolviendo el sistema (por determinantes)

$$\begin{vmatrix} a-2 & 1 & -1 \\ -a & 2a-1 & -a+2 \\ -1 & a & 1 \end{vmatrix} = a^3 - a^2 - a + 1 = (a-1)^2 \cdot (a+1) = 0 \Rightarrow a = 1, a = -1 \Rightarrow 3 \text{ casos}$$

$$\text{CASO I: } a = 1: \left. \begin{array}{l} -x + y - z = 1 \\ -x + y + z = 1 \\ -x + y + z = 1 \end{array} \right\} \text{ Tenemos dos planos coincidentes (2}^{\text{O}} \text{ y 3}^{\text{O}}) \text{ y el otro (1}^{\text{O}}) \text{ los corta.}$$

$$\text{CASO II: } a = -1: \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(2^{\text{a}}) + 3 \cdot (1^{\text{a}}) \\ (3^{\text{a}}) + (1^{\text{a}})}} \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 & -1 \\ -8 & 0 & 0 & -4 \\ -4 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Los tres planos se cortan en una recta.

CASO III:  $a \neq 1$  y  $a \neq -1$ :  $|A| \neq 0 \Rightarrow$  los tres planos se cortan en un punto.

**EJERCICIO 13 :** Dados los planos:  $\pi: 4x + my + mz = 6$  y  $\sigma: mx + y + z + 3 = 0$  estudia su posición relativa según los valores de  $m$ .

*Solución:*

$$\text{Las ecuaciones de los planos son: } \left. \begin{array}{l} 4x + my + mz = 6 \\ mx + y + z = -3 \end{array} \right\}$$

- Los coeficientes de las incógnitas son proporcionales si  $m = 2$ .

$$\text{En tal caso, las ecuaciones son: } \left. \begin{array}{l} 4x + 2y + 2z = 6 \\ 2x + y + z = -3 \end{array} \right\}$$

Los planos son paralelos, pues sus términos independientes no siguen la misma relación de proporcionalidad que los coeficientes de las incógnitas.

- Si  $m \neq 2$ , los planos se cortan en una recta, pues el sistema es compatible indeterminado de rango 2.

**EJERCICIO 14 :** Halla la posición relativa de los siguientes planos según el valor del parámetro  $a$ :

$$\pi_1: \left. \begin{array}{l} x = 3 - \lambda + 2\mu \\ y = \lambda - \mu \\ z = 1 + 2\mu \end{array} \right\} \quad \pi_2: 4x + ay - 2z = 5$$

*Solución:*

$$\pi_1, \text{ expresado de forma implícita, es: } \begin{vmatrix} x-3 & y & z-1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x + 2y - z = 5$$

$$\text{Así, tenemos el sistema: } \left. \begin{array}{l} 2x + 2y - z = 5 \\ 4x + ay - 2z = 5 \end{array} \right\}$$

- Los coeficientes de las incógnitas son proporcionales si  $a = 4$ .

En tal caso, los planos son paralelos, pues sus términos independientes no siguen la misma relación de proporcionalidad que los coeficientes de las incógnitas.

- Si  $a \neq 4$ , los planos se cortan en una recta, pues el sistema es compatible indeterminado de rango 2.

**ÁNGULOS****EJERCICIO 15 :**

Dados las rectas  $r : \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 3 - 3\lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}$ ,  $s : \begin{cases} 3x - 2y - z = 0 \\ 4x + y + 3z - 1 = 0 \end{cases}$  y el plano  $\pi : 4x + y + z - 3 = 0$ ;

calcula el ángulo que forman:

a)  $r$  y  $s$

b)  $s$  y  $\pi$

Solución:

a) Hallamos el vector director de  $s$ :  $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -2 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (-5, -13, 11)$

a)  $\cos \alpha = \frac{v_r \cdot v_s}{|v_r| \cdot |v_s|} = \frac{(1, -3, 2) \cdot (-5, -13, 11)}{\sqrt{1+9+4} \cdot \sqrt{25+169+121}} = \frac{-5+39+22}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{315}} = \frac{56}{\sqrt{4410}} \approx 0,843 \rightarrow \alpha = 32^\circ 30' 45''$

b)  $\sin \alpha = \frac{|v_s \cdot \vec{n}_\pi|}{|v_s| \cdot |\vec{n}_\pi|} = \frac{|(-5, -13, 11) \cdot (4, 1, 1)|}{\sqrt{25+169+121} \sqrt{16+1+1}} = \frac{|-20-13+11|}{\sqrt{315} \cdot \sqrt{18}} = \frac{22}{\sqrt{5670}} \approx 0,292 \rightarrow \alpha = 16^\circ 59' 16''$

**EJERCICIO 16 :** Considera los planos  $\pi : 2x + ay + 4z - 1 = 0$  y  $\sigma : ax + 2y + 4z - 3 = 0$ .

a) Calcula el ángulo que forman  $\pi$  y  $\sigma$  cuando  $a = 1$ .

b) Halla  $a$  para que  $\pi$  y  $\sigma$  sean paralelos.

c) Determina el valor de  $a$  para que  $\pi$  y  $\sigma$  sean perpendiculares.

Solución:

a)  $\cos \alpha = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$  Un vector normal a  $\pi$  es  $\vec{n}_1(2, 1, 4)$ . Un vector normal a  $\sigma$  es  $\vec{n}_2(a, 2, 4)$ .

$\cos \alpha = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{2+2+16}{\sqrt{21} \cdot \sqrt{21}} = \frac{20}{21} \approx 0,952 \rightarrow \alpha = 17^\circ 45' 10''$

b) Sus vectores normales han de ser proporcionales:  $\frac{2}{a} = \frac{a}{2} = \frac{4}{4} \rightarrow a = 2$

c) Sus vectores normales han de ser perpendiculares:  $(2, a, 4) \cdot (a, 2, 4) = 2a + 2a + 16 = 4a + 16 = 0 \Rightarrow a = -4$

**EJERCICIO 17 :** Dados las rectas  $r : \begin{cases} 2x - 3y + z - 2 = 0 \\ -3x + 2y + 2z + 1 = 0 \end{cases}$  y  $s : \begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = -2 + 2\lambda \end{cases}$  y el punto  $P(1, 0, -5)$ ;

calcula el ángulo que forma la recta  $r$  con el plano,  $\pi$ , perpendicular a  $s$  que pasa por  $P$ .

Solución:  $\sin(\alpha) = \frac{|\vec{d} \cdot \vec{n}|}{|\vec{d}| \cdot |\vec{n}|}$

- Un vector dirección de  $r$  es:  $\vec{d}_r = (2, -3, 1) \times (-3, 2, 2) = (-8, -7, -5) // (8, 7, 5) = \vec{d}$

- Un vector normal al plano  $\pi$  es:  $\vec{n} = \vec{d}_s = (-2, 1, 2)$

$\sin(\alpha) = \frac{|\vec{d} \cdot \vec{n}|}{|\vec{d}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{-16+7+10}{\sqrt{138} \cdot \sqrt{9}} = \frac{1}{3\sqrt{138}} \approx 0,028 \rightarrow \alpha = 1^\circ 37' 34''$

**DISTANCIAS**

**EJERCICIO 18** : Calcula la distancia entre las rectas:  $r: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{-2}$  y  $s: \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=2\lambda \\ z=-1+\lambda \end{cases}$

$$\text{Solución: } \text{dist}(r, s) = \frac{|[v_r, v_s, \overrightarrow{P_r P_s}]|}{|v_r \times v_s|}$$

Buscamos un punto y un vector dirección de cada recta:

$$\text{Recta } r: \text{ Punto: } P_r(2, -1, 0) \quad \text{Vector: } \vec{v}_r(1, 3, -2)$$

$$\text{Recta } s: \text{ Punto: } P_s(1, 0, -1) \quad \text{Vector: } \vec{v}_s(1, 2, 1)$$

$$\overrightarrow{P_r P_s}(-1, 1, -1) \Rightarrow [v_r, v_s, \overrightarrow{P_r P_s}] = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -9$$

$$v_r \times v_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 7i - 3j - k = (7, -3, -1)$$

$$\text{dist}(r, s) = \frac{|[v_r, v_s, \overrightarrow{P_r P_s}]|}{|v_r \times v_s|} = \frac{|-9|}{\sqrt{49+9+1}} = \frac{9}{\sqrt{59}} \approx 1,17u$$

**EJERCICIO 19** : Calcula la distancia entre las rectas:  $r: \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{4} = \frac{z+1}{0}$  y  $s: \begin{cases} x=-5+\lambda \\ y=2-\lambda \\ z=3+4\lambda \end{cases}$

$$\text{Solución: } \text{dist}(r, s) = \frac{|[\overrightarrow{P_r P_s}, v_r, v_s]|}{|v_r \times v_s|}$$

$$\text{- En la recta } r: P_r(-1, 2, -1); v_r(3, 4, 0)$$

$$\text{- En la recta } s: P_s(-5, 2, 3); v_s(1, -1, 4)$$

$$\text{- } \overrightarrow{P_r P_s}(-4, 0, 4) \Rightarrow [\overrightarrow{P_r P_s}, v_r, v_s] = \begin{vmatrix} -4 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -92$$

$$\text{- } |v_r \times v_s| = |(3, 4, 0) \times (1, -1, 4)| = |(16, -12, -7)| = \sqrt{16^2 + (-12)^2 + (-7)^2} = \sqrt{449}$$

$$\text{Por tanto: } \text{dist}(r, s) = \frac{92}{\sqrt{449}} \approx 4,34$$

**EJERCICIO 20** : Dados el punto  $P(2, 0, -3)$ , la recta  $r: \begin{cases} x=2+\lambda \\ y=-3+\lambda \\ z=2-2\lambda \end{cases}$  y el plano  $\pi: x+2y+2z-1=0$ ,

calcula la distancia entre: a)  $P$  y  $\pi$  b)  $P$  y  $r$

Solución:

$$\text{a) } \text{dist}(P, \pi) = \frac{|2+0-6-1|}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{5}{3} \approx 1,67$$

$$\text{b) } \text{dist}(P, r) = \frac{|P_r P \times v_r|}{|v_r|}$$

$$\text{- Hallamos un punto y un vector dirección de la recta } r: P_r(2, -3, 2); v_r(1, 1, -2)$$

$$\text{- } |\overrightarrow{P_r P} \times v_r| = |(0, 3, -5) \times (1, 1, -2)| = |(-1, -5, -3)| = \sqrt{1+25+9} = \sqrt{35}$$

$$\text{- } |v_r| = |(1, 1, -2)| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6} \Rightarrow \text{Por tanto: } \text{dist}(P, r) = \frac{\sqrt{35}}{\sqrt{6}} \approx 2,42$$

**EJERCICIO 21 :** Calcula la distancia del punto  $P(3, 1, -2)$  a la recta  $r : \begin{cases} x - 2y - z + 5 = 0 \\ 2x + 3y + z + 1 = 0 \end{cases}$ .

Solución:  $\text{dist}(P, r) = \frac{|P_r P \times v_r|}{|v_r|}$

- Hallamos un punto y un vector de  $r$  (pasamos la recta a paramétricas:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -5 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -5 \\ 0 & 7 & 3 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y = \alpha \\ z = \frac{9-7\alpha}{3} \\ x = \frac{-6-\alpha}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-6-\alpha}{3} \\ y = \alpha \\ z = \frac{9-7\alpha}{3} \end{cases} \quad \text{Punto } (-2, 0, 3) \text{ Vector } (-1/3, 1, -7/3) \parallel (-1, 3, -7)$$

$$|\overrightarrow{P_r P} \times dv_r| = |(5, 1, -5) \times (-1, 3, -7)| = |(8, 40, 16)| = \sqrt{1920} \quad |dv_r| = |(-1, 3, -7)| = \sqrt{59}$$

Por tanto:  $\text{dist}(P, r) = \frac{\sqrt{1920}}{\sqrt{59}} \approx 5,70$

**EJERCICIO 22 :** Halla la distancia de la recta  $r : \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 2 - 2\lambda \\ z = 3 - \lambda \end{cases}$  al plano  $\pi : 2x + y = 4$ .

Solución:  $d(r, \pi) = d(P_r, \pi)$

$P_r(-1, 2, 3) \quad \pi: 2x + y - 4 = 0$

$$d(r, \pi) = d(P_r, \pi) = \frac{|2 \cdot (-1) + 2 - 4|}{\sqrt{4 + 1 + 0}} = \frac{4}{\sqrt{5}} \approx 1,79 \text{ u}$$

## LUGARES GEOMÉTRICOS

**EJERCICIO 23 :** Halla el lugar geométrico de los puntos,  $P$ , tales que la distancia de  $P$  a  $A$  sea igual al triple de la distancia de  $P$  a  $B$ , siendo  $A(1, 0, 0)$  y  $B(1, 0, 0)$ .

Solución:

Si  $P(x, y, z)$  es un punto del lugar geométrico, tenemos que:  $\text{dist}(P, A) = 3 \text{dist}(P, B)$ , es decir:

$$\sqrt{(x+1)^2 + y^2 + z^2} = 3 \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + z^2} \Rightarrow (x+1)^2 + y^2 + z^2 = 9[(x-1)^2 + y^2 + z^2]$$

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 + z^2 = 9[x^2 - 2x + 1 + y^2 + z^2] \Rightarrow 8x^2 + 8y^2 + 8z^2 - 20x + 8 = 0$$

**EJERCICIO 24 :** Obtén el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los planos  $\pi: 3x - 2y + 4z - 1 = 0$  y  $\sigma: 4x + 2y - 3z + 2 = 0$ .

Solución: Si  $P(x, y, z)$  es un punto del lugar geométrico, tenemos que:  $\text{dist}(P, \pi) = \text{dist}(P, \sigma)$ , es decir:

$$\frac{|3x - 2y + 4z - 1|}{\sqrt{29}} = \frac{|4x + 2y - 3z + 2|}{\sqrt{29}} \Rightarrow |3x - 2y + 4z - 1| = |4x + 2y - 3z + 2| \Rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} 3x - 2y + 4z - 1 = 4x + 2y - 3z + 2 \rightarrow x + 4y - 7z + 3 = 0 \\ 3x - 2y + 4z - 1 = -4x - 2y + 3z - 2 \rightarrow 7x + z + 1 = 0 \end{cases}$$

**EJERCICIO 25 :** Dados los puntos  $A(-1, 0)$  y  $B(1, 0)$ , halla el lugar geométrico de los puntos,  $P$ , del plano tales que el cociente de distancias:  $\frac{\text{dist}(P, A)}{\text{dist}(P, B)}$  sea igual a 1. Identifica la figura resultante.

Solución: Si  $P(x, y)$  es un punto del lugar geométrico, tenemos que:

$$\frac{\text{dist}(P, A)}{\text{dist}(P, B)} = 1 \rightarrow \text{dist}(P, A) = \text{dist}(P, B) \Rightarrow \sqrt{(x+1)^2 + y^2} = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \rightarrow (x+1)^2 + y^2 = (x-1)^2 + y^2$$

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 = x^2 - 2x + 1 + y^2 \Rightarrow 4x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow$$

Es la ecuación del eje  $Y$ , que en este caso es la mediatriz del segmento  $AB$ .



**EJERCICIO 26 :** Halla el lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de  $A(2, 1, -5)$  y  $B(6, 0, 3)$ . ¿Qué figura obtienes?

*Solución:* Si  $P(x, y, z)$  es un punto del lugar geométrico, tenemos que:  $\text{dist}(P, A) = \text{dist}(P, B)$

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+5)^2} = \sqrt{(x-6)^2 + y^2 + (z-3)^2}$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 + z^2 + 10z + 25 = x^2 - 12x + 36 + y^2 + z^2 - 6z + 9 \Rightarrow 8x - 2y + 16z - 15 = 0$$

Es el plano mediador del segmento  $AB$  (es perpendicular a  $\overrightarrow{AB}$  y pasa por el punto medio de  $AB$ ).

## REPASO

**EJERCICIO 27 :** Halla la posición relativa de las siguientes rectas y escribe la ecuación del plano que

las contiene:  $r : \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = 2 - \lambda \end{cases} \quad s : \frac{x+1}{4} = \frac{y-1}{6} = \frac{z}{-2}$

*Solución:*

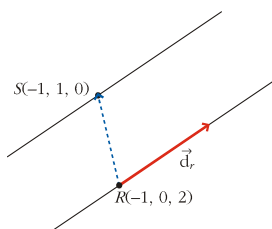
- Posición relativa de las rectas : Pasamos las rectas a paramétricas y resolvemos el sistema:

$$r : \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = 2 - \lambda \end{cases} ; s : \begin{cases} x = -1 + 4\alpha \\ y = 1 + 6\alpha \\ z = -2\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda - 4\alpha = 0 \\ 3\lambda - 6\alpha = 1 \\ -\lambda + 2\alpha = -2 \end{cases} \Rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & -2 \\ 3 & -6 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Rango  $A = 2 \neq$  Rango  $A^* = 3 \Rightarrow$  Sistema Incompatible. No existe solución: Paralelas o se cruzan.

Hallamos los vectores directores:  $\vec{v}_r = (2, 3, -1)$ ,  $\vec{v}_s = (4, 6, -2) \Rightarrow$  Los vectores son paralelos porque son proporcionales  $\Rightarrow$  Las rectas son PARALELAS

- Ecuación del plano que las contiene : Necesitamos un punto y dos vectores:  $P_r, v_r, P_r P_s$



Recta  $r$ :  $P_r(-1, 0, 2)$

Recta  $s$ :  $P_s(-1, 1, 0) \quad v_r = (2, 3, -1)$

$P_r P_s = (0, 1, -2)$

Ecuación del plano:

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-0 & z-2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -5(x+1) + 4y + 2(z-2) = 0 \Rightarrow -5x + 4y + 2z - 9 = 0$$

## EJERCICIO 28

a) Escribe la ecuación del plano,  $\pi$ , perpendicular a la recta  $r : \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-1}{1}$ , que

pase por  $P(1, 2, -1)$ .

b) Calcula la distancia del punto  $P$  a la recta  $r$ .

*Solución:*

a) Un vector normal al plano será el vector dirección de la recta  $r : v_r = \vec{n}_\pi = (2, -2, 1)$

La ecuación del plano será:  $2x - 2y + z + D = 0$

Sustituimos el punto  $P(1, 2, -1)$  y obtenemos  $D : 2 - 4 - 1 + D = 0 \Rightarrow D = 3$

Solución:  $\pi : 2x - 2y + z + 3 = 0$

$$b) d(P, r) = \frac{|PP_r \times v_r|}{|v_r|}$$

Hallamos un punto y un vector de  $r : P_r(2, -1, 1) \quad v_r(2, -2, 1)$

Hallamos  $PP_r = (1, -3, 2)$

$$PP_r \times v_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = i + 3j + 4k = (1, 3, 4) \Rightarrow d(P, r) = \frac{|PP_r \times v_r|}{|v_r|} = \frac{\sqrt{1+9+16}}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{\sqrt{26}}{3} \approx 1,7u$$

**EJERCICIO 29**

- a) Calcula el valor de  $m$  para que los puntos  $P(1, 2, -1)$ ,  $Q(0, -1, 2)$ ,  $R(3, 1, -1)$  y  $S(m, 2, 1)$  sean coplanarios, y escribe la ecuación del plano que los contiene.  
 b) Obtén un punto simétrico de  $A(1, -1, 1)$  respecto del plano anterior.

Solución:

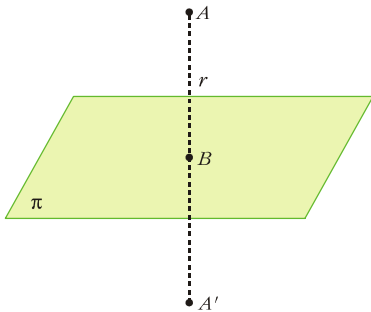
a) Escribimos la ecuación del plano,  $\pi$ , que contiene a los puntos  $P(1, 2, -1)$ ,  $Q(0, -1, 2)$  y  $R(3, 1, -1)$ :

$$P(1,2,-1), \vec{PQ}(-1, -3, 3), \vec{PR}(2, -1, 0) \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ -1 & -3 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3(x-1) + 6(y-2) + 7(z+1) = 0$$

$$3x + 6y + 7z - 8 = 0$$

Hallamos el valor de  $m$  para que  $S(m, 2, 1) \in \pi : 3m + 12 + 7 - 8 = 0 \Rightarrow m = \frac{-11}{3}$

b) (1) Obtenemos la recta,  $r$ , que pasa por  $A$  y es perpendicular a  $\pi$ :  $r : \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = -1 + 6\lambda \\ z = 1 + 7\lambda \end{cases}$



(2) Buscamos el punto,  $B$ , de intersección de  $r$  y  $\pi$ :

$$3(1 + 3\lambda) + 6(-1 + 6\lambda) + 7(1 + 7\lambda) - 8 = 0$$

$$94\lambda = 4 \rightarrow \lambda = \frac{4}{94} = \frac{2}{47} \rightarrow B\left(\frac{53}{47}, \frac{-35}{47}, \frac{61}{47}\right)$$

(3) Si  $A'(x, y, z)$  es el simétrico de  $A$  respecto de  $A'$ ,  $B$  es el punto

medio de  $AA'$ :  $\left(\frac{x+1}{2}, \frac{y-1}{2}, \frac{z+1}{2}\right) = \left(\frac{53}{47}, \frac{-35}{47}, \frac{61}{47}\right)$

$$\left. \begin{aligned} \frac{x+1}{2} &= \frac{53}{47} \rightarrow x = \frac{59}{47} \\ \frac{y-1}{2} &= \frac{-35}{47} \rightarrow y = \frac{-23}{47} \\ \frac{z+1}{2} &= \frac{61}{47} \rightarrow z = \frac{75}{47} \end{aligned} \right\} \rightarrow A'\left(\frac{59}{47}, \frac{-23}{47}, \frac{75}{47}\right)$$

**EJERCICIO 30 : Halla la ecuación de la perpendicular común a las rectas:**

$$r : \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{-1} \quad y \quad s : \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = -2 + \lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$$

Solución:

- Un punto genérico de  $r$  es  $R(-1 + \mu, 2 + 2\mu, 3 - \mu)$ .
- Un punto genérico de  $s$  es  $S(1 + \lambda, -2 + \lambda, 3 + \lambda)$ .

Un vector genérico de origen en  $r$  y extremo en  $s$  es:  $\vec{RS}(\lambda - \mu, \lambda - 2\mu - 4, \lambda + \mu)$

Este vector debe ser perpendicular a  $r$  y a  $s$ :

$$\left. \begin{aligned} \vec{RS} \cdot \vec{d}_r = \vec{RS} \cdot (1, 2, -1) = 0 \rightarrow 2\lambda - 6\mu - 8 = 0 \\ \vec{RS} \cdot \vec{d}_s = \vec{RS} \cdot (1, 1, 1) = 0 \rightarrow 3\lambda - 2\mu - 4 = 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \lambda &= \frac{4}{7} \\ \mu &= \frac{-8}{7} \end{aligned}$$

Así:  $R\left(\frac{-15}{7}, \frac{-2}{7}, \frac{29}{7}\right)$ ;  $S\left(\frac{-3}{7}, \frac{-10}{7}, \frac{25}{7}\right)$

$$\vec{RS}\left(\frac{12}{7}, \frac{-8}{7}, \frac{-4}{7}\right) \parallel (3, -2, -1)$$

Por tanto, las ecuaciones de la perpendicular común son: 
$$P: \begin{cases} x = \frac{-15}{7} + 3\lambda \\ y = \frac{-2}{7} - 2\lambda \\ z = \frac{29}{7} - \lambda \end{cases}$$

**EJERCICIO 31 :** Averigua las coordenadas del punto simétrico de  $P(3, 4, -1)$  respecto de la recta

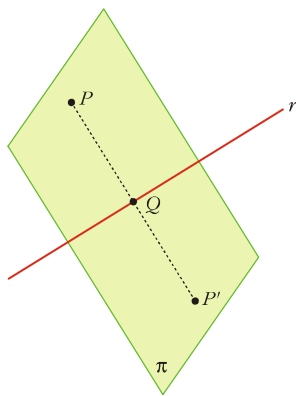
$r: \begin{cases} 3x + y - z = 3 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$ ; y calcula la distancia de  $P$  a  $r$ .

Solución:

(1) Hallamos la ecuación del plano que pasa por  $P$  y es perpendicular a  $r$ :

$$n_\pi = v_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (-1, -4, -7) \parallel (1, 4, 7) \Rightarrow x + 4y + 7z + D = 0 \Rightarrow 3 + 16 - 7 + D = 0 \Rightarrow D = -12$$

$$\pi: x + 4y + 7z - 12 = 0$$



(2) Resolvemos el sistema entre la recta y el plano (Para ello pasamos la recta a paramétricas:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 0 \\ 3 & 1 & -1 & | & 3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 7 & -4 & | & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} z = \alpha \\ y = \frac{3 + 4\alpha}{7} \\ x = \frac{6 + 8\alpha}{7} - \alpha = \frac{6 + \alpha}{7} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{6 + \alpha}{7} \\ y = \frac{3 + 4\alpha}{7} \\ z = \alpha \end{cases}$$

$$\frac{6 + \alpha}{7} + \frac{12 + 16\alpha}{7} + 7\alpha - 12 = 0 \Rightarrow 6 + \alpha + 12 + 16\alpha + 49\alpha - 84 = 0 \Rightarrow \alpha = 66/66 = 1$$

$$Q(1, 1, 1)$$

(3) Si llamamos  $P'(x, y, z)$  al simétrico de  $P$ , entonces  $Q$  es el punto medio de  $PP'$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{x+3}{2} = 1 &\rightarrow x = -1 \\ \frac{y+4}{2} = 1 &\rightarrow y = -2 \\ \frac{z-1}{2} = 1 &\rightarrow z = 3 \end{aligned} \right\} P'(-1, -2, 3)$$

• La distancia de  $P$  a  $r$  es igual a la distancia de  $P$  a  $Q$ :

$$dist(P, r) = dist(P, Q) = |\overline{PQ}| = |(-2, -3, 2)| = \sqrt{4+9+4} = \sqrt{17} \approx 4,12$$

**EJERCICIO 32 :**

a) Halla la ecuación del plano que contiene a la recta  $r: \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{1}$  y es perpendicular al plano

$$\pi: 2x + y + z - 2 = 0.$$

b) Calcula el ángulo que forman la recta  $r$  y el plano  $\pi$ .

Solución:

a) Necesitamos un punto y dos vectores:  $P_r(1, -2, 0)$ ,  $v_r(3, -1, 1)$ ,  $n_\pi(2, 1, 1)$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2(x-1) - (y+2) + 5z = 0 \Rightarrow -2x - y + 5z = 0$$

$$b) \operatorname{sen}(\alpha) = \frac{v_r \cdot \vec{n}_\pi}{|v_r| \cdot |\vec{n}_\pi|} = \frac{(3,-1,1) \cdot (2,1,1)}{\sqrt{9+1+1}\sqrt{4+1+1}} = \frac{6-1+1}{\sqrt{11} \cdot \sqrt{6}} = \frac{6}{\sqrt{66}} \rightarrow \alpha = 47^\circ 36' 29''$$

**EJERCICIO 33 :** Determina la posición relativa de las rectas  $r$  y  $s$ , y calcula la mínima distancia

entre ellas:  $r: \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 3 \\ z = -1 + 6\lambda \end{cases} \quad s: \frac{x-6}{1} = \frac{y+2}{0} = \frac{z+1}{3}$

*Solución:*

a) Posición relativa: Pasamos las rectas a paramétricas y resolvemos el sistema:

$$r: \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 3 \\ z = -1 + 6\lambda \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 6 + \alpha \\ y = -2 \\ z = -1 + 3\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -5 \\ 6 & -3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Sistema Incompatible (Paralelas o se cruzan)}$$

Hallamos los vectores directores:  $\vec{v}_r(2,0,6)$ ,  $\vec{v}_s(1,0,3) \Rightarrow$  Proporcionales  $\Rightarrow$  Son paralelas.

b) Como son paralelas  $d(r,s) = d(P_r,s) = \frac{|P_r P_s \times v_s|}{|v_s|}$

$P_r(2,3,-1)$ ,  $P_s(6,-2,-1)$ ,  $\vec{v}_s(1,0,3) \Rightarrow P_r P_s = (4,-5,0)$

$$d(r,s) = \frac{|P_r P_s \times v_s|}{|v_s|} = \frac{|(4,-5,0) \times (1,0,3)|}{|(1,0,3)|} = \frac{|(-15,-12,5)|}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{394}}{\sqrt{10}} \approx 6,28$$

**EJERCICIO 34 :** El plano  $\pi: 2x + y + 4z + 8 = 0$  corta a los ejes coordenados en tres puntos;  $A$ ,  $B$  y  $C$ . Halla el área del triángulo con vértices en esos tres puntos.

*Solución:*

Obtenemos los puntos de corte del plano  $\pi$  con los ejes coordenados:

- Con el eje  $X$ :  $y = z = 0 \Rightarrow x = -4 \Rightarrow$  Punto  $A(-4, 0, 0)$

- Con el eje  $Y$ :  $x = z = 0 \Rightarrow y = -8 \Rightarrow$  Punto  $B(0, -8, 0)$

- Con el eje  $Z$ :  $x = y = 0 \Rightarrow z = -2 \Rightarrow$  Punto  $C(0, 0, -2)$

$\vec{AB}(4, -8, 0)$ ;  $\vec{AC}(4, 0, -2)$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} |(16, 8, 32)| = \frac{1}{2} \sqrt{16^2 + 8^2 + 32^2} = \frac{1}{2} \sqrt{1344} \approx 18,33 \text{ u}^2$$

**EJERCICIO 35 :**

a) Escribe la ecuación del plano,  $\pi$ , que pasa por los puntos  $P(2, 1, -1)$ ,  $Q(1, 0, 3)$  y  $R(-3, 1, 1)$ .

b) Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de corte del plano  $\pi$  con los ejes coordenados.

*Solución:*

a) Necesitamos un punto  $P(2,1,-1)$  y dos vectores  $PQ(-1,-1,4)$ ,  $PR(-5,0,2)$

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z+1 \\ -1 & -1 & 4 \\ -5 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2(x-2) - 18(y-1) - 5(z+1) = 0 \Rightarrow -2x - 18y - 5z + 17 = 0$$

b) Hallamos los puntos de corte de  $\pi$  con los ejes coordenados:

- Con el eje  $X \rightarrow y = z = 0 \rightarrow x = \frac{17}{2} \rightarrow$  Punto  $A\left(\frac{17}{2}, 0, 0\right)$

- Con el eje  $Y \rightarrow x = z = 0 \rightarrow y = \frac{17}{18} \rightarrow$  Punto  $B\left(0, \frac{17}{18}, 0\right)$

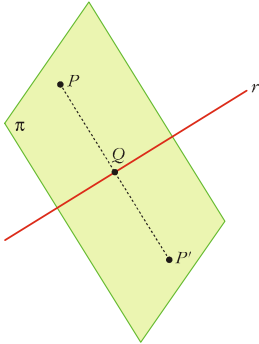
- Con el eje  $Z \rightarrow x = y = 0 \rightarrow z = \frac{17}{5} \rightarrow$  Punto  $C\left(0, 0, \frac{17}{5}\right)$

$\vec{AB}\left(-\frac{17}{2}, \frac{17}{18}, 0\right)$ ;  $\vec{AC}\left(-\frac{17}{2}, 0, \frac{17}{5}\right)$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} \left| \left( \frac{289}{90}, \frac{289}{10}, \frac{289}{36} \right) \right| \approx 15,08 \text{ u}^2$$

**EJERCICIO 36 :** Halla el punto simétrico de  $P(-2, 1, 5)$  respecto a la recta  $r: \frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-1}{1}$ .

Solución:



[1] Hallamos la ecuación del plano,  $\pi$ , que pasa por  $P$  y es perpendicular a  $r$ :  
 $x - 2y + z + D = 0 \Rightarrow -2 - 2 + 5 + D = 0 \Rightarrow D = -1 \Rightarrow x - 2y + z - 1 = 0$

[2] Hallamos el punto,  $Q$ , de intersección de  $r$  y  $\pi$ :

$$r: \begin{cases} x = 2 + \lambda & (2 + \lambda) - 2(-3 - 2\lambda) + (1 + \lambda) - 1 = 0 \\ y = -3 - 2\lambda & 2 + \lambda + 6 + 4\lambda + 1 + \lambda - 1 = 0 \\ z = 1 + \lambda & 6\lambda + 8 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{-8}{6} = \frac{-4}{3} \end{cases} \Rightarrow Q\left(\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{-1}{3}\right)$$

[3] El punto  $Q$  es el punto medio de  $PP'$ , siendo  $P'$  el simétrico de  $P$  respecto a  $r$ : Si  $P'(x, y, z)$ :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{x-2}{2} = \frac{2}{3} \rightarrow x = \frac{10}{3} \\ \frac{y+1}{2} = \frac{-1}{3} \rightarrow y = \frac{-5}{3} \\ \frac{z+5}{2} = \frac{-1}{3} \rightarrow z = \frac{-17}{3} \end{array} \right\} P'\left(\frac{10}{3}, \frac{-5}{3}, \frac{-17}{3}\right)$$

**EJERCICIO 37 :** Determina la posición relativa de las rectas:

$$r: \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 3 + 2\lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases} \quad y \quad s: \frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{2}; \text{ y halla la ecuación de la perpendicular común.}$$

Solución:

- Pasamos las rectas a paramétricas y resolvemos el sistema:

$$r: \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 3 + 2\lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases} \quad y \quad s: \begin{cases} x = -2 + 3\alpha \\ y = 1 + \alpha \\ z = 1 + 2\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -3 & -4 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -1 & -3 & -4 \\ 0 & -7 & -10 \\ 0 & -5 & -2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -1 & -3 & -4 \\ 0 & -7 & -10 \\ 0 & 0 & 36 \end{pmatrix}$$

Rango  $A = 2 \neq$  Rango  $A^* = 3 \Rightarrow$  Sistema incompatible  $\Rightarrow$  Se cruzan o son paralelas

Hallamos los vectores directores:  $\vec{v}_r(-1, 2, 1)$   $\vec{v}_s(3, 1, 2) \Rightarrow$  No son proporcionales  $\Rightarrow$  SE CRUZAN

- Perpendicular común:

Un punto genérico de  $r$  es  $P_r(2 - \lambda, 3 + 2\lambda, -1 + \lambda)$ .

Un punto genérico de  $s$  es  $P_s(-2 + 3\alpha, 1 + \alpha, 1 + 2\alpha)$

El vector  $\vec{P_rP_s} = (-4 + 3\alpha + \lambda, -2 + \alpha - 2\lambda, 2 + 2\alpha - \lambda)$  es perpendicular a  $v_r$  y a  $v_s$ :

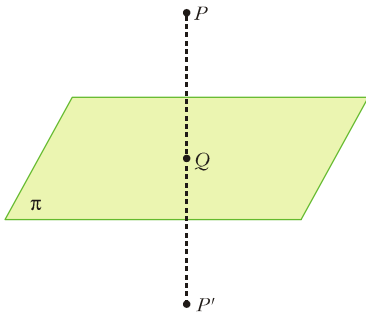
$$\left. \begin{array}{l} \vec{RS} \cdot \vec{d}_r = 0 \rightarrow -6\lambda + \mu + 2 = 0 \\ \vec{RS} \cdot \vec{d}_s = 0 \rightarrow -\lambda + 14\mu - 10 = 0 \end{array} \right\} \lambda = \frac{38}{83}; \mu = \frac{62}{83}$$

$$\text{Así: } P_r\left(\frac{128}{83}, \frac{325}{83}, \frac{-45}{83}\right); P_s\left(\frac{20}{83}, \frac{145}{83}, \frac{207}{83}\right) \Rightarrow \vec{P_rP_s}\left(\frac{-108}{83}, \frac{-180}{83}, \frac{252}{83}\right) // (3, 5, -7)$$

Por tanto, las ecuaciones de la perpendicular común son:  $p: \begin{cases} x = \frac{128}{83} + 3\lambda \\ y = \frac{325}{83} + 5\lambda \\ z = \frac{-45}{83} - 7\lambda \end{cases}$

**EJERCICIO 38 :** Obtén el punto simétrico de  $P(2, -1, 3)$  respecto al plano  $\pi: 3x + 2y + z - 5 = 0$ .

Solución:



[1] Hallamos la ecuación de la recta,  $r$ , que pasa por  $P$  y es

perpendicular a  $\pi$ :  $r: \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$

[2] Obtenemos el punto,  $Q$ , de intersección de  $r$  y  $\pi$ :

$$3(2 + 3\lambda) + 2(-1 + \lambda) + (3 + \lambda) - 5 = 0 \Rightarrow$$

$$6 + 9\lambda - 2 + 4\lambda + 3 + \lambda - 5 = 0 \Rightarrow 14\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{7} \Rightarrow$$

$$Q\left(\frac{11}{7}, -\frac{9}{7}, \frac{20}{7}\right)$$

[3] Si llamamos  $P'$  al simétrico de  $P$  respecto de  $\pi$ ,  $Q$  es el punto medio de  $PP'$ :  $P'(x, y, z)$

$$\left. \begin{aligned} \frac{x+2}{2} = \frac{11}{7} &\rightarrow x = \frac{8}{7} \\ \frac{y-1}{2} = -\frac{9}{7} &\rightarrow y = -\frac{11}{7} \\ \frac{z+3}{2} = \frac{20}{7} &\rightarrow z = \frac{19}{7} \end{aligned} \right\} P'\left(\frac{8}{7}, -\frac{11}{7}, \frac{19}{7}\right)$$

**EJERCICIO 39 :** Dados el punto  $P(3, 1, -1)$  y el plano  $\pi: 3x - y - z = 2$ , calcula:

a) La ecuación de la recta que pasa por  $P$  y es perpendicular a  $\pi$ .

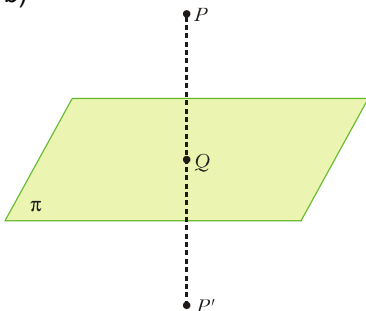
b) El punto simétrico de  $P$  respecto a  $\pi$ .

c) Ecuación del plano que pasa por  $P$  y es paralelo a  $\pi$ .

Solución:

a)  $r: \begin{cases} x = 3 + 3\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$

b)



[1] Apartado a)

[2] Hallamos el punto,  $Q$ , de intersección de  $r$  y  $\pi$ :

$$3(3 + 3\lambda) - (1 - \lambda) - (-1 - \lambda) = 2 \Rightarrow 9 + 9\lambda - 1 + \lambda + 1 + \lambda = 2 \Rightarrow$$

$$11\lambda = -7 \Rightarrow \lambda = -\frac{7}{11} \Rightarrow Q\left(\frac{12}{11}, \frac{18}{11}, \frac{-4}{11}\right)$$

[3] Si  $P'(x, y, z)$  es el simétrico de  $P$  respecto a  $\pi$ ,  $Q$  es el punto medio de  $PP'$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{x+3}{2} = \frac{12}{11} &\rightarrow x = -\frac{9}{11} \\ \frac{y+1}{2} = \frac{18}{11} &\rightarrow y = \frac{25}{11} \\ \frac{z-1}{2} = \frac{-4}{11} &\rightarrow z = \frac{3}{11} \end{aligned} \right\} P\left(\frac{-9}{11}, \frac{25}{11}, \frac{3}{11}\right)$$

c) Un plano paralelo a  $\pi$  es de la forma  $3x - y - z + D = 0$

Como pasa por  $P(3, 1, -1) \Rightarrow 9 - 1 + 1 + D = 0 \Rightarrow D = -9 \Rightarrow 3x - y - z - 9 = 0$

**EJERCICIO 40** : Dadas las rectas:  $r : \begin{cases} x - az = 2 \\ y - z = -3 \end{cases}$  y  $s : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{b} = \frac{z}{1}$ ,

calcula  $a$  y  $b$  para que sean ortogonales y coplanarias.

Solución:

Escribimos la recta  $r$  en paramétricas:  $r : \begin{cases} x = 2 + a\lambda \\ y = -3 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$   $P_r(2, -3, 0); dv_r(a, 1, 1)$   
 $P_s(1, -1, 0); dv_s(2, b, 1)$

- Para que sean ortogonales, ha de ser:  $v_r \cdot v_s = 0 \rightarrow 2a + b + 1 = 0$

- Para que sean coplanarias:  $[\vec{P_rP_s}, v_r, v_s] = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ 2 & b & 1 \end{vmatrix} = -2a + b + 3 = 0$

Uniendo las dos condiciones anteriores, tenemos que:  $\begin{cases} 2a + b + 1 = 0 \\ -2a + b + 3 = 0 \end{cases} \left. \begin{array}{l} a = \frac{1}{2} \\ b = -2 \end{array} \right\}$

**EJERCICIO 41** : Un cuadrado tiene uno de sus lados sobre la recta

$r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -2\lambda \\ z = 3 - \lambda \end{cases}$  y otro sobre  $s : \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z}{-2}$  **Calcula el área del cuadrado.**

Solución:

$v_r = (1, -2, -1) \parallel v_s = (2, -4, -2)$ . Por tanto las dos rectas son paralelas.

El lado del cuadrado es la distancia entre  $r$  y  $s$ .

$$\text{dist}(r, s) = \text{dist}(P_r, s) = \frac{|\vec{P_rP_s} \times dv_s|}{|v_s|} = \frac{|(-10, -4, -2)|}{\sqrt{4+16+4}} = \frac{\sqrt{120}}{\sqrt{24}} = \sqrt{5} = \text{lado del cuadrado}$$

Por tanto, Área =  $(\sqrt{5})^2 = 5 \text{ u}^2$

**EJERCICIO 42** : Halla la ecuación de la recta  $s$  que pasa por  $P(2, 0, 1)$  y corta perpendicularmente a

la recta  $r : \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}$ .

Solución:

[1] Hallamos el plano,  $\pi$ , perpendicular a  $r$  que pasa por  $P$ :  $2x - y + 2z + D = 0 \Rightarrow 4 + 2 + D = 0 \Rightarrow D = -6$   
 $2x - y + 2z - 6 = 0$

[2] Hallamos el punto  $Q$  de intersección entre  $r$  y  $\pi$ :  $2(2\alpha + 2) - (-\alpha + 1) + 2(2\alpha) - 6 = 0 \Rightarrow 9\alpha - 3 = 0 \Rightarrow$

$$\alpha = 1/3 \Rightarrow Q\left(\frac{2}{3} + 2, -\frac{1}{3} + 1, \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{8}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$[3] \text{ La recta pedida pasa por P y Q } \Rightarrow \begin{cases} \text{Punto : P(2,0,1)} \\ \text{Vector : } v = PQ = \left( \frac{8}{3} - 2, \frac{2}{3} - 0, \frac{2}{3} - 1 \right) = \left( \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3} \right) \parallel (2, 2, -1) \end{cases}$$

$$\text{Así: } s: \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = \quad + 2\lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$$

**EJERCICIO 43 :** Determina la ecuación de un plano  $\pi$  paralelo al plano de ecuación  $2x - y + z + 4 = 0$  y que dista 10 unidades del punto  $P(2, 0, 1)$ .

*Solución:*

Un plano paralelo a  $2x - y + z + 4 = 0$  es de la forma:  $\pi: 2x - y + z + D = 0$

Tenemos que hallar  $D$  para que la distancia a  $P$  sea 10 u:  $\text{dist}(P, \pi) = \frac{|2 \cdot 2 + 1 + D|}{\sqrt{4 + 1 + 1}} = 10$

$$|5 + D| = 10\sqrt{6} \quad \begin{cases} 5 + D = 10\sqrt{6} \rightarrow D = 10\sqrt{6} - 5 \\ -5 - D = 10\sqrt{6} \rightarrow D = -5 - 10\sqrt{6} \end{cases}$$

Hay dos planos:

$$2x - y + z + 10\sqrt{6} - 5 = 0$$

$$2x - y + z - 10\sqrt{6} - 5 = 0$$

**EJERCICIO 44 :** Halla la ecuación de la proyección ortogonal,  $r'$ , de la recta  $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{1}$

sobre el plano  $\pi: x - y + z + 2 = 0$ .

*Solución:*

[1] Hallamos el punto de corte de la recta  $r$  y el plano  $\pi: (2\alpha + 1) - (-\alpha) + (\alpha - 2) + 2 = 0 \Rightarrow 4\alpha + 1 = 0$

$\alpha = -1/4 \Rightarrow P_1(1/2, 1/4, -9/4)$

[2] Hallamos otro punto cualquiera de  $r: \alpha = 0 \Rightarrow P_r(1, 0, -2)$

[3] Calculamos la recta perpendicular a  $\pi$  que pase por  $r: s \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = -2 + \lambda \end{cases}$

[4] Hallamos el punto  $P_2$  de intersección entre la recta  $s$  y el plano  $\pi$

$(1 + \lambda) - (-\lambda) + (-2 + \lambda) + 2 = 0 \Rightarrow 3\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -1/3 \Rightarrow P_2(2/3, 1/3, -7/3)$

[5] La recta pedida es la que pasa por  $P_1$  y  $P_2 \Rightarrow r': \begin{cases} \text{Punto : } P_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{9}{4}\right) \\ \text{Vector : } P_1P_2\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}, -\frac{1}{12}\right) \parallel (2, 1, -1) \end{cases} \Rightarrow r': \begin{cases} x = \frac{1}{2} + 2\lambda \\ y = \frac{1}{4} + \lambda \\ z = -\frac{9}{4} - \lambda \end{cases}$