# MATRICES

**Introducción**

**1.** En un IES hay 107 alumnos en 3ºESO, y 110 alumnas. En 4ºESO hay 84 alumnos y 95 alumnas. En 1ºBACH. hay 69 alumnos y 68 alumnas, y en 2ºBACH. hay 46 alumnos y 48 alumnas.

a) Representa mediante una matriz, los datos anteriores. Dicha matriz la representaremos por A.

b) Explica el significado de los elementos $a_{22}$, $a_{31}$ y $a_{42}$.

c) Asigna subíndices a las entradas con valor superior a 60 e inferior a 100.

d) ¿Cuántos alumn@s cursan 2ºBACH.?

**2.** SI el IES anterior es un centro comarcal en el que se reúnen estudiantes procedentes de tres pueblos $P_1$, $P_2$ y $P_3$, atendiendo a su procedencia y sexo, obtenemos la siguiente matriz $2\times 3$:

$$B=\begin{array}{c} \\ H \\ M \end{array}\begin{array}{c} \begin{matrix} P_1 & \;P_2 & \;P_3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 90 & 182 & 34 \\ 91 & 182 & 41 \end{pmatrix} \end{array}$$

a) ¿Cuántos alumnos preceden del pueblo 1?

b) ¿Qué significado tiene el elemento $b_{23}$?

Y si consideramos la actividad profesional principal de los padres de esos alumnos y su lugar de origen, tenemos la matriz $3\times 3$:

$$C=\begin{array}{l} \\ \text{Funcionario} \\ \text{Agricultor} \\ \text{Manufacturero} \end{array}\begin{array}{c} \begin{matrix} P_1 & \;P_2 & \;P_3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 22 & 105 & 11 \\ 114 & 115 & 12 \\ 45 & 151 & 52 \end{pmatrix} \end{array}$$

a) Explica el significado de los términos $c_{12}$, $c_{31}$ y $c_{23}$.

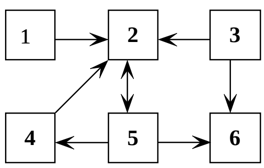
b) Asigna subíndices a los elementos de la matriz de valor inferior a 50.

c) ¿Qué valor numérico corresponde a las entradas de la matriz $c_{13}$, $c_{22}$ y $c_{32}$

**3.** En la matriz siguiente se representan los gramos de vitaminas $A$, $B$ y $C$ de dos alimentos 1 y 2. ¿Qué alimento tiene más vitamina B? ¿Y C? ¿Qué alimento tiene mayor cantidad de vitaminas?

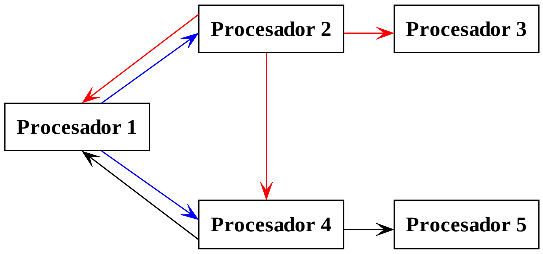
$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{matrix} A & \;B & \;C \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 15 & 6 & 2 \\ 0 & 18 & 9 \end{pmatrix} \end{array}$$

**4.** El gráfico siguiente nos muestra las relaciones que se establecen en un grupo de seis personas. Construye una matriz que indique las relaciones anteriores, indicando con 1 la existencia de relación entre dos personas y con 0 la no existencia de relación.



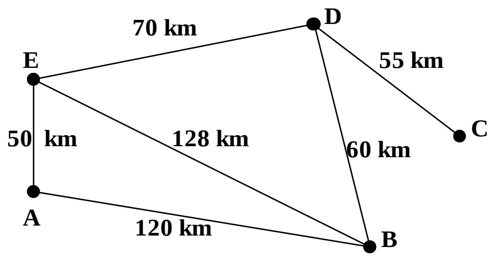

(Indicación: por convenio pondremos 0 en la diagonal principal (en los elementos $a_{11}$, $a_{22}$, $a_{33}$, $a_{44}$, $a_{55}$ y $a_{66}$), ya que las relaciones las consideramos con otros y no con uno mismo)

**5.** Una red de cinco procesadores puede relacionarse según el siguiente esquema:




Construye una matriz que indique las relaciones entre los procesadores, indicando con 1 la existencia de relación entre dos procesadores y con 0 la no existencia de relación. ¿Es posible una comunicación total entre todos los procesadores?

**6.** El grafo[1] adjunto representa los caminos que comunican diversas localidades, con sus respectivas distancias. Halla la matriz de las distancias más cortas.




## Suma de matrices

**7.** Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}2 & 4 & 0\\ 6 & -3 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}5 & 1 & 8\\ 7 & 9 & 4\end{pmatrix}\quad \text{y}\quad C=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 2 & 4 & 1\end{pmatrix}$$

halla:

a) $A+B+C$

b) $B+(-C)$

c) $A^t+B^t+(-C)^t$

d) $A+(-B)+(-C)$

e) $-C+A$

**8.** Efectúa la siguiente operación:

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & -3\\ -3 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$$

**9.** Calcula $a$, $b$, $c$ y $d$ para que se cumpla:

$$\begin{pmatrix}2a & 2b\\ 2c & 2d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & 7\\ -2 & 3d\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5 & a+b\\ c+d & 4\end{pmatrix}$$

**10.** Comprueba con un par de ejemplos que la traspuesta de una suma de dos matrices es igual a la suma de las dos matrices traspuestas.

**11.** En el Instituto A hay 43 chicas y 40 chicos en 3ºESO, y en 4ºESO hay 41 chicas y 50 chicos, mientras que en el Instituto B, en 3ºESO hay 103 chicas y 90 chicos, y en 4ºESO hay 70 chicas y 80

[1] Un *grafo* es un conjunto, no vacío, de objetos llamados vértices y otra colección de pares de vértices, llamados aristas (que pueden ser orientados o no). Usualmente, un grafo se representa mediante una serie de puntos (los vértices) conectados por líneas (las aristas).

chicos. Ordena estos datos en forma de matrices y calcula el número de chicas y chicos por curso en los dos Institutos juntos.

**Producto de un número real por una matriz**

**12.** Realiza las siguientes operaciones:

a) $2\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & -3\\ -3 & 4\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}$

b) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & 4\end{pmatrix}$

**13.** Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}4 & 0\\ -1 & -2\end{pmatrix}\ \text{ y }\ C=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -2 & 3\end{pmatrix}$$

calcula:

a) $\frac{1}{2}A+B$

b) $3A+5B-6C$

c) $2A-\frac{1}{2}B-\frac{1}{3}C$

**14.** En un Instituto hay 140 estudiantes en 1ºBACH. y 150 en 2ºBACH. Ordena estos datos en una matriz y calcula el número de estudiantes aprobados por curso si este año se sabe que lo hicieron el 70% en cada curso.

**Producto y potencia de matrices**

**15.** Calcula todos los productos posibles entre las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -2 & 5 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-7 & 1\\ 0 & 4\\ 2 & 1\\ 3 & 0\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1 & 0\\ 0 & 7 & 1 & 4\\ 0 & -2 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

**16.** Dadas las matrices A y B:

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ -1 & -1 & 0\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3 & 5 & 0\\ -2 & 2 & 1\\ 0 & 4 & 0\end{pmatrix}$$

halla:

a) $(A\cdot B)\cdot B$

b) $A\cdot(B\cdot A)$

**17.** Para las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 4 & 0 & -3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0 & 3 & 4\\ -1 & -2 & 3\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2 & 3 & 0 & 1\\ -5 & 1 & 4 & -2\\ 1 & 0 & 0 & -3\end{pmatrix}\ \text{ y }\ D=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 3\end{pmatrix}$$

realiza las siguientes operaciones:

a) $A+B$ b) $3A-4B$ c) $AB$

d) $AD$ e) $BC$ f) $CD$

g) $A^tC$ h) $D^tA^t$ i) $B^tA$

j) $D^tD$ k) $DD^t$

**18.** Con las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$, calcula:

a) $AB$ b) $BA$ c) $C^2$ d) $C^3$ e) $A^tC^2$

**19.** Calcula $A^2, A^3$ y $A^4$ siendo $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**20.** Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 1 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

a) Calcular la matriz $5A^t-3B^t$.

b) Hallar $AB^t$.

**21.** Sea $k$ un número natural y la matriz:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcula $A^k$.

**22.** Considera la matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & q \end{pmatrix}$ y halla los valores de $p$ y $q$ que hacen que se verifique la siguiente igualdad: $A^2=A$.

**23.** Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula $A^{10}$.

**24.** Efectúa las siguientes operaciones con matrices:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^2$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^2-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

c) $\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}-\frac{3}{5}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\right]^2$

d) $2\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^2$

## Matriz inversa

**25.** Calcula, si existe, la inversa de:

a) $A=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ b) $B=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -4 & 6\end{pmatrix}$ c) $C=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

**26.** Encuentra $x$ e $y$ tales que $A\cdot B=0$, siendo:

$$A=\begin{pmatrix}2 & -3 & -5\\ -1 & 4 & 5\\ 1 & -3 & -4\end{pmatrix} \text{ y } B=\begin{pmatrix}-1 & x & y\\ 1 & -3 & -5\\ -1 & x & y\end{pmatrix}$$

**27.** Halla la inversa de $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$ y la inversa de $B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

**28.** Utilizando los métodos vistos en clase, calcula las matrices inversas de:

$$A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 5 & 2\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

y comprueba que $AA^{-1}=I$ y $B^{-1}B=I$.
Comprueba además que:

a) $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ b) $(A^{-1})^{-1}=A$ c) $(3A)^{-1}=\frac{1}{3}A^{-1}$

**29.** Calcula, utilizando el método de Gauss, las inversas de las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

y comprueba que $A^{-1}A=I$ y $BB^{-1}=I$

## Ecuaciones y sistemas matriciales

**30.** Si $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, resuelve las ecuaciones:

a) $A^2+3X=A$
b) $AX=B$

**31.** Calcula $X$ e $Y$ en el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 2X-3Y=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}\\ X-Y=\begin{pmatrix}0 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix}\end{array}\right\}$$

**32.** Obtén la matriz $X$ en las siguientes ecuaciones matriciales:

a) $AX+B=C$ h) $X+3A^{-1}=A+B$
b) $XA=2B+C$ i) $AX-A=I-AX$

c) $AX + A = B$
d) $A + 2XB = C$
e) $A - BX = C$
f) $AX = BX + C$
g) $XA - B = X$
j) $AX + A^{-1}X = I$
k) $X - A^2X = B$
l) $XA + A^t = XB$
m) $XA + XA^t = C$
n) $AXB = C$

**33.** Resuelve la ecuación matricial $2X - AB = A^2$, donde:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

**34.** Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$$

(a) Calcular las matrices *C* y *D*, sabiendo que *AC* = *BD* = *I*, siendo *I* la matriz identidad de orden dos.
(b) Discutir y resolver el sistema dado por:

$$\left(C^{-1} - D^{-1}\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

siendo $C^{-1}$ y $D^{-1}$ las matrices inversas de las matrices *C* y *D* indicadas en el apartado anterior.

**35.** Encuentra una matriz $X$ que verifique $X - B^2 = AB$ siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

**36.** Siendo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad y \quad D = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 8 & 13 \end{pmatrix}$$

resuelve la ecuación matricial $AB + CX = D$.

## Rango de una matriz

**37.** Calcula, por el método de Gauss, el rango de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 10 & -8 \end{pmatrix}$

e) $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & 7 & 9 & 4 \end{pmatrix}$

f) $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 11 \\ 1 & -1 & 6 & 29 \end{pmatrix}$

c) $C=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 4 & 2 & -1\\ 6 & 3 & 2\end{pmatrix}$

g) $G=\begin{pmatrix}1 & -3 & -1 & -1\\ 1 & 5 & 3 & 3\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 3 & 7 & 5 & 5\end{pmatrix}$

d) $D=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & -3\\ -1 & 3 & 1 & 4\\ 2 & 1 & 5 & -1\end{pmatrix}$

h) $H=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$

**38.** Calcula el rango de las siguientes matrices:

a) $A=\begin{pmatrix}2 & -2 & 0\\ 4 & 2 & 2\\ -2 & 2 & -4\end{pmatrix}$

c) $C=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ 3 & 2 & -1\end{pmatrix}$

b) $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 4 & 6 & 9\\ -3 & -6 & -9 & 1\end{pmatrix}$

d) $D=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 1\\ -2 & 0 & 0\end{pmatrix}$