Problemas resueltos correspondientes a la selectividad de Matemáticas II de junio de 2009, Andalucía

Pedro González Ruiz

septiembre de 2011

1. Opción A

Problema 1.1 Calcular el siguiente límite (ln denota logaritmo neperiano):

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{2}{x^2-1}\right)$$

Sea

$$l=\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{2}{x^2-1}\right)=\frac{1}{\ln 1}-\frac{2}{1^2-1}=\frac{1}{0}-\frac{2}{0}=\infty-\infty$$

es decir, indeterminado. Efectuando la diferencia:

$$l=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1-2\ln x}{(x^2-1)\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1-\ln x}{(x-1)(x+1)\ln x}$$

El factor $x+1$ es irrelevante, pues $\lim_{x\to 1}(x+1)=2$, y usando la equivalencia $\ln x\sim x-1$, cuando $x\to 1$ (ver tabla de equivalencias, en el documento `calculodelimites.pdf`), resulta:

$$l=\frac{1}{2}\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1-2\ln x}{(x-1)^2}=\{\text{L'Höpital}\}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 1}\frac{2x-2\cdot\frac{1}{x}}{2(x-1)}=\{\text{simplificando}\}=$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x(x-1)}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x(x-1)}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{1}=1$$

luego $l=1$.

Problema 1.2 Sea $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x)=x|x-1|$$

1. Esbozar la gráfica de f.
2. Comprobar que la recta de ecuación $y=x$ es la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=0$.
3. Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de f y la de dicha tangente.

Desarrollamos f utilizando la definición de valor absoluto:

$$|u|=\begin{cases}-u, & \text{si } u<0\\ u, & \text{si } u\geq 0\end{cases}\Longrightarrow |x-1|=\begin{cases}-x+1, & \text{si } x<1\\ x-1, & \text{si } x\geq 1\end{cases}$$

luego

$$f(x) = \begin{cases} x(1-x), & \text{si } x < 1 \\ x(x-1), & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Para obtener la gráfica de f hay que dibujar cada uno de los trozos, en concreto, las parábolas:

$$p_1(x) = x(1-x),\ x < 1;\ p_2(x) = x(x-1),\ x \geq 1$$

Comencemos con $y = p_1(x) = x(1-x) = x - x^2$. Para $x = 0$ es $y = 0$, y si $y = 0$, entonces:

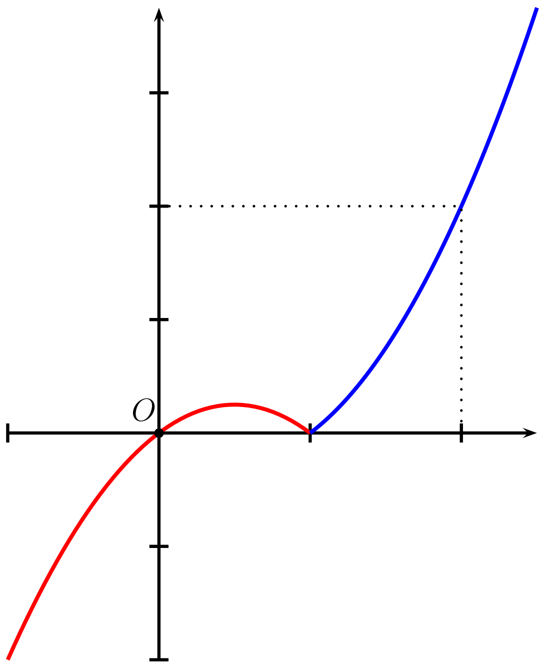
$$x(1-x) = 0 \Longrightarrow x = 0, 1$$

luego los cortes con con los ejes son $(0,0)$ y $(1,0)$. Calculemos el vértice:

$$p_1'(x) = 1 - 2x \Longrightarrow 1 - 2x = 0 \Longrightarrow x = \frac{1}{2}$$

y como $p_1''(x) = -2 < 0$, p_1 es cóncava y el vértice es un máximo de valor $p_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$, es decir $V_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$. Es sencillo comprobar que p_1 crece para $x < \frac{1}{2}$ y decrece para $x > \frac{1}{2}$.

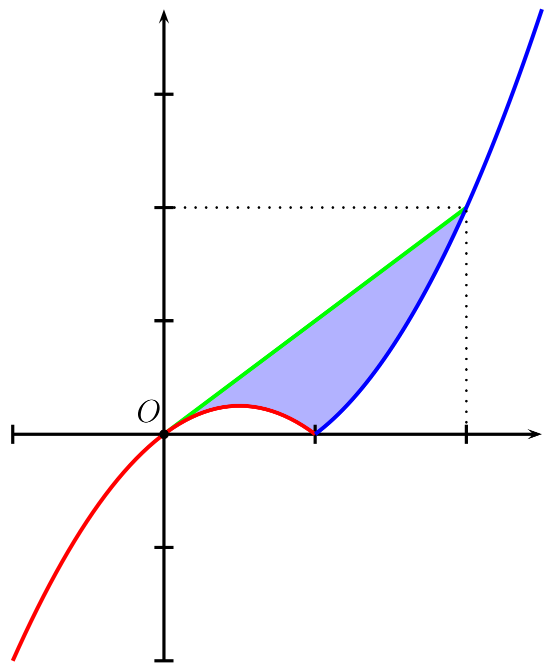
Sigamos con $y = p_2(x) = x(x-1) = x^2 - x$, para $x \geq 1$. Para $x = 1$ es $y = p_2(1) = 0$, luego p_2 pasa por $(1,0)$. Además $p_2'(x) = 2x - 1$, y como $x \geq 1$, p_2 crece en $I = [1, +\infty[$. Por último $p_2''(x) = 2 > 0$, luego p_2 es convexa en I, y la gráfica de f es (en rojo p_1 y en azul p_2):



Para el apartado segundo, la recta tangente de f en $x = 0$, es la recta tangente de p_1 en $x = 0$, es decir:

$$y = p_1(0) + p_1'(0)(x - 0) = \left\{ \begin{array}{l} p_1(0) = 0 \\ p_1'(0) = 1 \end{array} \right\} = 0 + 1(x - 0) = x$$

Por último, la gráfica conjunta de f y la recta tangente (en verde) es:



El área del recinto pedido es pues:

$$S = \int_0^2 \big(x - f(x)\big)\,dx = \int_0^1 \big(x - p_1(x)\big)\,dx + \int_1^2 \big(x - p_2(x)\big)\,dx = S_1 + S_2$$

donde

$$S_1 = \int_0^1 \big(x - p_1(x)\big)\,dx = \int_0^1 \big(x - x(1-x)\big)\,dx = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$$
$$S_2 = \int_1^2 \big(x - p_2(x)\big)\,dx = \int_1^2 \big(x - x(x-1)\big)\,dx = \int_1^2 (2x - x^2)\,dx = \frac{2}{3}$$

Por consiguiente:

$$S = S_1 + S_2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$$

Problema 1.3 Sean F_1, F_2 y F_3 las filas primera, segunda y tercera, respectivamente, de una matriz B de orden 3, cuyo determinante vale -2. Calcular, indicando las propiedades utilizadas:

1. El determinante de B^{-1}.
2. El determinante de $(B^t)^4$ (B^t es la matriz traspuesta de B).
3. El determinante de $2B$.
4. El determinante de una matriz cuadrada C cuyas filas primera, segunda y tercera son, respectivamente, $5F_1 - F_3$, $3F_3$, F_2.

Sea

$$B = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}, \quad |B| = -2$$

1. Como $|B| \neq 0$, existe B^{-1}, y como $|B^{-1}| = \dfrac{1}{|B|}$, resulta:

$$|B^{-1}| = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

2. Teniendo en cuenta que $|B^t| = |B|$ y que $|B^n| = |B|^n$, para todo entero n, es:

$$|(B^t)^4| = |B^t|^4 = |B|^4 = (-2)^4 = 16$$

3. Dada una matriz cuadrada A de orden n, sabemos que para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$, es:

$$|\lambda \cdot A| = \lambda^n \cdot |A|$$

   En nuestro caso es $n = 3$, luego:

$$|2B| = 2^3|B| = 8|B| = 8 \cdot (-2) = -16$$

4. Por último, sea

$$A = \begin{pmatrix} 5F_1 - F_3 \\ 3F_3 \\ F_2 \end{pmatrix}$$

   Entonces:

$$|A| = \begin{vmatrix} 5F_1 - F_3 \\ 3F_3 \\ F_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5F_1 \\ 3F_3 \\ F_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} F_3 \\ 3F_3 \\ F_2 \end{vmatrix}$$

   El segundo determinante es cero, pues la primera y segunda fila son proporcionales, luego

$$|A| = \begin{vmatrix} 5F_1 \\ 3F_3 \\ F_2 \end{vmatrix} = 5 \cdot 3 \begin{vmatrix} F_1 \\ F_3 \\ F_2 \end{vmatrix} = 15 \cdot \begin{vmatrix} F_1 \\ F_3 \\ F_2 \end{vmatrix}$$

   En este último, permutamos la segunda y tercera filas, con lo cual, el determinante cambia de signo, por tanto:

$$|A| = -15 \cdot \begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{vmatrix} = -15 \cdot |B| = (-15) \cdot (-2) = 30$$

Problema 1.4 Se consideran las rectas r y s definidas como:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = \lambda - 2 \end{cases}, \quad s \equiv \begin{cases} x = \mu \\ y = \mu - 1 \\ z = -1 \end{cases}$$

Hallar la ecuación de la perpendicular común a r y a s.

Las rectas r y s en forma punto–vector director son:

$$r \equiv \begin{cases} R(1, 1, -2) \\ \vec{u} = (0, 0, 1) \end{cases}, \quad s \equiv \begin{cases} S(0, -1, -1) \\ \vec{v} = (1, 1, 0) \end{cases}$$

Para evitar trivialidades, comprobemos que las rectas se cruzan, lo cual ocurrirá cuando el determinante $|\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{RS}| \neq 0$. En efecto:

$$|\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{RS}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Sea p la recta que nos piden. Por ser p perpendicular a r y s, un vector director de p es:

$$\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1, 1, 0)$$

Sea $X(x, y, z)$ un punto cualquiera de p. Como p corta a r, es $|\vec{w}, \vec{u}, \overrightarrow{RX}| = 0$, es decir:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & x-1 \\ 1 & 0 & y-1 \\ 0 & 1 & z+2 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \{\text{desarrollando y simplificando}\} \Longrightarrow x + y = 2$$

Como p corta a s, es $|\vec{w}, \vec{v}, \overrightarrow{SX}| = 0$, es decir:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & x \\ 1 & 1 & y+1 \\ 0 & 0 & z+1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \{\text{desarrollando y simplificando}\} \Longrightarrow z + 1 = 0$$

y obtenemos p como intersección de dos planos, es decir:

$$p \equiv \begin{cases} x + y = 2 \\ z + 1 = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Aquí damos el problema por acabado. No obstante, vamos a hacer algunas comprobaciones para asegurar la fiabilidad del resultado.

Parametrizamos p mediante (1) para comprobar que el vector director resultante de la parametrización es $\vec{w}$ o alguna combinación lineal de el. En efecto, tomando $x = t$, es:

$$p \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 2 - t \\ z = -1 \end{cases}$$

y el vector director es $\vec{w_1} = (1, -1, 0) = -\vec{w}$.

Sea P_1 el punto de corte de r y p, es decir, $P_1 = r \cap p$. Juntándolo todo:

$$x + y = 2, \; z + 1 = 0, \; x = 1, \; y = 1, \; z = \lambda - 2$$

y resolviendo este sistema elemental resulta $x = 1$, $y = 1$, $z = -1$, luego $P_1(1, 1, -1)$.

Sea P_2 el punto de corte de s y p, es decir, $P_1 = s \cap p$. Juntándolo todo:

$$x + y = 2, \; z + 1 = 0, \; x = \mu, \; y = \mu - 1, \; z = -1$$

tenemos:

$$2 = x + y = \mu + \mu - 1 = 2\mu - 1 \Longrightarrow 3 = 2\mu \Longrightarrow \mu = \frac{3}{2}$$

luego $P_2\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -1\right)$.

Una última comprobación, el vector $\overrightarrow{P_1P_2}$ debe ser una combinación lineal de $\vec{w}$, veámoslo:

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \left(\frac{3}{2} - 1, \frac{1}{2} - 1, -1 + 1\right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right) = -\frac{1}{2}\vec{w}$$

2. Opción B

Problema 2.1 Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1}, & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 3x - 1, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

1. Estudiar la continuidad y derivabilidad de f.
2. Determinar sus asíntotas y extremos relativos.
3. Esbozar la gráfica de f

El trozo $\dfrac{1}{x-1}$ es continuo siempre que $x \neq 1$, pero el valor $x = 1$ no nos afecta, pues ha de ser $x < 0$. El segundo trozo, $x^2 - 3x - 1$, es un polinomio, y por tanto, continuo, luego f es continua en todo $\mathbb{R}$. También es derivable en todo $\mathbb{R}$, salvo quizás en $x = 0$, punto de separación de los dos trozos. Tenemos:

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{(x-1)^2}, & \text{si } x < 0 \\ 2x - 3, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Como $f'(0^-) = \dfrac{-1}{(0-1)^2} = -1$ y $f'(0^+) = 2 \cdot 0 - 3 = -3$, f no es derivable en $x = 0$. En conclusión:

$$f \text{ es continua en } \mathbb{R},\ f \text{ es derivable en } \mathbb{R} - \{0\}.$$

Para la segunda parte, al ser f continua en todo $\mathbb{R}$, no tiene asíntotas verticales. Como

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x-1} = 0$$

la recta $y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$. No existen asíntotas oblicuas.

El trozo $f_1(x) = \dfrac{1}{x-1}$ es tal que $f_1'(x) = -\dfrac{1}{(x-1)^2} < 0$, luego f_1 decrece en $I =]-\infty, 0[$, y por consiguiente, f no tiene extremos en I.

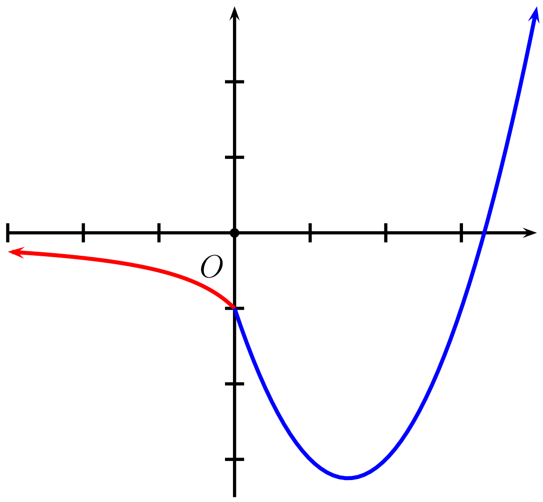
Sea $f_2(x) = x^2 - 3x - 1$, con $x \in J = [0, +\infty[$. Derivando:

$$f_2'(x) = 2x - 3 \Longrightarrow 2x - 3 = 0 \Longrightarrow x = \frac{3}{2}$$

y como $f_2''(x) = 2 > 0$, el punto $x = \frac{3}{2}$ es un mínimo local de valor

$$f_2\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{3}{2} - 1 = -\frac{13}{4}$$

es decir, el punto $M\left(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{13}{4}\right)$ es un mínimo local. Juntando todos los resultados, la gráfica resultante es (en rojo f_1 y en azul f_2):



Problema 2.2 Considerar la curva de ecuación $y = x^3 - 3x$.

1. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto de abscisa $x = -1$.
2. Calcular el área del recinto limitado por la curva dada y la recta $y = 2$.

Sea $y = f(x) = x^3 - 3x$. La recta tangente en $x = -1$ es:

$$y = f(-1) + f'(-1)(x+1)$$

Ahora bien, $f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) = -1 + 3 = 2$. Por otro lado:

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1) \Longrightarrow f'(-1) = 0$$

y la recta tangente queda como:

$$y = 2 + 0 \cdot (x+1) = 2, \text{ es decir, } y = 2$$

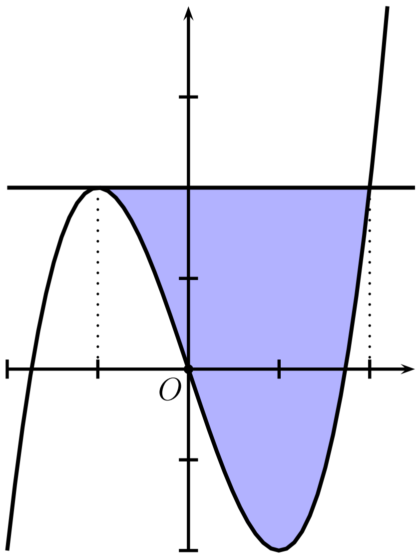
Para el cálculo del área, tenemos que dibujar el recinto de integración. La función f es impar, luego nos limitamos al intervalo $x \in [0, +\infty[$, y los valores negativos de x no se tendrán en cuenta. Tenemos:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 3x = x(x^2 - 3) = x(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) \\ f'(x) &= 3(x-1)(x+1) \\ f''(x) &= 6x \end{aligned}$$

La tabla de variaciones de estas funciones es:

x	0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f(x)$	0	$-$	-2	$-$	0	$+$	$+\infty$
$f'(x)$		$- \searrow$	0	$+ \nearrow$		$+ \nearrow$	
$f''(x)$		$+$		$+$		$+$	

Por consiguiente, el recinto es:



La superficie S es:

$$S = \int_{-1}^{2} \left[2 - (x^3 - 3x)\right]\, dx = \int_{-1}^{2} (2 - x^3 + 3x)\, dx = \left[2x - \frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2}\right]_{-1}^{2} = \frac{27}{4}$$

Problema 2.3 Una empresa envasadora ha comprado un total de 1 500 cajas de pescado en tres mercados diferentes, a un precio por caja de 30, 20 y 40 euros respectivamente. El coste total de la operación ha sido de 40 500 euros. Calcular cuánto ha pagado la empresa en cada mercado, sabiendo que en el primero de ellos ha comprado el 30 % de las cajas.

Sean

$$\begin{aligned} x &= \text{número de cajas compradas en el mercado primero} \\ y &= \text{número de cajas compradas en el mercado segundo} \\ z &= \text{número de cajas compradas en el mercado tercero} \end{aligned}$$

Por el enunciado del problema es $x + y + z = 1500$, $30x + 20y + 40z = 40500$. Simplificando:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1500 \\ 3x + 2y + 4z &= 4050 \end{aligned} \qquad (2)$$

Además:

$$x = 30\,\%(1500) = \frac{30 \cdot 1500}{100} = 450$$

Sustituyendo en (2) y simplificando, resulta:

$$\begin{aligned} y + z &= 1050 \\ y + 2z &= 1350 \end{aligned}$$

sistema elemental cuya solución es $y = 750$, $z = 300$. En conclusión:

En el primer mercado se pagó $450 \cdot 30 = 13\,500$ euros
En el segundo mercado se pagó $750 \cdot 20 = 15\,000$ euros
En el tercer mercado se pagó $300 \cdot 40 = 12\,000$ euros

Problema 2.4 Consideremos la recta r definida por $\begin{cases} x+y=2 \\ y+z=0 \end{cases}$ y la recta s que pasa por los puntos $A(2,1,0)$ y $B(1,0,-1)$.

1. Estudiar la posición relativa de r y s.

2. Determinar un punto C de la recta r tal que los segmentos $\overline{CA}$ y $\overline{CB}$ sean perpendiculares.

Parametrizamos r tomando $y=t$, luego $x=2-y=2-t$, $z=-y=-t$, es decir:

$$r \equiv \begin{Bmatrix} x=2-t \\ y=t \\ z=-t \end{Bmatrix} \Longrightarrow r \equiv \begin{cases} P(2,0,0) \\ \vec{u}=(-1,1,-1) \end{cases}$$

Un vector director de s es $\vec{v}=\overrightarrow{BA}=(1,1,1)$, luego:

$$s \equiv \begin{cases} A(2,1,0) \\ \vec{v}=(1,1,1) \end{cases}$$

Calculemos el rango de la matriz

$$T=(\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{AP})=\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Es sencillo comprobar que $|T|=0$, luego el rango de T es <3, y como $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-2\neq 0$, el rango de T es 2, luego **las rectas se cortan**.

Para la segunda parte, como $C\in r$, C es de la forma $C(2-t,t,-t)$ para un cierto $t\in\mathbb{R}$. En fin:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CA}&=(2-(2-t),1-t,t)=(t,1-t,t) \\ \overrightarrow{CB}&=(1-(2-t),-t,-1+t)=(t-1,-t,t-1) \end{aligned}$$

Por tanto:

$$0=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=t(t-1)-t(1-t)+t(t-1)=3t(t-1)\Longrightarrow t=0,1$$

es decir, dos soluciones que corresponden a los puntos:

$$t=0\Longrightarrow C(2-t,t,-t)=C(2,0,0)\ ;\quad t=1\Longrightarrow C(2-t,t,-t)=C(1,1,-1)$$

Problemas resueltos correspondientes a la selectividad de Matemáticas II de septiembre de 2009, Andalucía

Pedro González Ruiz

septiembre de 2011

1. Opción A

Problema 1.1 Se considera la función $f:[1,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por:

$$f(x)=\sqrt{x^2-x}+x$$

Determinar la asíntota de la gráfica de f.

Como f es continua, no tiene asíntotas verticales. Por otro lado:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x}+x)=+\infty$$

luego f no tiene asíntotas horizontales. Veamos la oblicua. Estas son del tipo

$$y=mx+n,\ \text{con } m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x},\ n=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-mx)$$

En fin:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-x}+x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\sqrt{x^2-x}}{x}\right)=$$
$$=1+\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^2-x}{x^2}}=1+\sqrt{\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x}{x^2}}=1+\sqrt{1}=2$$

Hemos obtenido que $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=2$, o lo que es lo mismo, $f(x)\sim 2x$, cuando $x\to+\infty$.

Por otro lado:

$$n=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x}+x-2x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x}-x\right)=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2-x}-x)(\sqrt{x^2-x}+x)}{\sqrt{x^2-x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x-x^2}{f(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{f(x)}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{2x}=-\frac{1}{2}$$

luego la única asíntota es

$$y=2x-\frac{1}{2}$$

Problema 1.2 La curva $y = \dfrac{x^2}{2}$ divide al rectángulo R de vértices $A = (0,0)$, $B = (2,0)$, $C = (2,1)$ y $D = (0,1)$ en dos recintos.

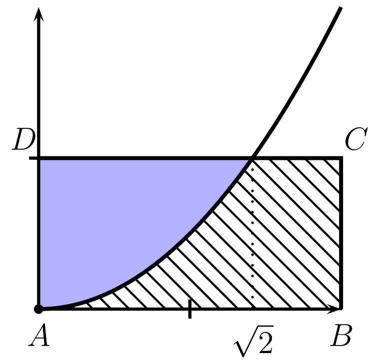
1. Dibujar dichos recintos.

2. Hallar el área de cada uno de ellos.

Sea $f(x) = \dfrac{x^2}{2}$. La gráfica de f es una parábola, f es par. Pasa por el origen $A(0,0)$, el cual es el vértice. Suponemos $x \geq 0$, pues el rectángulo $ABCD$ está situado en el primer cuadrante. Como $f'(x) = x$, f crece en $[0, +\infty[$, y al ser $f''(x) = 1 > 0$, f es convexa. Calculemos el punto de corte con la recta $y = 1$:

$$\frac{x^2}{2} = 1 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{2}, \text{ es decir, } x = \sqrt{2}$$

En definitiva, el recinto es:



Finalmente:

$$S_{\text{sombreada}} = \int_0^{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)\, dx = \left[x - \frac{x^3}{6}\right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Como la superficie del rectángulo $ABCD$ es 2, resulta:

$$S_{\text{rayada}} = 2 - \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{6 - 2\sqrt{2}}{3}$$

Problema 1.3 Discutir según los valores del parámetro λ el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} 3x + \lambda y &= 0 \\ x + \lambda z &= \lambda \\ x + y + 3z &= 1 \end{aligned}$$

y resolverlo para $\lambda = 0$.

Las matrices de los coeficientes y ampliada son:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & \lambda & 0 \\ 1 & 0 & \lambda \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad A' = \begin{pmatrix} 3 & \lambda & 0 & \vdots & 0 \\ 1 & 0 & \lambda & \vdots & \lambda \\ 1 & 1 & 3 & \vdots & 1 \end{pmatrix}$$

Los puntos verticales muestran la separación entre la matriz de los coeficientes y la ampliada. Desarrollando, resulta: $|A| = \lambda(\lambda - 6)$, luego

$$|A| = 0 \Longleftrightarrow \lambda = 0, 6$$

Por tanto:

- Si $\lambda \neq 0, 6 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow r = r(A) = 3$. La matriz ampliada también tiene rango 3, y el número de incógnitas n también es 3. En definitiva, el sistema es de Cramer, y tiene por tanto solución única.

- Para $\lambda = 0$, es $|A| = 0$, luego $r = r(A) < 3$. La matriz ampliada es

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

  La primera y segunda filas son proporcionales. Eliminamos pues aquella, con lo que la matriz se queda en:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

  El rango de esta matriz es 2, luego, $r = r(A) = r(A') = 2$, el número de incógnitas es $n = 3$, por tanto, el sistema es compatible con infinitas soluciones dependientes de $n - r = 3 - 2 = 1$ parámetro. Con la última matriz, el sistema queda como $x = 0$, $x + y + 3z = 1$, o bien $y + 3z = 1$. Llamando $z = t \Longrightarrow y = 1 - 3t$, y las soluciones son:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 - 3t \\ z = t \end{cases}$$

- Para $\lambda = 6$, es $|A| = 0$, luego $r(A) < 3$. La matriz ampliada es

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

  Para el cálculo de los rangos, vamos a utilizar la **reducción gaussiana**, y para ello, recordamos las operaciones elementales de fila:

  1. C_{ij} = cambiar las filas i, j.
  2. $M_i(k)$ = multiplicar la fila i por el número $k \neq 0$.
  3. $S_{ij}(k)$ = sumar a la fila i la fila j multiplicada por el número k.

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ M_1\left(\frac{1}{3}\right) \right\} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \{S_{21}(-1), S_{31}(-1)\} \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & 6 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ M_2\left(\frac{1}{2}\right) \right\} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \{S_{32}(-1)\} \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ M_3\left(-\frac{1}{2}\right) \right\} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & -1 & 3 & \vdots & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \end{pmatrix}$$

luego $r(A)=2$, $r(A')=3$, y el sistema es incompatible.

Problema 1.4 Consideremos el punto $P(1,0,0)$ y las rectas r y s definidas como

$$r \equiv x-3=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{-2}, \quad s \equiv (x,y,z)=(1,1,0)+\lambda(-1,2,0)$$

- Estudiar la posición relativa de r y s.
- Hallar la ecuación del plano π que pasando por P es paralelo a r y a s.

Escribamos las rectas en forma punto–vector director. Primero r:

$$x-3=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{-2}=t \Longrightarrow x=3+t,\ y=2t,\ z=-1-2t \Longrightarrow r \equiv \left\{\begin{array}{l} x=3+t \\ y=2t \\ z=-1-2t \end{array}\right.$$

Luego $r \equiv \left\{\begin{array}{l} Q(3,0,-1) \\ \vec{u}=(1,2,-2) \end{array}\right.$. También $s \equiv \left\{\begin{array}{l} R(1,1,0) \\ \vec{v}=(-1,2,0) \end{array}\right.$. Para estudiar la posición relativa de ambas consideremos la matriz:

$$A=(\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{RQ})=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Es sencillo comprobar que $|A|=2\neq 0 \Longrightarrow r(A)=3$, por consiguiente, las rectas se cruzan.

Para la segunda parte, como las rectas r y s son paralelas a π, los vectores directores de r y s son también vectores directores de π, luego:

$$\pi \equiv \left\{\begin{array}{l} P(1,0,0) \\ \vec{u}=(1,2,-2) \\ \vec{v}=(-1,2,0) \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}=0$$

Desarrollando y simplificando, obtenemos:

$$\pi \equiv 2x+y+2z-2=0$$

2. Opción B

Problema 2.1 De entre todos los rectángulos cuya área mide 16 cm^2, determinar las dimensiones del que tiene la diagonal de menor longitud.

Sea x la longitud de la base del rectángulo e y su altura. Sea D la longitud de la diagonal (función a minimizar). Por el teorema de Pitágoras:

$$D^2=x^2+y^2 \Longrightarrow D=\sqrt{x^2+y^2}$$

La superficie es $x\cdot y$, por tanto, la ecuación de condición es:

$$x\cdot y=16 \Longrightarrow y=\frac{16}{x} \tag{1}$$

Minimizar D es lo mismo que minimizar $H = D^2$, con lo cual nos evitamos las raíces cuadradas. Sustituyendo (1) en H, obtenemos:

$$H = D^2 = x^2 + y^2 = x^2 + \frac{256}{x^2}$$

Derivando:

$$H'(x) = 2x - \frac{512}{x^3} = \frac{2x^4 - 512}{x^3}$$

luego ha de ser

$$2x^4 - 512 = 0 \Longrightarrow x = 4$$

Derivando otra vez:

$$H''(x) = 2 + \frac{1536}{x^4}$$

Como $H''(4) > 0$, el punto $x = 4$ es un mínimo. Sustituyendo en (1), resulta $y = 4$. En conclusión:

$$x = y = 4 \text{ (cuadrado de lado 4)}$$

Problema 2.2 Sea f la función definida por:

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{4 - 9x^4}}$$

Hallar la primitiva F de f que cumple $F(0) = 3$.

Sugerencia: utilizar el cambio de variable $t = \dfrac{3x^2}{2}$.

Tenemos:

$$t = \frac{3}{2}x^2 \Longrightarrow dt = \frac{3}{2} \cdot 2x\,dx \Longrightarrow x\,dx = \frac{dt}{3}$$

Además:

$$\sqrt{4 - 9x^4} = \left\{x^2 = \frac{2t}{3}\right\} = \sqrt{4 - 9 \cdot \frac{4t^2}{9}} = \sqrt{4 - 4t^2} = \sqrt{4(1 - t^2)} = 2\sqrt{1 - t^2}$$

Por tanto:

$$\int \frac{x}{\sqrt{4 - 9x^4}}\,dx = \int \frac{\frac{dt}{3}}{2\sqrt{1 - t^2}} = \frac{1}{6}\int \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \frac{1}{6}\operatorname{arc\,sen} t$$

Deshaciendo el cambio:

$$F(x) = \frac{1}{6}\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{3x^2}{2}\right) + C$$

Por último:

$$3 = F(0) = C + \frac{1}{6}\operatorname{arc\,sen} 0 = C + 0 = C \Longrightarrow C = 3$$

En conclusión:

$$F(x) = \frac{1}{6}\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{3x^2}{2}\right) + 3$$

Problema 2.3 Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Determinar la matriz X que verifica $AX - B^t = 2C$ (B^t es la matriz traspuesta de B).

Es sencillo comprobar que $|A| = 4$, luego existe la matriz inversa A^{-1}. Despejemos X:

$$A \cdot X = B^t + 2C \Longrightarrow X = A^{-1}(B^t + 2C)$$

Calculemos A^{-1}:

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

También:

$$B^t + 2C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Por último:

$$X = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 5 & 18 \\ 7 & 30 \end{pmatrix}$$

Problema 2.4 Se consideran las rectas r y s definidas como:

$$r \equiv \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ x + y - z - 1 = 0 \end{cases}, \quad s \equiv \begin{cases} 2y + 1 = 0 \\ x - 2z + 3 = 0 \end{cases}$$

1. Determinar la ecuación del plano π que contiene a r y es paralelo a s.
2. ¿Existe algún plano que contenga a r y sea perpendicular a s?. Razonar la respuesta.

Parametrizamos r y s para conseguir la forma punto–vector. En r, sea $y = t$, luego:

$$x - y + 3 = 0 \Longrightarrow x = -3 + y = -3 + t$$
$$x + y - z - 1 = 0 \Longrightarrow -3 + t + t - z - 1 = 0 \Longrightarrow z = -4 + 2t$$

luego:

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = -3 + t \\ y = t \\ z = -4 + 2t \end{array} \right\} \equiv \left\{ \begin{array}{l} P(-3, 0, -4) \\ \vec{u} = (1, 1, 2) \end{array} \right.$$

Ahora s, llamando $z = t$, es:

$$s \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = -3 + 2t \\ y = -\dfrac{1}{2} \\ z = t \end{array} \right\} \equiv \left\{ \begin{array}{l} Q\left(-3, -\dfrac{1}{2}, 0\right) \\ \vec{v} = (2, 0, 1) \end{array} \right.$$

Como $r \subset \pi$, el punto y vector de r valen para π, y como $s \parallel \pi$, el vector $\vec{v}$ es también un vector director de π, luego:

$$\pi \equiv \left\{ \begin{array}{l} P(-3, 0, -4) \\ \vec{u} = (1, 1, 2) \\ \vec{v} = (2, 0, 1) \end{array} \right\} \Longrightarrow \begin{vmatrix} x + 3 & y & z + 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando y simplificando:

$$\pi \equiv x + 3y - 2z - 5 = 0$$

Para la segunda parte, si existiera tal plano, los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ deberían ser perpendiculares, ahora bien:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (1,1,2) \cdot (2,0,1) = 2 + 2 = 4 \neq 0$$

luego **no existe tal plano**.

Selectividad matemáticas Junio

Pedro González Ruiz

junio de 2010

1. Opción A

Problema 1.1 Sea f la función definida como

$$f(x) = \frac{ax^2+b}{a-x}, \quad \text{para } x \neq a$$

1. Calcular a y b para que la gráfica de f pase por el punto $(2,3)$ y tenga una asíntota oblicua con pendiente -4.
2. Para el caso $a=2$, $b=3$, obtener la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=1$.

Tenemos

$$3 = f(2) = \frac{4a+b}{a-2} \Longrightarrow 3a-6 = 4a+b \Longrightarrow a+b=-6$$

Por el algoritmo de la división polinómica, el cociente $c(x)$ entre ax^2+b y $-x+a$ es $c(x) = -ax-a^2$, luego la asíntota oblicua es $y=-ax-a^2$. Por tanto:

$$m = -4 = y' = -a \Longrightarrow a = 4$$

Sustituyendo en $a+b=-6$ resulta $b=-10$.

Para $a=2$, $b=3$ es $f(x) = \dfrac{2x^2+3}{2-x}$. La recta tangente en $x=1$ es $y=f(1)+f'(1)(x-1)$. Ahora bien:

$$f(1) = \frac{2+3}{2-1} = 5, \quad f'(x) = \frac{4x(2-x)+2x^2+3}{(2-x)^2} \Longrightarrow f'(1) = \frac{4\cdot 1+2+3}{1^2} = 9$$

luego, $y=f(1)+f'(1)(x-1) = 5+9(x-1) = 9x-4$, es decir, $y=9x-4$.

Problema 1.2 Calcular

$$\int_0^{\pi^2} \operatorname{sen}(\sqrt{x})\,dx$$

Sugerencia: efectuar el cambio $\sqrt{x}=t$.

Tenemos

$$I = \int_0^{\pi^2} \operatorname{sen}(\sqrt{x})\,dx = \left\{ \begin{array}{c} x = t^2 \\ dx = 2t\,dt \end{array} \right\} = 2\int_0^{\pi} t \operatorname{sen} t\,dt$$

Integrando por partes:

$$\int t \operatorname{sen} t\, dt = \left\{ \begin{array}{l} f(t) = t \\ g'(t) = \operatorname{sen} t \\ g(t) = -\cos t \\ f'(t) = 1 \end{array} \right\} = -t\cos t + \int \cos t\, dt = -t\cos t + \operatorname{sen} t$$

luego

$$I = 2\left[-t\cos t + \operatorname{sen} t\right]_0^{\pi} = 2\pi$$

Problema 1.3 Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Indicar los valores de m para los que A es invertible.
2. Resolver la ecuación matricial $XA - B^t = C$ para $m = 0$ (B^t es la matriz traspuesta de B).

Como $|A| = -(m-1)(m-3)$, resulta

$$A \text{ es invertible} \Longleftrightarrow m \neq 1 \wedge m \neq 3$$

Para $m = 0$ es $|A| = -3$ y:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^* = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 12 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

luego

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -12 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Por otro lado

$$XA - B^t = C \Longrightarrow XA = B^t + C \Longrightarrow X = (B^t + C)A^{-1}$$

Como

$$B^t + C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Finalmente

$$X = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -12 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -12 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Problema 1.4 Sean las rectas

$$r \equiv x - 1 = y = 1 - z, \quad s \equiv \begin{cases} x - 2y = -1 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

1. Determinar el punto de corte.
2. Hallar el ángulo que forman r y s.
3. Determinar la ecuación del plano que contiene a r y s.

Resolviendo el sistema

$$\begin{aligned} x - y &= 1 \\ y + z &= 1 \\ x - 2y &= -1 \end{aligned}$$

resulta como punto de corte $P(3, 2, -1)$. Parametrizamos r:

$$x - 1 = y = 1 - z = t \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{array} \right\} \Longrightarrow \vec{u} = \{\text{vector director de } r\} = (1, 1, -1)$$

Parametrizamos s, llamando $y = t$:

$$s \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = -1 + 2t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{array} \right\} \Longrightarrow \vec{v} = \{\text{vector director de } s\} = (2, 1, -1)$$

Si es $\varphi = \widehat{(r, s)}$, entonces

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}||}$$

Ahora bien

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \cdot 2 + (1)(1) + (-1)(-1) = 4, ||\vec{u}|| = \sqrt{3},\ ||\vec{v}|| = \sqrt{6}$$

luego

$$\cos\varphi = \frac{4}{\sqrt{3}\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \Longrightarrow \varphi = \arccos\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$$

Por último, el plano π que contiene a r y s es

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x - 3 & y - 2 & z + 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando y simplificando, resulta

$$\pi \equiv y + z = 1$$

2. Opción B

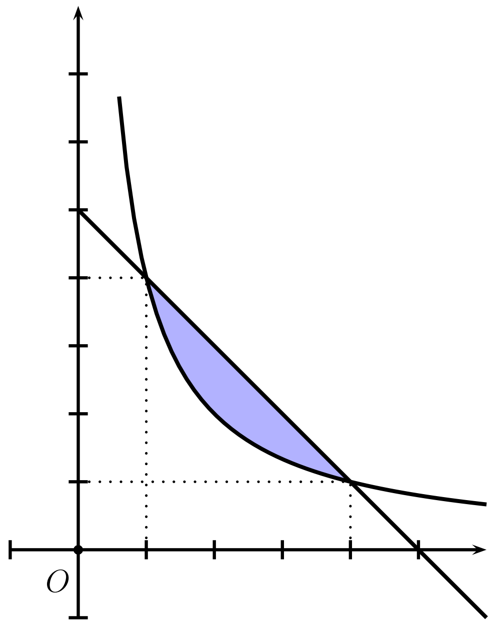
Problema 2.1 Calcular
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{\operatorname{sen} x}}{x^2}$$

Tenemos
$$l = \lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{\operatorname{sen} x}}{x^2} = \frac{e^0 - e^0}{0^2} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$$
Aplicando L'Höpital:
$$l = \lim_{x\to 0}\frac{e^x - \cos x\cdot e^{\operatorname{sen} x}}{2x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{e^x - \cos x\cdot e^{\operatorname{sen} x}}{x}$$
Vuelve a salir $\frac{0}{0}$. Aplicando L'Höpital otra vez:
$$l = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{e^x - \left(-\operatorname{sen} x\cdot e^{\operatorname{sen} x} + \cos^2 x\cdot e^{\operatorname{sen} x}\right)}{1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1-1}{1} = 0$$
luego $l = 0$.

Problema 2.2 Sean las funciones:
$$f(x) = 5 - x,\quad g(x) = \frac{4}{x},\ \text{para } x \neq 0$$

1. Esboza el recinto limitado por las gráficas de f y g indicando sus puntos de corte.
2. Calcular el área de dicho recinto.

La gráfica de f es una recta, luego con dos puntos es suficiente, en concreto $(5,0)$ y $(0,5)$. Para g, la recta $x=0$ es una asíntota vertical. Como $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$, la recta $y=0$ es una asíntota horizontal. Además $g'(x) = -\frac{4}{x^2}$, luego g decrece en todo su dominio. Los cortes de f y g son las raíces de la ecuación:
$$5 - x = \frac{4}{x} \Longrightarrow \{\text{simplificando}\} \Longrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Longrightarrow x = 1, 4$$
En definitiva, el recinto es:



Por último, el área S de dicho recinto es:

$$S = \int_1^4 \left(5 - x - \frac{4}{x}\right)\, dx = \left[5x - \frac{x^2}{2} - 4\ln x\right]_1^4 = \frac{15}{2} - 8\ln 2$$

Problema 2.3 Sea el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \lambda x + y + z &= \lambda + 2 \\ 2x - \lambda y + z &= 2 \\ x - y + \lambda z &= \lambda \end{aligned}$$

1. Discutirlo según los valores de λ. ¿Tiene siempre solución?.
2. Resolver el sistema para $\lambda = -1$.

La matriz de los coeficientes es:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 1 & -1 & \lambda \end{pmatrix}$$

Como $|A| = -(\lambda^3 + 1)$, resulta que

$$|A| = 0 \Longleftrightarrow \lambda^3 + 1 = 0 \Longrightarrow \lambda = -1$$

luego

- Si $\lambda \neq -1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow r(A) = 3$. La matriz ampliada también tiene rango 3, y el número de incógnitas también es 3. En definitiva, el sistema es de Cramer, y tiene por tanto solución única.
- Para $\lambda = -1$, es $|A| = 0$, luego $r(A) < 3$. La matriz ampliada es

  $$A' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

  La tercera fila es la opuesta de la primera, luego la eliminamos. Como $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, es $r = r(A) = r(A') = 2$, y como $n = \{\text{número de incógnitas}\} = 3$, el sistema es compatible con infinitas soluciones dependientes de $n - r = 3 - 2 = 1$ parámetro. Procedemos a resolverlo. Queda como:

  $$\begin{aligned} -x + y + z &= 1 \\ 2x + y + z &= 2 \end{aligned}$$

  Restando a la segunda la primera obtenemos $x = \frac{1}{3}$. Sustituyendo en cualquiera de las dos es $y + z = \frac{4}{3}$. Tomando $z = t$, resulta finalmente:

  $$x = \frac{1}{3},\ y = t,\ z = \frac{4}{3} - t$$

En cualquiera de los dos casos el sistema es compatible, y por consiguiente, tiene siempre solución.

Problema 2.4 Los puntos $P(2,0,0)$ y $Q(-1,12,4)$ son dos vértices de un triángulo. El tercer vértice S pertenece a la recta:

$$r \equiv \begin{cases} 4x+3z=33 \\ \quad\quad y=0 \end{cases}$$

1. Calcular las coordenadas del punto S sabiendo que r es perpendicular a la recta que pasa por P y S.

2. Comprobar si el triángulo es rectángulo.

Parametrizamos r, y para evitar fracciones, tomamos $x=3t$, luego

$$12t+3z=33 \Longrightarrow 4t+z=11 \Longrightarrow z=11-4t$$

luego

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x=3t \\ y=0 \\ z=11-4t \end{array} \right\} \Longrightarrow \vec{u} = \{\text{vector director de } r\} = (3,0,-4)$$

luego S es de la forma $S(3t,0,11-4t) \Longrightarrow \overrightarrow{PS} = (3t-2,0,11-4t)$. Imponiendo que $\overrightarrow{PS} \perp \vec{u}$, resulta:

$$0 = \overrightarrow{PS} \cdot \vec{u} = 3(3t-2) - 4(11-4t) = 0 = 25t-50 \Longrightarrow t=2$$

y por consiguiente $S=(3t,0,11-4t)=(6,0,3)$.

Por último

$$\overrightarrow{PS} = (4,0,3),\ \overrightarrow{PQ} = (-3,12,4) \Longrightarrow \overrightarrow{PS} \cdot \overrightarrow{PQ} = -12+12=0$$

luego el triángulo es rectángulo en P.

Selectividad Matemáticas II septiembre Andalucía

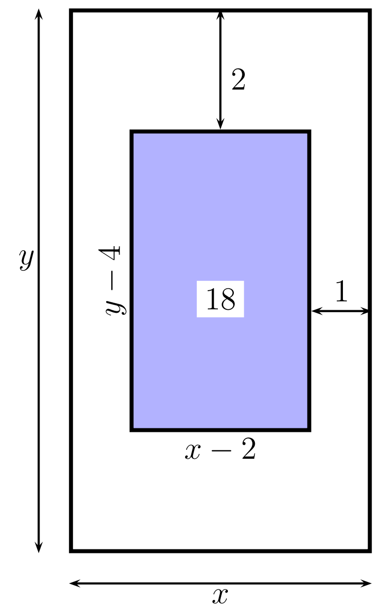
Pedro González Ruiz

septiembre de 2010

1. Opción A

Problema 1.1 Una hoja de papel tiene que contener 18 cm^2 de texto. Los márgenes superior e inferior han de tener 2 cm. cada uno y los laterales 1 cm. Calcular las dimensiones de la hoja para que el gasto de papel es mínimo.

Sean x la longitud horizontal e y la longitud vertical de la hoja. La función a minimizar es la superficie $S = x \cdot y$. Observando la figura:



el área del rectángulo sombreado es $(x-2)(y-4)$, luego la ecuación de condición es:

$$(x-2)(y-4) = 18$$

Despejando:

$$y - 4 = \frac{18}{x-2} \Longrightarrow y = 4 + \frac{18}{x-2} \tag{1}$$

luego

$$S = x \cdot y = x\left(4 + \frac{18}{x-2}\right)$$

Derivando y simplificando:

$$S'(x) = 4 \cdot \frac{x^2 - 4x - 5}{(x-2)^2}$$

Como ha de ser $S'(x) = 0$, resulta $x^2 - 4x - 5 = 0 \Longrightarrow x = -1, 5$, es decir, $x = 5$. Derivando otra vez:

$$S''(x) = \frac{72}{(x-2)^3} \Longrightarrow S''(5) = \frac{72}{3^3} > 0$$

luego $x = 5$ es un mínimo. Sustituyendo en (1), resulta:

$$y = 4 + \frac{18}{x-2} = 4 + \frac{18}{5-2} = 10$$

luego las dimensiones de la hoja son $x = 5$ cm, $y = 10$ cm.

Problema 1.2 Sea

$$I = \int \frac{5}{1 + \sqrt{e^{-x}}}\, dx$$

1. Expresar I haciendo el cambio de variable $t^2 = e^{-x}$.

2. Determinar I.

Tomando logaritmos neperianos en $t^2 = e^{-x}$:

$$2 \ln t = -x \Longrightarrow x = -2 \ln t \Longrightarrow dx = -\frac{2}{t}\, dt$$

Por tanto:

$$I = 5 \int \frac{-\frac{2}{t}}{1+t}\, dt = -10 \int \frac{1}{t(1+t)}\, dt$$

Descomponiendo en fracciones simples:

$$\frac{1}{t(1+t)} = \frac{(1+t)-t}{t(1+t)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}$$

Luego:

$$\int \frac{1}{t(1+t)}\, dt = \int \frac{1}{t}\, dt - \int \frac{1}{1+t}\, dt = \ln t - \ln(1+t) = \ln\left(\frac{t}{1+t}\right)$$

y por consiguiente

$$I = -10 \ln\left(\frac{t}{1+t}\right)$$

Deshaciendo el cambio:

$$\frac{t}{1+t} = \frac{e^{-x/2}}{1+e^{-x/2}} = \frac{\frac{1}{e^{x/2}}}{1 + \frac{1}{e^{x/2}}} = \frac{\frac{1}{e^{x/2}}}{\frac{e^{x/2}+1}{e^{x/2}}} = \frac{1}{1+e^{x/2}}$$

Por último:

$$I = -10 \int \frac{1}{t(1+t)}\, dt = -10 \cdot \ln\left(\frac{1}{1+e^{x/2}}\right) = 10 \cdot \ln(1 + e^{x/2})$$

En conclusión:

$$I = 10 \cdot \ln\left(1 + e^{x/2}\right) + C, \quad C = \text{constante arbitraria}$$

Problema 1.3 1. Discutir, según los valores del parámetro λ, el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} -x + \lambda y + z &= \lambda \\ \lambda x + 2y + (\lambda+2)z &= 4 \\ x + 3y + 2z &= 6 - \lambda \end{aligned}$$

2. Resolver el sistema anterior para $\lambda = 0$.

Las matrices de los coeficientes y ampliada son:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 2 & \lambda+2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A' = \begin{pmatrix} -1 & \lambda & 1 & \vdots & \lambda \\ \lambda & 2 & \lambda+2 & \vdots & 4 \\ 1 & 3 & 2 & \vdots & 6-\lambda \end{pmatrix}$$

Los puntos verticales muestran la separación entre la matriz de los coeficientes y la ampliada. Desarrollando, resulta: $|A| = 8\lambda - \lambda^2 = \lambda(8-\lambda)$, luego

$$|A| = 0 \Longleftrightarrow \lambda = 0, 8$$

Por tanto:

- Si $\lambda \neq 0, 8 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow r(A) = 3$. La matriz ampliada también tiene rango 3, y el número de incógnitas también es 3. En definitiva, el sistema es de Cramer, y tiene por tanto solución única.
- Para $\lambda = 8$, es $|A| = 0$, luego $r(A) < 3$. La matriz ampliada es

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 8 & 1 & 8 \\ 8 & 2 & 10 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Para el cálculo de los rangos, vamos a utilizar la **reducción gaussiana**, y para ello, recordamos las operaciones elementales de fila:

1. C_{ij} = cambiar las filas i, j.
2. $M_i(k)$ = multiplicar la fila i por el número $k \neq 0$.
3. $S_{ij}(k)$ = sumar a la fila i la fila j multiplicada por el número k.

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 8 & 1 & \vdots & 8 \\ 8 & 2 & 10 & \vdots & 4 \\ 1 & 3 & 2 & \vdots & -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{M_2\left(\frac{1}{2}\right)\right\} \Longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 8 & 1 & \vdots & 8 \\ 4 & 1 & 5 & \vdots & 2 \\ 1 & 3 & 2 & \vdots & -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \{S_{21}(4), S_{31}(1)\} \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 8 & 1 & \vdots & 8 \\ 0 & 33 & 9 & \vdots & 34 \\ 0 & 11 & 3 & \vdots & 6 \end{pmatrix} \Longrightarrow \{C_{23}\} \Longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 8 & 1 & \vdots & 8 \\ 0 & 11 & 3 & \vdots & 6 \\ 0 & 33 & 9 & \vdots & 34 \end{pmatrix} \Longrightarrow \{S_{32}(-3)\} \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 8 & 1 & \vdots & 8 \\ 0 & 11 & 3 & \vdots & 6 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 16 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{M_3\left(\frac{1}{16}\right)\right\} \Longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 8 & 1 & \vdots & 8 \\ 0 & 11 & 3 & \vdots & 6 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \end{pmatrix}$$

luego $r(A) = 2$, $r(A') = 3$, y el sistema es incompatible.

- Para $\lambda = 0$, es $|A| = 0$, luego $r(A) < 3$. La matriz ampliada es

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 2 & 2 & \vdots & 4 \\ 1 & 3 & 2 & \vdots & 6 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ M_2\left(\frac{1}{2}\right), S_{31}(1) \right\} \Longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & 3 & 3 & \vdots & 6 \end{pmatrix} \Longrightarrow \{S_{32}(-3)\} \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

luego $r(A) = 2$, $r(A') = 2$, y el sistema es compatible con infinitas soluciones dependientes de 1 parámetro. Con la última matriz, el sistema queda como $-x + z = 0$, $y + z = 2$. Llamando $z = t$, resulta:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2 - t \\ z = t \end{cases}$$

Problema 1.4 Hallar la ecuación del plano que es paralelo a la recta:

$$r \equiv \begin{cases} x - 2y + 11 = 0 \\ 2y + z - 19 = 0 \end{cases}$$

y contiene a la recta:

$$s \equiv \begin{cases} x = 1 - 5\lambda \\ y = -2 + 3\lambda \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases}$$

Sea π el plano pedido. Parametrizamos r, tomando $y = t$, luego:

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = -11 + 2t \\ y = t \\ z = 19 - 2t \end{array} \right\} \Longrightarrow \vec{u} = \{\text{vector director de } r\} = (2, 1, -2)$$

Como $r \parallel \pi$, $\vec{u}$ es un vector director de π. Por otro lado

$$s \equiv \left\{ \begin{array}{l} P(1, -2, 2) \\ \vec{v} = (-5, 3, 2) \end{array} \right\} \Longrightarrow \pi \equiv \begin{cases} P(1, -2, 2) \\ \vec{u} = (2, 1, -2) \\ \vec{v} = (-5, 3, 2) \end{cases}$$

ya que $s \subset \pi$. Por consiguiente:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x - 1 & y + 2 & z - 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando y simplificando, resulta

$$\pi \equiv 8x + 6y + 11z - 18 = 0$$

2. Opción B

Problema 2.1 Consideremos la funcion $f : [0,4] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b, & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ cx, & \text{si } 2 < x \le 4 \end{cases}$$

1. Sabiendo que f es derivable en todo el dominio y que verifica $f(0) = f(4)$, determinar los valores de a, b, c.
2. Para $a = -3$, $b = 4$, $c = 1$, hallar los extremos absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que alcanzan).

Como f es derivable en $[0,4]$, f es continua en $x = 2$, luego:

$$\left.\begin{array}{l} f(2^-) = 4 + 2a + b \\ f(2^+) = 2c \end{array}\right\} \Longrightarrow 4 + 2a + b = 2c \Longrightarrow 2a + b - 2c = -4$$

Derivando:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + a, & \text{si } 0 < x < 2 \\ c, & \text{si } 2 < x < 4 \end{cases}$$

Por tanto:

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-) = 4 + a \\ f'(2^+) = c \end{array}\right\} \Longrightarrow 4 + a = c \Longrightarrow a - c = -4$$

Por último:

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = b \\ f(4) = 4c \end{array}\right\} \Longrightarrow b = 4c \Longrightarrow b - 4c = 0$$

Resolviendo el sistema:

$$\begin{aligned} 2a + b - 2c &= -4 \\ a - c &= -4 \\ b - 4c &= 0 \end{aligned}$$

resulta $a = -3$, $b = 4$, $c = 1$, luego:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 4, & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ x, & \text{si } 2 \le x \le 4 \end{cases}$$

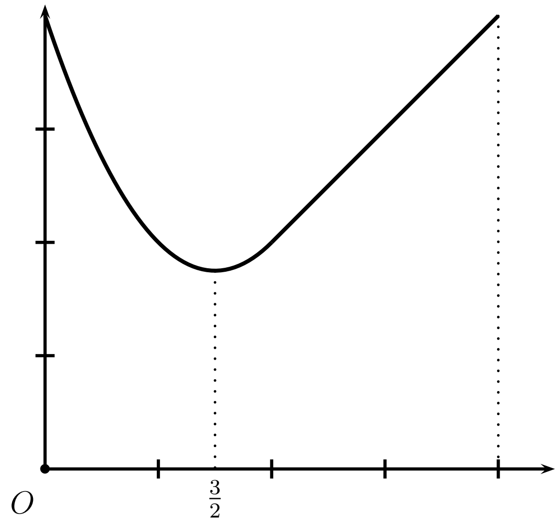
Para calcular los extremos absolutos, lo más sencillo es dibujar la gráfica de f. Sea $g(x) = x^2 - 3x + 4$, $x \in [0,2]$. La gráfica de g es una parábola. Calculemos el vértice:

$$g'(x) = 2x - 3 = 0 \Longrightarrow x = \frac{3}{2}$$

que cae dentro de $[0,2]$. Como $g''(x) = 2 > 0$, g es convexa y el vértice $x = \frac{3}{2}$ es un mínimo local de f, de valor:

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{3}{2} + 4 = \frac{7}{4}$$

Si $x \in [2,4] \Longrightarrow f(x) = x$, que es una recta. En definitiva, la gráfica de f es:



y en conclusión: los puntos $(0,4)$, $(4,4)$ son máximos absolutos, y $\left(\frac{3}{2},\frac{7}{4}\right)$ es un mínimo local y absoluto.

Problema 2.2 Consideremos la funcion $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ dada por $f(x)=x^2+4$.

1. Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=1$.
2. Esbozar el recinto limitado por la gráfica de f, el eje de ordenadas y la recta de ecuación $y=2x+3$. Calcular su área.

La recta tangente en $x=1$ es $y=f(1)+f'(1)(x-1)$. Ahora bien:

$$f(1)=1^2+4=5,\quad f'(x)=2x\Longrightarrow f'(1)=2$$

luego

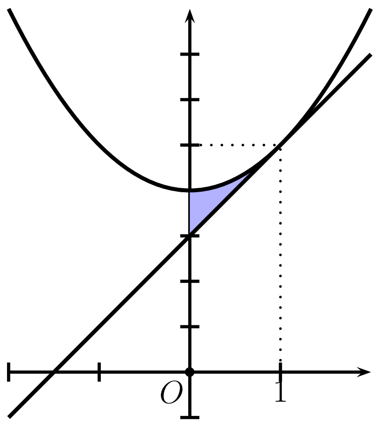
$$y=f(1)+f'(1)(x-1)=5+2(x-1)=2x+3$$

es decir, $y=2x+3$.

La gráfica de f es una parábola. Calculemos su vértice:

$$f'(x)=2x=0\Longrightarrow x=0$$

Como $f''(x)=2>0$, f es convexa y el vértice $x=0$ es un mínimo local de valor $f(0)=0^2+4=4$. Además, f decrece en $]-\infty,0[$ y crece en $]0,+\infty[$. En fin, el recinto es:



Por último, el área es:

$$S = \int_0^1 \left[x^2 + 4 - (2x+3)\right]\, dx = \int_0^1 (x-1)^2\, dx = \left[\frac{(x-1)^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

Problema 2.3 Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Calcular la matriz X que cumpla la ecuación $A \cdot X \cdot B = C$.

Como $|A| = 1$ y $|B| = -1$, A y B son inversibles, y:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Visto esto, despejemos X:

$$AXB = C \Longrightarrow A^{-1}(AXB) = A^{-1}C \Longrightarrow XB = A^{-1}C \Longrightarrow (XB)B^{-1} = (A^{-1}C)B^{-1} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow X = A^{-1}CB^{-1}$$

luego

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

Problema 2.4 Consideremos los planos π_1, π_2 y π_3 dados respectivamente por las ecuaciones:

$$\pi_1 \equiv x + y = 1, \quad \pi_2 \equiv ay + z = 0, \quad \pi_3 \equiv x + (a+1)y + az = a + 1$$

1. ¿Cuánto ha de valer a para que no tengan ningún punto en común?.
2. Para $a = 0$, determinar la posición relativa de los planos.

Discutamos el sistema formado por las ecuaciones implícitas de los tres planos:

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ ay + z &= 0 \\ x + (a+1)y + az &= a + 1 \end{aligned}$$

Las matrices de los coeficientes y ampliada son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 1 & a+1 & a \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & a & 1 & \vdots & 0 \\ 1 & a+1 & a & \vdots & a+1 \end{pmatrix}$$

Desarrollando, es $|A| = a(a-1)$, y por tanto:

$$|A| = 0 \Longleftrightarrow a = 0, 1$$

En fin:

- Si $a \neq 0, 1$ es $|A| \neq 0 \Longrightarrow r(A) = 3$. La matriz ampliada también tiene rango 3, y el número de incógnitas también es 3. En definitiva, el sistema es de Cramer, y tiene por tanto solución única, es decir, los tres planos se cortan en un único punto, caso que no nos han pedido.

- Supongamos que $a = 1$. Utilizando las notaciones del problema (1.3), la matriz ampliada es:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \vdots & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \{S_{31}(-1)\} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \{S_{32}(-1)\} \Longrightarrow$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \end{pmatrix}$$

  luego $r(A) = 2$, $r(A') = 3$, y el sistema es incompatible, es decir, los tres planos no tienen punto común. Esta es pues la respuesta al primer apartado, a la espera de lo que pase con el siguiente caso.

- Supongamos que $a = 0$. La matriz ampliada es:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  No es necesario utilizar aquí la reducción gaussiana, ya que a simple vista, la 3ª fila es idéntica a la 1ª, luego eliminamos aquella, y la matriz, a efectos de sistema queda como

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

  Como el menor $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, es $r(A) = 2$, $r(A') = 2$, y el sistema es compatible con infinitas soluciones dependientes de 1 parámetro, es decir, los tres planos (en realidad 2, ya que $\pi_1 \equiv \pi_3$) se cortan en una recta.

En conclusión:

- Para que los tres planos no tengan ningún punto en común, ha de ser $a = 1$.

- Para $a = 0$, los tres planos se cortan en una recta.

Selectividad Matemáticas II junio 2011, Andalucía

Pedro González Ruiz

junio de 2011

1. Opción A

Problema 1.1 Se desea construir un depósito cilíndrico cerrado de área total igual a 54 m^2. Determinar el radio de la base y la altura del cilindro para que éste tenga volumen máximo.

Sean x el radio de la base e y la altura del cilindro. La función a maximizar es el volumen $V = \pi x^2 y$. La superficie total es $S_T = 2\pi xy + 2\pi x^2$, luego la ecuación de condición es:

$$2\pi xy + 2\pi x^2 = 54$$

Despejando:

$$y = \frac{27 - \pi x^2}{\pi x} \tag{1}$$

y por consiguiente:

$$V = \pi x^2 \frac{27 - \pi x^2}{\pi x} = 27x - \pi x^3$$

Derivando:

$$V'(x) = 27 - 3\pi x^2$$

Como ha de ser $V'(x) = 0$, resulta $3\pi x^2 - 27 = 0 \Longrightarrow x = \pm\dfrac{3}{\sqrt{\pi}}$, es decir, $x = \dfrac{3}{\sqrt{\pi}}$. Derivando otra vez:

$$V''(x) = -6\pi x \Longrightarrow V''\left(\frac{3}{\sqrt{\pi}}\right) < 0$$

Luego en el punto $x = \frac{3}{\sqrt{\pi}}$ tenemos un máximo. Sustituyendo en (1), obtenemos $y = \frac{6}{\sqrt{\pi}}$, y en conclusión:

$$\text{radio de la base} = \frac{3}{\sqrt{\pi}}, \quad \text{altura del cilindro} = \frac{6}{\sqrt{\pi}}$$

Problema 1.2 Sea $f :]-1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \ln(x+1)$, donde ln denota la función logaritmo neperiano.

1. Esbozar el recinto limitado por la gráfica de f, el eje OY y la recta $y = 1$. Calcular los puntos de corte de las gráficas.

2. Hallar el área del recinto anterior.

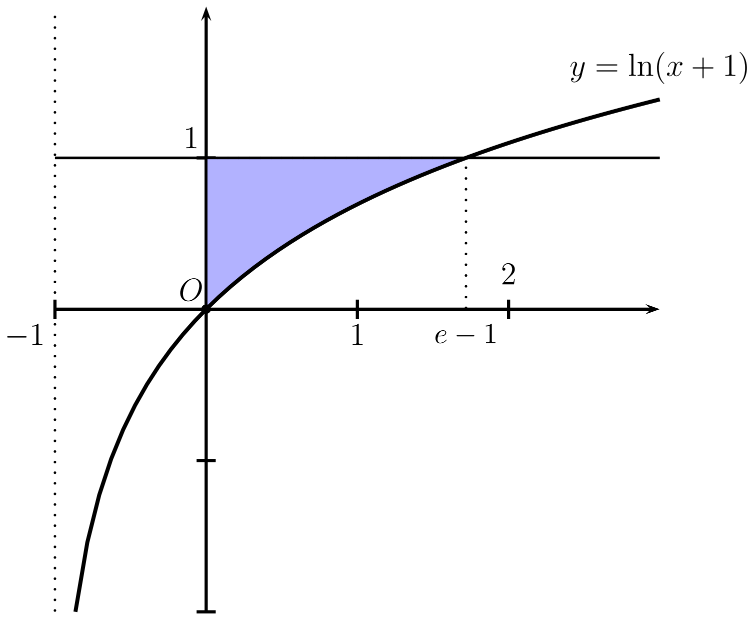
Sea $y = f(x) = \ln(x+1)$. Para $x = 0$, es $y = f(0) = \ln 1 = 0$, luego f pasa por el origen $O(0,0)$. Para $y = 1$, es $\ln(x+1) = 1 \Longrightarrow x + 1 = e^1 \Longrightarrow x = e - 1$. Además:

$$f(-1^+) = \lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} \ln(x+1) = \ln(0^+) = -\infty$$

luego la recta $x = -1$ es una asíntota vertical. Por último, si es $I =]-1, +\infty[$, para todo $x \in I$ es:

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} > 0$$

luego f es creciente en I, y el recinto es:



Para la segunda parte, la superficie S que nos piden es, por consiguiente:

$$S = \int_0^{e-1} [1 - \ln(x+1)] \, dx$$

Calculemos en primer lugar $\int \ln(x+1)\, dx$, aplicando el método de integración por partes:

$$\int f(x) \cdot g'(x)\, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)\, dx$$

Por tanto:

$$\int \ln(x+1)\, dx = \left\{ \begin{array}{l} f(x) = \ln(x+1) \\ g'(x) = 1 \\ g(x) = x \\ f'(x) = \dfrac{1}{x+1} \end{array} \right\} = x \ln(x+1) - \int \frac{x}{x+1}\, dx$$

Esta última es una racional elemental, en concreto:

$$\int \frac{x}{x+1}\, dx = \int \frac{x+1-1}{x+1}\, dx = \int \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) dx = x - \ln(x+1)$$

luego

$$\int \ln(x+1)\, dx = x \ln(x+1) - x + \ln(x+1) = (x+1)\ln(x+1) - x$$

y de aquí:

$$\int [1 - \ln(x+1)]\, dx = \int 1\, dx - \int \ln(x+1)\, dx = x - (x+1)\ln(x+1) + x = 2x - (x+1)\ln(x+1)$$

Finalmente:

$$S = \int_0^{e-1} [1 - \ln(x+1)]\ dx = [2x - (x+1)\ln(x+1)]_0^{e-1} = e - 2$$

En conclusión:

$$S = e - 2$$

Esta segunda parte es **muchísimo más sencilla** integrando respecto al eje Y. La función inversa de f es:

$$y = \ln(x+1) \Longrightarrow x + 1 = e^y \Longrightarrow x = e^y - 1$$

Observando el gráfico, vemos que:

$$S = \int_0^1 (e^y - 1)\ dy = [e^y - y]_0^1 = e - 2$$

Problema 1.3 Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} -\lambda x + y + z &= 1 \\ x + \lambda y + z &= 2 \\ \lambda x + y + z &= 1 \end{aligned}$$

1. Clasificar el sistema según los valores del parámetro λ.
2. Resolver el sistema para $\lambda = 0$.

Las matrices de los coeficientes y ampliada son:

$$A = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A' = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \vdots & 2 \\ \lambda & 1 & 1 & \vdots & 1 \end{pmatrix}$$

Los puntos verticales muestran la separación entre la matriz de los coeficientes y la ampliada. Desarrollando, resulta: $|A| = -2\lambda(\lambda - 1)$, luego

$$|A| = 0 \Longleftrightarrow \lambda = 0, 1$$

Por tanto:

- Si $\lambda \neq 0, 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow r(A) = 3$. La matriz ampliada también tiene rango 3, y el número de incógnitas también es 3. En definitiva, el sistema es de Cramer, y tiene por tanto solución única.

- Para $\lambda = 1$, es $|A| = 0$, luego $r(A) < 3$. La matriz ampliada es

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

  Para el cálculo de los rangos, vamos a utilizar la **reducción gaussiana**, y para ello, recordamos las operaciones elementales de fila:

1. C_{ij} = cambiar las filas i, j.
2. $M_i(k)$ = multiplicar la fila i por el número $k \neq 0$.
3. $S_{ij}(k)$ = sumar a la fila i la fila j multiplicada por el número k.

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \{S_{21}(1), S_{31}(1)\} \Longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \{S_{32}(-1)\} \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 2 & 2 & \vdots & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & -1 \end{pmatrix}$$

luego $r(A) = 2$, $r(A') = 3$, y el sistema es incompatible.

- Para $\lambda = 0$, es $|A| = 0$, luego $r(A) < 3$. La matriz ampliada es

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

No hay necesidad de utilizar la reducción gausiana ahora, pues la tercera fila es idéntica a la primera. Eliminando aquella es:

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

y como $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, resula $r(A) = 2$, $r(A') = 2$, y el sistema es compatible con infinitas soluciones dependientes de 1 parámetro. Con la última matriz, el sistema queda como $y + z = 1$, $x + z = 2$. Llamando $z = t$, resulta:

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases}$$

Problema 1.4 Determinar el punto simétrico del punto $A(-3, 1, 6)$ respecto de la recta:

$$r \equiv x - 1 = \frac{y+3}{2} = \frac{z+1}{2}$$

Lo primero, para evitar trivialidades, es asegurarse que $A \notin r$, lo cual es cierto, ya que:

$$-3 - 1 = \frac{1+3}{2} = \frac{6+1}{2}, \quad \text{es falso}$$

Parametrizamos r, en concreto:

$$x - 1 = \frac{y+3}{2} = \frac{z+1}{2} = t \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + t \\ y = -3 + 2t \\ z = -1 + 2t \end{array} \right\} \Longrightarrow \vec{u} = \text{vector director de } r = (1, 2, 2)$$

Sea π el plano perpendicular a r que pasa por A. El vector $\vec{u}$ es el vector normal a π, luego, la ecuación implícita de π es $x + 2y + 2z + \lambda = 0$. Como ha de pasar por A, es:

$$-3 + 2 + 12 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -11 \Longrightarrow \pi \equiv x + 2y + 2z - 11 = 0$$

Sea M el punto de corte de r y π, es decir $M = r \cap \pi$. Para el cálculo de M, resolvemos el sistema entre r y π, para lo cual, sustituímos las paramétricas de r en π, es decir:

$$1 + t + 2(-3 + 2t) + 2(-1 + 2t) - 11 = 0 \Longrightarrow 9t - 18 = 0 \Longrightarrow t = 2$$

luego $M = (1 + t, -3 + 2t, -1 + 2t) = (3, 1, 3)$. Este punto M es el punto medio entre A y el simétrico A' que andamos buscando.

El alumno debe ir comprobando que el terreno que pisa es fuerte, haciendo pequeñas comprobaciones para asegurarse que los cálculos van bien. En concreto, antes de darle la puntilla final al problema, asegurémonos que $M \in r$, en efecto, pues $3 - 1 = \frac{1+3}{2} = \frac{3+1}{2}$. También ha de ser $M \in \pi$, en efecto, pues $3 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 3 - 11 = 0$. También ha de ser $\overrightarrow{AM} \perp \vec{u}$, y en efecto, así es, pues:

$$\overrightarrow{AM} = (6, 0, -3) \Longrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 6 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + (-3) \cdot 2 = 0$$

Finalmente, según dijimos antes, sea $A'(a, b, c)$ el simétrico de A respecto de r. Como M es el punto medio del segmento AA', tenemos:

$$\frac{a-3}{2} = 3,\ \frac{b+1}{2} = 1,\ \frac{c+6}{2} = 3,\ \Longrightarrow a = 9,\ b = 1,\ c = 0 \Longrightarrow A'(9, 1, 0)$$

2. Opción B

Problema 2.1 Sea $f : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{x-1}$. Determinar el punto P de la gráfica de f que se encuentra a menor distancia del punto $A(2, 0)$. ¿Cuál es esa distancia?.

Sea $P(x, y)$ el punto pedido. La función a minimizar es la distancia D de P a A, es decir:

$$D = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$$

El punto P está en la gráfica de f, luego la ecuación de condición es:

$$y = \sqrt{x-1}, \text{ o bien, } y^2 = x - 1$$

Minimizar D es lo mismo que minimizar $H = D^2$, con lo que nos evitamos el engorro de las raíces cuadradas, por tanto:

$$H = D^2 = (x-2)^2 + y^2 = (x-2)^2 + x - 1$$

Derivando y simplificando:

$$H'(x) = 2(x-2) + 1$$

Como ha de ser $H'(x) = 0$, resulta $2(x-2) + 1 = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{3}{2}$. Derivando otra vez:

$$H''(x) = 2 > 0$$

Luego en el punto $x = \frac{3}{2}$, tenemos un mínimo. Sustituyendo en $y = \sqrt{x-1}$, obtenemos

$$y = \sqrt{\frac{3}{2} - 1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

luego $P\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Por último:

$$D = \sqrt{\left(\frac{3}{2} - 2\right)^2 + \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Aquí damos el problema por acabado, aunque vamos a ver una segunda forma de resolverlo. Es más difícil de ver que la anterior, aunque es más interesante desde un punto de vista geométrico, en concreto, de todos los puntos de la gráfica de f habrá que seleccionar aquel (o aquellos) cuya recta normal pase por A. La recta normal en un punto a es:

$$y = f(a) - \frac{1}{f'(a)}(x - a)$$

Como $f(x) = \sqrt{x-1} \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} \Longrightarrow \dfrac{1}{f'(x)} = 2\sqrt{x-1}$, luego la recta normal en $x = a$ es:

$$y = \sqrt{a-1} - 2\sqrt{a-1}(x - a)$$

Imponiendo que pase por $A(2, 0)$, obtenemos la ecuación:

$$0 = \sqrt{a-1} - 2\sqrt{a-1}(2 - a) \Longrightarrow (2a - 3)\sqrt{a-1} = 0 \Longrightarrow a = 1, \frac{3}{2}$$

Para $a = 1$ es $P(1, 0) \Longrightarrow d(A, P) = 1$. Para $a = \frac{3}{2}$ es $P\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Longrightarrow d(A, P) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, y como $\frac{\sqrt{3}}{2} < 1$, la solución es $P\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, igual que por el método anterior.

Problema 2.2 Hallar:

$$\int \frac{e^x}{(e^{2x} - 1)(e^x + 1)}\, dx$$

Sugerencia: efectuar el cambio de variable $t = e^x$.

En efecto, mediante el cambio de variable que se nos sugiere, tenemos $t = e^x \Longrightarrow dt = e^x\, dx$, y por tanto:

$$\int \frac{e^x}{(e^{2x} - 1)(e^x + 1)}\, dx = \int \frac{1}{(t^2 - 1)(t + 1)}\, dt = \int \frac{1}{(t+1)^2(t-1)}\, dt$$

Obtenemos una racional. Descomponiendo en fracciones simples:

$$\frac{1}{(t+1)^2(t-1)} = -\frac{1}{2(t+1)^2} - \frac{1}{4(t+1)} + \frac{1}{4(t-1)}$$

luego

$$\int \frac{1}{(t+1)^2(t-1)}\, dt = \frac{1}{2(t+1)} - \frac{1}{4}\ln(t+1) + \frac{1}{4}\ln(t-1)$$

Por último, deshaciendo el cambio:

$$\int \frac{e^x}{(e^{2x} - 1)(e^x + 1)}\, dx = \frac{1}{2(e^x + 1)} - \frac{1}{4}\ln(e^x + 1) + \frac{1}{4}\ln(e^x - 1)$$

Problema 2.3 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} \lambda+1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

1. Determinar los valores de λ para los que la matriz $A^2 + 3A$ no tiene inversa.
2. Para $\lambda = 0$, hallar la matriz X que verifica la ecuación $AX + A = 2I$, siendo I la matriz identidad de orden 2.

Sea $B = A^2+3A = A(A+3I)$. Operando, es $A+3I = \begin{pmatrix} \lambda+4 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Trivialmente, $|A| = -(\lambda+1)$, $|A+3I| = 2(\lambda+4)$, luego

$$|B| = |A| \cdot |A+3I| = -2(\lambda+1)(\lambda+4)$$

luego $|B| = 0 \iff \lambda = -1, -4$, y por tanto, B no tiene inversa cuando $\lambda = -1, -4$.

Ya en la segunda parte, para $\lambda = 0$ es $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $|A| = -1$. Un cálculo sencillo muestra que $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, y por tanto:

$$AX + A = 2I \Longrightarrow AX = 2I - A \Longrightarrow X = A^{-1}(2I - A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

es decir:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Problema 2.4 Consideremos los puntos $A(1,0,-1)$ y $B(2,1,0)$, y la recta $r \equiv \begin{cases} x+y=1 \\ x+z=2 \end{cases}$

1. Determinar la ecuación del plano que es paralelo a r y pasa por A y B.
2. Determinar si la recta que pasa por los puntos $P(1,2,1)$ y $Q(3,4,1)$ está contenida en dicho plano.

Sea π el plano pedido. Parametrizamos r, tomando $x = t$, con lo cual $r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = t \\ y = 1-t \\ z = 2-t \end{array} \right\}$. Un vector director de r es $\vec{u} = (1,-1,-1)$. Como $r \parallel \pi$, $\vec{u}$ es también un vector director de π. El otro vector director de π es $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (1,1,1)$, luego la ecuación implícita de π es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando y simplificando, resulta:

$$\pi \equiv y - z - 1 = 0$$

Para la segunda parte, tenemos que $P \in \pi$, pero $Q \notin \pi$, luego la recta que pasa por P y Q **no está contenida** en π.

Problemas resueltos correspondientes a la selectividad de Matemáticas II de septiembre de 2011, Andalucía

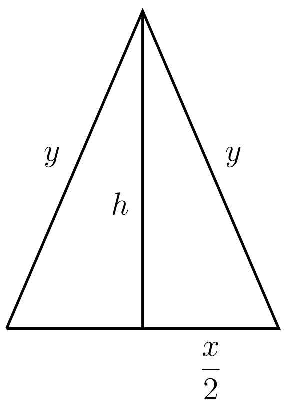
Pedro González Ruiz

septiembre de 2011

1. Opción A

Problema 1.1 Calcular la base y la altura del triángulo isósceles de perímetro 8 y de área máxima.

Sean x la longitud de la base del triángulo e y la del otro lado:



La superficie del triángulo es:

$$S = \frac{x \cdot h}{2}$$

y necesitamos poner la altura h en función de x e y. Por el teorema de Pitágoras es:

$$h^2 + \frac{x^2}{4} = y^2 \Longrightarrow h^2 = y^2 - \frac{x^2}{4} \Longrightarrow h = \frac{\sqrt{4y^2 - x^2}}{2}$$

Por consiguiente, la función a maximizar es:

$$S = \frac{x\sqrt{4y^2 - x^2}}{4} \tag{1}$$

La ecuación de condición es:

$$x + 2y = 8$$

Sustituyendo en (1):

$$S = \frac{x\sqrt{4y^2 - x^2}}{4} = \frac{x\sqrt{(2y - x)(2y + x)}}{4} = \frac{x\sqrt{8 \cdot (2y - x)}}{4} = \frac{2\sqrt{2}x\sqrt{2y - x}}{4} =$$
$$= \frac{\sqrt{2}x\sqrt{8 - x - x}}{2} = \frac{\sqrt{2}x\sqrt{8 - 2x}}{2} = x\sqrt{4 - x}$$

Derivando y simplificando:

$$S'(x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{3x-8}{\sqrt{4-x}} \Longrightarrow S'(x) = 0 \Longrightarrow 3x - 8 = 0 \Longrightarrow x = \frac{8}{3}$$

Derivando otra vez:

$$S''(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{3x-16}{(4-x)^{\frac{3}{2}}} \Longrightarrow S''\left(\frac{8}{3}\right) < 0$$

luego $x = \frac{8}{3}$ es un máximo. Sustituyendo en $x + 2y = 8$, obtenemos $y = \frac{8}{3}$, luego el triángulo es equilátero. por último, sustituyendo estos valores en h, resulta:

$$h = \frac{\sqrt{4y^2 - x^2}}{2} = \frac{\sqrt{3x^2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{8}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

En conclusión:

$$\text{base} = \frac{8}{3}, \ \text{altura} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

Problema 1.2 Consideremos las funciones $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por:

$$f(x) = 6x - x^2 \quad \text{y} \quad g(x) = x^2 - 2x$$

- Esbozar sus gráficas en unos mismos ejes coordenados y calcular sus puntos de corte.
- Calcular el área del recinto limitado por las gráficas de f y g.

Ambas funciones son parábolas, por tanto, con averiguar los cortes con los ejes y el vértice es suficiente. Comencemos con f. Si $x = 0$ es $y = 0$. Al revés, si $y = 0$, entonces:

$$6x - x^2 = 0 \Longrightarrow x(6 - x) = 0 \Longrightarrow x = 0, 6$$

Luego los cortes con los ejes de f son $(0, 0)$ y $(6, 0)$. Para el vértice V_1, tenemos:

$$f'(x) = 6 - 2x \Longrightarrow 6 - 2x = 0 \Longrightarrow x = 3$$

y como $f''(x) = -2 < 0$, f es cóncava y el vértice:

$$V_1(3, f(3)) = V_1(3, 9) \text{ es un máximo}$$

Sigamos con g. Si $x = 0$ es $y = 0$. Al revés, si $y = 0$, entonces:

$$x^2 - 2x = 0 \Longrightarrow x(x - 2) = 0 \Longrightarrow x = 0, 2$$

Luego los cortes con los ejes de g son $(0, 0)$ y $(2, 0)$. Para el vértice V_2, tenemos:

$$g'(x) = 2x - 2 \Longrightarrow 2x - 2 = 0 \Longrightarrow x = 1$$

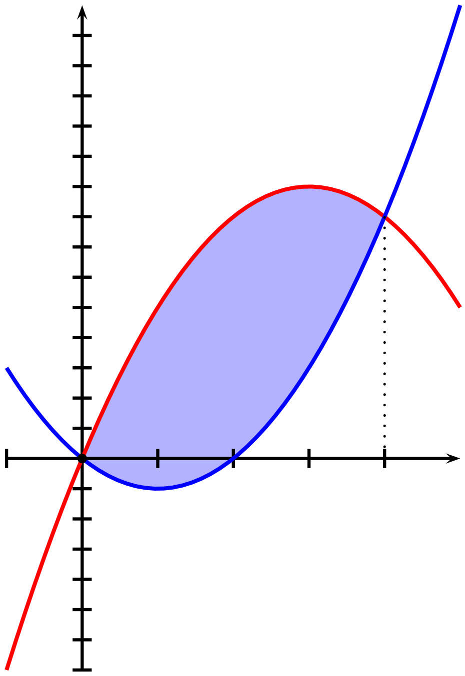
y como $g''(x) = 2 > 0$, g es convexa y el vértice:

$$V_2(1, f(1)) = V_2(1, -1) \text{ es un mínimo}$$

Ambas curvas se cortan en:

$$6x - x^2 = x^2 - 2x \Longrightarrow 2x^2 - 8x = 0 \Longrightarrow 2x(x - 4) = 0 \Longrightarrow x = 0, 4$$

El recinto limitado por ambas es (f en rojo y g en azul):



El área S es:

$$S = \int_0^4 \left[(6x - x^2) - (x^2 - 2x)\right] \, dx = \int_0^4 (-2x^2 + 8x) \, dx = \left[-\frac{2x^3}{3} + 4x^2\right]_0^4 = \frac{64}{3}$$

Problema 1.3 Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & -1 \\ 1 & \alpha & -1 \\ -1 & -1 & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Calcular el rango de A dependiendo de los valores de α.
- Para $\alpha = 2$, resolver la ecuación matricial $A \cdot X = B$.

Es sencillo comprobar que:

$$|A| = \alpha^3 - 3\alpha + 2 = (\alpha + 2)(\alpha - 1)^2$$

luego

$$|A| = 0 \Longleftrightarrow \alpha = -2, 1$$

Sea r el rango de A. Tenemos:

- Si $\alpha \neq -2, 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow r = 3$.
- Si $\alpha = -2 \Longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow r < 3$. En este caso:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

  y como

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 \neq 0 \Longrightarrow r = 2$$

- Por último, si $\alpha = 1 \Longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow r < 3$. En este caso:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

  La segunda fila es igual que la primera, y la tercera es la opuesta de la primera, luego ambas (segunda y tercera) quedan eliminadas, y por tanto, $r = 1$.

En conclusión:

$$r = \text{rango de } A = \begin{cases} 3, & \text{si } \alpha \neq -2, 1 \\ 2, & \text{si } \alpha = -2 \\ 1, & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

Como $\alpha = 2 \neq -2, 1$, el sistema es de Cramer y tiene solución única. En este caso, $|A| = (2+2) \cdot (2-1)^2 = 4$. El sistema queda como:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Resolvámoslo por la regla de Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{4} = \frac{0}{4} = 0$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

luego

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Problema 1.4 Consideremos los puntos:

$$A(-1, k, 3),\ B(k+1, 0, 2),\ C(1, 2, 0),\ D(2, 0, 1)$$

- ¿Existe algún valor de k para el que los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{CD}$ sean linealmente dependientes?.
- Calcular los valores de k para los que los puntos A, B, C, D forman un tetraedro de volumen 1.

Tenemos:

$$\overrightarrow{AB} = (k+2, -k, -1),\ \overrightarrow{BC} = (-k, 2, -2),\ \overrightarrow{CD} = (1, -2, 1)$$

Como son 3 vectores en $\mathbb{R}^3$, la dependencia o independencia la decide el valor del determinante, cuyas filas son las coordenadas de dichos vectores, es decir:

$$\delta = \begin{vmatrix} k+2 & -k & -1 \\ -k & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -(k^2+2k+2)$$

El trinomio k^2+2k+2 es tal que su discriminante:

$$\Delta = 2^2 - 4\cdot 2\cdot 1 = 4-8 = -4 < 0$$

luego $\delta \neq 0$ (más concretamente $\delta < 0$), para todo $k \in \mathbb{R}$, y por consiguiente, los tres vectores son **linealmente independientes** para todo valor de k, o lo que es lo mismo, **no existe ningún valor de k para el que dichos vectores sean dependientes**. Para la segunda parte, el volumen V del tetraedro es:

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & k+1 & 1 & 2 \\ k & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

donde el valor de este determinante debe tomarse en valor absoluto. Procedamos a su cálculo (la expresión $S_{ij}(m)$ indica sumar a la fila i la fila j multiplicada por m). Entonces:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & k+1 & 1 & 2 \\ k & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \{S_{21}(1), S_{31}(-k), S_{41}(-3)\} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & k+2 & 2 & 3 \\ 0 & -k & 2-k & -k \\ 0 & -1 & -3 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} k+2 & 2 & 3 \\ k & k-2 & k \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \{S_{12}(-1)\} = \begin{vmatrix} 2 & 4-k & 3-k \\ k & k-2 & k \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \{S_{13}(-2), S_{23}(-k)\} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -k-2 & -k-1 \\ 0 & -2k-2 & -k \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -k-2 & -k-1 \\ -2k-2 & -k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k+2 & k+1 \\ 2k+2 & k \end{vmatrix} =$$

$$= -k^2-2k-2$$

y como $|-k^2-2k-2| = k^2+2k+2$, tenemos:

$$V = \frac{k^2+2k+2}{6} = 1 \Longrightarrow k^2+2k-4 = 0 \Longrightarrow k = -1 \pm \sqrt{5}$$

Damos aquí el problema por acabado, y lo que sigue es una ampliación, consistente en ver una segunda forma del cálculo del volumen, teniendo en cuenta el resultado del apartado primero, y ahorrarnos así el cálculo del determinante de cuarto orden. Hemos visto que:

$$|\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}| = -(k^2+2k+2)$$

Según se demuestra en teoría, otra expresión para el volumen de un tetraedro definido por cuatro puntos A, B, C, D es:

$$V = \frac{1}{6}\cdot |\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}|$$

donde como siempre, el resultado anterior debe tomarse en valor absoluto. Sea

$$U = |\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}| = \{\text{linealidad del determinante en sus filas}\} =$$
$$= |\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}| + |\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}|$$

ya que el determinante $|\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}| = 0$ por tener dos filas iguales. Seguimos:

$$U = |\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}| = |\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}| + |\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}|$$

En esta última suma, el primer sumando es 0, ya que:

$$|\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}| = 0$$

ya que la tercera fila es la suma de las dos primeras. En conclusión:

$$|\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}| = -(k^2 + 2k + 2)$$

y por consiguiente:

$$V = \frac{k^2 + 2k + 2}{6}$$

2. Opción B

Problema 2.1 Sea f la función definida por

$$f(x) = \frac{3x^4 + 1}{x^3}, \quad \text{para } x \neq 0$$

- Estudiar las asíntotas de la gráfica de la función.
- Hallar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan.

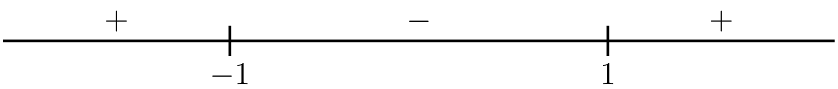
La recta $x = 0$ es una asíntota vertical. Como $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$, no existen asíntotas horizontales. Como f es una función racional tal que el grado del numerador es exactamente una unidad superior al grado del denominador, existe asíntota oblicua. Además

$$f(x) = 3x + \frac{1}{x^3}$$

luego la asíntota oblicua es $y = 3x$. Para la segunda parte, tenemos:

$$f'(x) = 3 - \frac{3}{x^4} = 3\left(1 - \frac{1}{x^4}\right) = 3\frac{x^4 - 1}{x^4} = 3\frac{(x^2 - 1)(x^2 + 1)}{x^4} = 3\frac{(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)}{x^4}$$

Para el crecimiento y decrecimiento, hemos de estudiar las variaciones de signo de f'. Los factores $x^2 + 1$ y x^4 no cuentan, pues son positivos, así que solo hay que concentrarse en $x - 1$ y $x + 1$, por tanto:



luego f crece en $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ y decrece en $]-1,1[-\{0\}$. Por consiguiente, en el punto $x=-1$ hay un máximo de valor $f(-1)=-4$ y en $x=1$ hay un mínimo de valor $f(1)=4$.
Nota final: el problema se podía haber simplificado bastante teniendo en cuenta que f es impar.

Problema 2.2 Sean $f,g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ las funciones definidas por:

$$f(x)=-\frac{x^2}{4}+4,\quad g(x)=x^2-1$$

- Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=-2$.
- Esbozar el recinto limitado por las gráficas de ambas funciones y la recta $y=x+5$. Calcular el área de este recinto.

La recta tangente a f en $x=-2$ es:

$$y=f(-2)+f'(-2)(x+2)$$

Por un lado es, $f(-2)=-\frac{4}{4}+4=3$, y como $f'(x)=-\dfrac{x}{2}\Longrightarrow f'(-2)=\dfrac{2}{2}=1$, luego, la recta tangente es:

$$y=3+1\cdot(x+2)=x+5,\ \text{es decir, } y=x+5$$

De las parábolas f y g mostramos sus propiedades más caraterísticas, dejando la comprobación al lector.

- f es par. Los cortes con los ejes son $(0,4)$, $(\pm4,0)$, f es cóncava y el vértice es $V_1(0,4)$, máximo.
- g es par. Los cortes con los ejes son $(0,-1)$, $(\pm1,0)$, f es convexa y el vértice es $V_2(0,-1)$, mínimo.

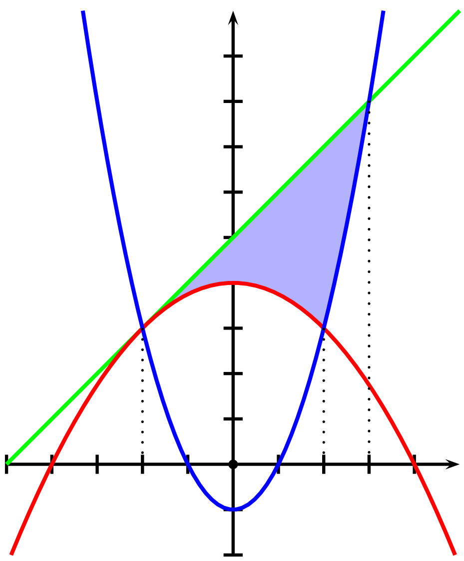
Los puntos comunes a las dos parábolas son:

$$-\frac{x^2}{4}+4=x^2-1\Longrightarrow x=\pm2$$

Los cortes de g con la recta tangente son

$$x^2-1=x+5\Longrightarrow x^2-x-6=0\Longrightarrow x=2,3$$

En fin, el recinto es (f en rojo, g en azul y la recta tangente en verde):



Finalmente, el área pedida S es, $S = S_1 + S_2$, donde:

$$S_1 = \int_{-2}^{2} \left[(x+5) - \left(4 - \frac{x^2}{4}\right)\right] dx = \int_{-2}^{2} \left(\frac{x^2}{4} + x + 1\right) dx = \left[\frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{2} + x\right]_{-2}^{2} = \frac{16}{3}$$

$$S_2 = \int_{2}^{3} \left[(x+5) - (x^2-1)\right] dx = \int_{2}^{3} (-x^2 + x + 6)\, dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 6x\right]_{2}^{3} = \frac{13}{6}$$

luego

$$S = \frac{16}{3} + \frac{13}{6} = \frac{15}{2}$$

Problema 2.3 Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -\alpha & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

- Calcular los valores de α para los que la mariz inversa de A es $\dfrac{1}{12} \cdot A$.
- Para $\alpha = -3$, determinar la matriz X que verifica la ecuación $A^t \cdot X = B$, siendo A^t la matriz traspuesta de A.

Trivialmente $|A| = 4\alpha$. Calculemos la inversa de A:

$$A^t = \begin{pmatrix} \alpha & -\alpha \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^* = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{4\alpha} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{4\alpha} & -\dfrac{1}{4\alpha} \\ \dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Por otro lado:

$$A^{-1} = \frac{1}{12} \cdot A = \begin{pmatrix} \dfrac{\alpha}{12} & \dfrac{1}{12} \\ -\dfrac{\alpha}{12} & \dfrac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Identificando:

$$-\frac{1}{4\alpha} = \frac{1}{12} \Longrightarrow 4\alpha = -12 \Longrightarrow \alpha = -3$$

Este valor es conforme con los otros tres elementos de la matriz. Por consiguiente, $\alpha = -3$.

Para la segunda parte, sea

$$C = A^t = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

La ecuación $A^t \cdot X = B$ es equivalente a $C \cdot X = B$, luego $X = C^{-1} \cdot B$. Un cálculo sencillo demuestra que $C^{-1} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, luego:

$$X = \frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} -6 & 3 & 3 \\ -2 & 15 & 7 \end{pmatrix}$$

Concluyendo:

$$X = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} -6 & 3 & 3 \\ -2 & 15 & 7 \end{pmatrix}$$

Problema 2.4 Dados el plano π y la recta r de ecuaciones:

$$\pi \equiv x + 2y - z = 0, \quad r \equiv \begin{cases} 3x - y = 5 \\ x + y - 4z = -13 \end{cases}$$

- Hallar el punto P de intersección del plano π y la recta r.
- Hallar el punto simétrico del punto $Q(1, -2, 3)$ respecto del plano π.

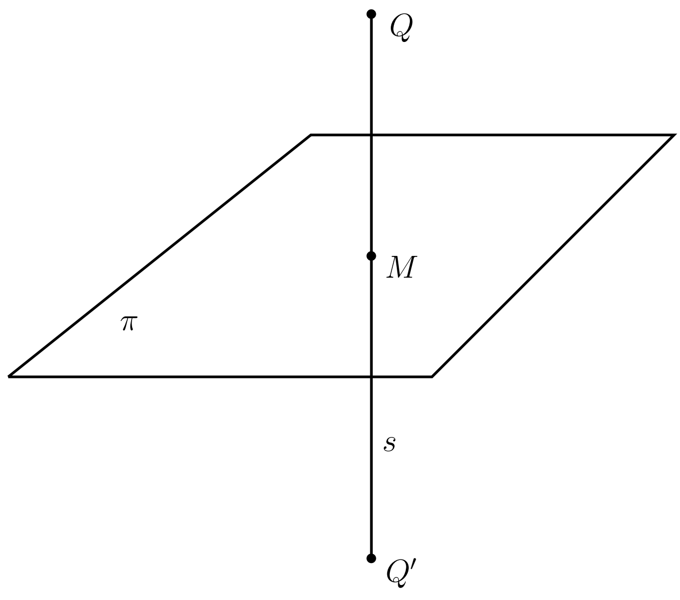
El punto P verifica el sistema:

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 0 \\ 3x - y &= 5 \\ x + y - 4z &= -13 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema, resulta $P(2, 1, 4)$.

Para la segunda parte, sea s la recta perpendicular a π que pasa por Q. Un vector director $\vec{u}$ de s es el vector normal de π, es decir, $\vec{u} = (1, 2, -1)$. Por tanto, las ecuaciones paramétricas de s son:

$$s \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + 2t \\ z = 3 - t \end{cases}$$



Sea M el punto de intersección de s y π, es decir, $M = s \cap \pi$. Para averiguar M, sustituimos las paramétricas de s en π:

$$(1 + t) + 2 \cdot (-2 + 2t) - (3 - t) = 0 \Longrightarrow 6t - 6 = 0 \Longrightarrow t = 1$$

luego $M(1+t, -2+2t, 3-t) = M(1+1, -2+2\cdot 1, 3-1) = M(2, 0, 2)$. Este punto M es el punto medio del segmento QQ' siendo Q' el simétrico de Q respecto a π. Si escribimos $Q'(a, b, c)$ y aplicamos la fórmula del punto medio de un segmento, tenemos:

$$\frac{a+1}{2} = 2,\ \frac{b-2}{2} = 0,\ \frac{c+3}{2} = 2 \Longrightarrow a = 3,\ b = 2,\ c = 1$$

luego $Q'(3, 2, 1)$.

Selectividad Matemáticas II junio 2012, Andalucía

Pedro González Ruiz

20 de junio de 2012

1. Opción A

Problema 1.1 Sea la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^x(x-2)$.

1. Calcular las asíntotas de f.
2. Hallar los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan) y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.
3. Determinar, si existen, los puntos de inflexión de la gráfica de f.

La función f es continua en todo $\mathbb{R}$, luego no tiene asíntotas verticales. Como

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^x(x-2) = +\infty \cdot +\infty = +\infty$$

luego f no tiene asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$. Sin embargo:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^x(x-2) = \{x=-y\} = \lim_{y\to+\infty} e^{-y}(-y-2) = -\lim_{y\to+\infty} \frac{y+2}{e^y} =$$
$$= \{\text{L'Höpital}\} = -\lim_{y\to+\infty} \frac{1}{e^y} = -\frac{1}{+\infty} = 0$$

luego $y = 0$, es una asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$. Es sencillo comprobar que no hay asíntotas oblicuas.

En conclusión, la única asíntota es $y = 0$ cuando $x \to -\infty$.

Derivando, $f'(x) = e^x(x-1)$. Por tanto, si $x > 1 \Longrightarrow f'(x) > 0$, y por tanto, f crece en $]1, +\infty[$. Análogamente f decrece en $]-\infty, 1[$, y en consecuencia, $x = 1$ es un mínimo local de valor $f(1) = e(1-2) = -e$. No hay más extremos.

Derivando otra vez,

$$f''(x) = xe^x \Longrightarrow xe^x = 0 \Longrightarrow x = 0$$

luego, el único candidato a inflexión es $x = 0$. Derivando otra vez

$$f'''(x) = e^x(x+1) \Longrightarrow f'''(0) = 1 \neq 0$$

luego $x = 0$ es el único punto de inflexión de valor $f(0) = e^0(0-2) = -2$.

En conclusión: $(1, -e)$ es un mínimo local, $(0, -2)$ es punto de inflexión. Un estudio más detallado (que implica dibujar la gráfica y que no nos han pedido) muestra que el punto $(1, -e)$ es un mínimo absoluto.

Problema 1.2 Sea f una función continua en el intervalo $[2, 3]$ y F una función primitiva de f tal que $F(2) = 1$ y $F(3) = 2$. Calcular:

1. $\displaystyle\int_2^3 f(x)\,dx$
2. $\displaystyle\int_2^3 (5f(x) - 7)\,dx$
3. $\displaystyle\int_2^3 (F(x))^2\, f(x)\,dx$

Por ser F una primitiva de f, es $F'(x) = f(x)$, luego:

$$\int_2^3 f(x)\,dx = [F(x)]_2^3 = F(3) - F(2) = 2 - 1 = 1 \tag{1}$$

Análogamente:

$$\int_2^3 (5f(x) - 7)\;dx = 5\int_2^3 f(x)\,dx - 7\int_2^3 dx = \{\text{por } (1)\} = 5\cdot 1 - 7\,[x]_2^3 = 5 - 7(3-2) = -2$$

Para la tercera parte, aplicamos la fórmula de la integración por partes, en concreto:

$$\int_a^b u(x)\cdot v'(x)\,dx = [u(x)\cdot v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)\cdot v(x)\,dx$$

Entonces:

$$\int_2^3 (F(x))^2 f(x)\,dx = \left\{\begin{array}{l} u(x) = (F(x))^2 \\ v'(x) = f(x) \\ v(x) = F(x) \\ u'(x) = 2F(x)\cdot F'(x) = 2F(x)f(x) \end{array}\right\} = \left[(F(x))^3\right]_2^3 - 2\int_2^3 (F(x))^2 f(x)\,dx$$

La integral de partida se repite (cosa muy común en la integración por partes), luego:

$$3\int_2^3 (F(x))^2 f(x)\,dx = \left[(F(x))^3\right]_2^3 = (F(3))^3 - (F(2))^3 = 2^3 - 1^3 = 7$$

y por consiguiente:

$$\int_2^3 (F(x))^2 f(x)\,dx = \frac{7}{3}$$

Para este apartado, veamos **una segunda forma**, mucho más fácil que la anterior. Para ello, recordemos uno de los modelos de primitivas inmediatas:

$$\int g'(x)[g(x)]^n\,dx = \frac{[g(x)]^{n+1}}{n+1} + C, \quad \text{si } n \neq -1$$

Entonces:

$$\int [F(x)]^2 f(x)\,dx = \int [F(x)]^2 F'(x)\,dx = \frac{[F(x)]^3}{3}$$

Por consiguiente:

$$\int_2^3 [F(x)]^2 f(x)\,dx = \frac{1}{3}\left\{[F(x)]^3\right\}_2^3 = \frac{[F(3)]^3 - [F(2)]^3}{3} = \frac{2^3 - 1^3}{3} = \frac{7}{3}$$

Problema 1.3 Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & k & 1 \end{pmatrix}$

1. ¿Para qué valores del parámetro k no existe la inversa de la matriz A?. Justificar la respuesta.
2. Para $k = 0$, resolver la ecuación matricial $(X + I) \cdot A = A^t$, donde I denota la matriz identidad y A^t la matriz traspuesta de A.

El determinante de A es $|A| = 2k - 1$, luego, no existe la inversa de A cuando el determinante es cero, es decir:

$$2k - 1 = 0 \Longrightarrow k = \frac{1}{2}$$

En conclusión

$$\text{No existe } A^{-1} \Longleftrightarrow k = \frac{1}{2}$$

Para la segunda parte, para $k = 0$ es $|A| = -1$, luego:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\; A^t = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix},\; A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\; A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Despejemos X:

$$(X + I) \cdot A = A^t \Longrightarrow X + I = A^t \cdot A^{-1} \Longrightarrow X = A^t \cdot A^{-1} - I$$

Por un lado

$$A^t \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Finalmente

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Problema 1.4 De un paralelogramo $ABCD$ conocemos tres vértices consecutivos: $A(2, -1, 0)$, $B(-2, 1, 0)$ y $C(0, 1, 2)$.

1. Calcular la ecuación de la recta que pasa por el centro del paralelogramo y es perpendicular al plano que lo contiene.
2. Hallar el área de dicho paralelogramo.
3. Calcular el vértice D.

Sea r la recta pedida. El centro M del paralelogramo es el punto medio del segmento AC, luego

$$M = \left(\frac{2+0}{2}, \frac{-1+1}{2}, \frac{0+2}{2}\right) = (1, 0, 1)$$

La recta r pasa por este punto. Falta un vector director. Como r es perpendicular al plano que contiene al paralelogramo, un vector director es $\vec{u} = \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{BC}$. Ahora bien:

$$\overrightarrow{BA} = (4, -2, 0),\ \overrightarrow{BC} = (2, 0, 2) \Longrightarrow \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ 4 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (-4, -8, 4) \sim (1, 2, -1)$$

El símbolo $\sim$ significa equivalencia, es decir, tan vector director es $(-4, -8, 4)$ como $(1, 2, -1)$. Finalmente, la ecuación de r es

$$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-1}$$

Para la segunda parte, el área S del paralelogramo es:

$$S = ||\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{BC}|| = ||(-4, -8, 4)|| = 4 \cdot ||(-1, -2, 1)|| = 4\sqrt{1+4+1} = 4\sqrt{6}$$

Por último, sea $D(d_1, d_2, d_3)$. Por ser $ABCD$ un paralelogramo es $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA} = (4, -2, 0)$, luego

$$(d_1, d_2 - 1, d_3 - 2) = (4, -2, 0) \Longrightarrow \begin{cases} d_1 = 4 \\ d_2 - 1 = -2 \Longrightarrow d_2 = -1 \\ d_3 - 2 = 0 \Longrightarrow d_3 = 2 \end{cases}$$

luego $D(4, -1, 2)$.

2. Opción B

Problema 2.1 Sabiendo que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a \cdot \operatorname{sen} x - xe^x}{x^2}$ es finito, calcular el valor de a y el de dicho límite.

Sea

$$l = \lim_{x \to 0} \frac{a \cdot \operatorname{sen} x - xe^x}{x^2} = \frac{a \cdot \operatorname{sen} 0 - 0 \cdot e^0}{0^2} = \frac{0}{0}$$

luego el límite es indeterminado para todo valor de a. Aplicamos la regla de L'Höpital:

$$l = \lim_{x \to 0} \frac{a \cdot \cos x - e^x(x+1)}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \frac{a \cdot \cos x - e^x(x+1)}{x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a-1}{0}$$

Este es el punto clave. Si $a \neq 1$, l se hace infinito, lo cual no es posible por el enunciado, luego queda claro que $a = 1$. Con este resultado es:

$$l = \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - e^x(x+1)}{x} = \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \left(\frac{\cos x - e^x}{x} - e^x \right) = \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \left(\frac{\cos x - e^x}{x} - 1 \right)$$

Ahora bien:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - e^x}{x} = \{\text{L'Höpital}\} = \lim_{x \to 0} \frac{-\operatorname{sen} x - e^x}{1} = -\operatorname{sen} 0 - e^0 = -1$$

Finalmente

$$l = \frac{1}{2}(-1 - 1) = -1$$

Problema 2.2 Sea la función f definida por $f(x) = \dfrac{2}{x^2-1}$, para $x \neq -1, 1$.

1. Hallar una primitiva de f.

2. Calcular el valor de k para que el área del recinto limitado por el eje de abscisas y la gráfica de f en el intervalo $[2, k]$ sea $\ln 2$, donde ln denota el logaritmo neperiano.

Descomponiendo f en fracciones simples:

$$f(x) = \frac{2}{x^2-1} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$$

Una primitiva cualquiera F de f es

$$F(x) = \int \frac{1}{x-1}\,dx - \int \frac{1}{x+1}\,dx = \ln(|x-1|) - \ln(|x+1|) = \ln\left(\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right) + C$$

siendo C una constante arbitraria.

Para la segunda parte, lo habitual es dibujar el recinto para hallar el área, aunque en este caso no es necesario. En efecto, supongamos que $x \geq 2$, f es positiva en $I = [2, +\infty[$, y como $f'(x) = -\frac{4x}{(x^2-1)^2} \Longrightarrow f'(x) < 0$ en I, luego f decrece en I. Por consiguiente, tenemos la ecuación:

$$\int_2^k f(x)\,dx = \ln 2$$

O bien

$$\left[\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right]_2^k = \ln 2 \Longrightarrow \ln\left|\frac{k-1}{k+1}\right| - \ln\left(\frac{1}{3}\right) = \ln 2 \Longrightarrow \ln\left|\frac{k-1}{k+1}\right| = \ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

Por tanto

$$\left|\frac{k-1}{k+1}\right| = \frac{2}{3}$$

De aquí derivamos dos posibilidades:

$$\frac{k-1}{k+1} = -\frac{2}{3} \Longrightarrow \{\text{resolviendo la ecuación}\} \Longrightarrow k = \frac{1}{5}$$

resultado absurdo ya que el intervalo de integración es $[2, k]$, luego es $k \geq 2$, y por tanto, este valor de k no es posible. La segunda posibilidad es:

$$\frac{k-1}{k+1} = \frac{2}{3} \Longrightarrow \{\text{resolviendo la ecuación}\} \Longrightarrow k = 5$$

En conclusión, $k = 5$.

Problema 2.3 Consideremos el sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & \lambda+1 \\ & & 3y & + & 2z & = & 2\lambda+3 \\ 3x & + & (\lambda-1)y & + & z & = & \lambda \end{array}$$

1. Resolver el sistema para $\lambda = 1$.

2. Hallar los valores de λ para los que el sistema tiene solución única.

3. ¿Existe algún valor de λ para el que el sistema admite la solución $(x, y, z) = \left(-\dfrac{1}{2}, 0, \dfrac{1}{2}\right)$?.

Las matriz de los coeficientes es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & \lambda - 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Desarrollando, resulta: $|A| = -2(\lambda - 1)$, luego

$$|A| = 0 \Longleftrightarrow \lambda = 1$$

Si $\lambda \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow r(A) = 3$. La matriz ampliada también tiene rango 3, y el número de incógnitas también es 3. En definitiva, el sistema es de Cramer, y tiene por tanto solución única. Esto responde al segundo apartado.

Para el apartado primero, tomamos $\lambda = 1$. Sabemos, por el apartado anterior, que el sistema no es de Cramer. La matriz ampliada es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Utilizamos ahora la reducción gaussiana. Sumamos a la tercera fila la primera multiplicada por -3, con lo cual:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & -3 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

La tercera fila es la opuesta de la segunda, luego eliminamos aquella, con lo que el sistema queda como:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 2 \\ 3y + 2z &= 5 \end{aligned}$$

LLamando $x = t$, es:

$$\begin{aligned} y + z &= 2 - t \\ 3y + 2z &= 5 \end{aligned}$$

Operando, resulta $y = 1 + 2t$, $z = 1 - 3t$, con lo cual, para $\lambda = 1$, el sistema es compatible con infinitas soluciones dependientes de un parámetro, cuya solución es:

$$\begin{aligned} x &= t \\ y &= 1 + 2t \\ z &= 1 - 3t \end{aligned}$$

Con esto finaliza el apartado primero.

Por último, sustituyendo $x = -\frac{1}{2}$, $y = 0$, $z = \frac{1}{2}$, en la primera ecuación

$$-\frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} = \lambda + 1 \Longrightarrow 0 = \lambda + 1 \Longrightarrow \lambda = -1$$

Hay que comprobar que este valor de λ funciona en las otras dos ecuaciones. En efecto, sustituyendo en la segunda:

$$3 \cdot 0 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 2 \cdot (-1) + 3, \text{ es decir, } 1 = 1$$

Por último, en la tercera:

$$3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + (-2) \cdot 0 + \frac{1}{2} = -1, \text{ es decir, } -1 = -1$$

Por consiguiente, es $\lambda = -1$.

Problema 2.4 Sean r y s las rectas dadas por

$$r \equiv \begin{cases} x + y - z = 6 \\ x + z = 3 \end{cases} \qquad s \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{6} = \frac{z}{2}$$

1. Determinar el punto de intersección de ambas rectas.
2. Calcular la ecuación general del plano que las contiene.

Aunque el enunciado afirma que las rectas se cortan, no está de más comprobarlo. Para ello, nos interesan las rectas en forma punto-vector director. Parametrizamos r, llamando $z = t$:

$$x + z = 3 \Longrightarrow x + t = 3 \Longrightarrow x = 3 - t$$

También

$$x + y - z = 6 \Longrightarrow y = 6 + z - x = 6 + t - (3 - t) = 3 + 2t$$

es decir:

$$r \equiv \begin{cases} x = 3 - t \\ y = 3 + 2t \\ z = t \end{cases}, \text{ o bien, } r \equiv \begin{cases} P(3,3,0) \\ \vec{u} = (-1,2,1) \end{cases}$$

La segunda es más fácil, pues si hacemos:

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{6} = \frac{z}{2} = t$$

obtenemos:

$$s \equiv \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -1 + 6t \\ z = 2t \end{cases}, \text{ o bien, } s \equiv \begin{cases} Q(1,-1,0) \\ \vec{v} = (-1,6,2) \end{cases}$$

La posición relativa de ambas rectas se determina mediante el rango de la matriz

$$A = (\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{PQ}) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 2 & 6 & -4 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Es sencillo comprobar que $|A| = 0$, luego ciertamente las rectas se cortan. Sea R el punto de corte de ambas. Como $R \in r$, R es de la forma $R = (3 - t, 3 + 2t, t)$. Imponiendo que $R \in s$, obtenemos:

$$\frac{3-t-1}{-1} = \frac{3+2t+1}{6} = \frac{t}{2}$$

Eligiendo la primera y la tercera, por ejemplo:

$$\frac{2-t}{-1} = \frac{t}{2} \Longrightarrow 4 - 2t = -t \Longrightarrow t = 4$$

luego $R = (3-4, 3+2\cdot 4, 4) = (-1, 11, 4)$.

Sea π el plano que contiene a r y a s. Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son vectores directores de π. Como punto del plano, tenemos bastante donde elegir, en concreto, P, Q o R. Nos decantamos por el primero. Por consiguiente:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-3 & y-3 & z \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante, obtenemos:

$$\pi \equiv 2x - y + 4z - 3 = 0 \tag{2}$$

Con esto finaliza el problema. No obstante veamos un par de cosas, a modo de comprobación. Como $r \subset \pi$, al sustituir las paramétricas de r en (2) se nos debe de ir todo. En efecto:

$$2\cdot(3-t) - (3+2t) + 4\cdot t - 3 = 6 - 2t - 3 - 2t + 4t - 3 = 0$$

Idem para s:

$$2\cdot(1-t) - (-1+6t) + 4\cdot(2t) - 3 = 2 - 2t + 1 - 6t + 8t - 3 = 0$$

El apartado primero es más fácil de conseguir de la siguiente forma. El punto de corte R de r y s verifica todas las ecuaciones implícitas de ambas. Elegimos de r ambas, y de s la siguiente

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{z}{2} \Longrightarrow 2x - 2 = -z \Longrightarrow 2x + z = 2$$

Juntándolo todo, el sistema a resolver es:

$$\begin{aligned} x + y - z &= 6 \\ x + z &= 3 \\ 2x + z &= 2 \end{aligned}$$

Restando a la tercera la segunda, $x = -1$. Sustituyendo en la segunda, $-1 + z = 3 \Longrightarrow z = 4$. Por último, sustituyendo estos valores en la primera

$$-1 + y - 4 = 6 \Longrightarrow y = 11$$

y volvemos a obtener $R(-1, 11, 4)$. Hay que tener cuidado con lo que se elige, ya que debe hacerse de forma que el sistema resultante tenga rango 3.

Problemas resueltos correspondientes a la selectividad de Matemáticas II de septiembre de 2012, Andalucía

Pedro González Ruiz

13 de septiembre de 2012

1. Opción A

Problema 1.1 Sea la función continua $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x + k, & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{e^{x^2} - 1}{x^2}, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1. Calcular el valor de k.
2. Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.

Tenemos

$$f(0^-) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} (x + k) = 0 + k = k$$

Por otro lado:

$$f(0^+) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

En éste último límite hemos aplicado la equivalencia $e^z - 1 \sim z$, cuando $z \to 0$. Por el enunciado, la función es continua en $x = 0$, luego $k = 1$.

Para la segunda parte, la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x = 1$, es:

$$y = f(1) + f'(1)(x - 1)$$

Ahora bien

$$f(1) = \frac{e^{1^2} - 1}{1^2} = e - 1$$

Sea $g(x) = \dfrac{e^{x^2} - 1}{x^2}$. Derivando y simplificando:

$$g'(x) = 2\frac{(x^2 - 1)e^{x^2} + 1}{x^3}$$

luego

$$f'(1) = 2\frac{(1^2 - 1)e^{1^2} + 1}{1^3} = 2$$

Por consiguiente, la recta tangente es:

$$y = e - 1 + 2(x - 1) = 2x + e - 3$$

Problema 1.2 Sea

$$I = \int_0^1 \frac{x}{1 + \sqrt{1 - x}}\, dx$$

1. Expresar la integral I aplicando el cambio de variable $t = \sqrt{1 - x}$.

2. Calcular el valor de I.

Sea $t = \sqrt{1 - x}$. Entonces:

$$t^2 = 1 - x \Longrightarrow x = 1 - t^2 \Longrightarrow dx = -2t\, dt$$

Para $x = 0$ es $t = 1$, y para $x = 1$ es $t = 0$, luego:

$$I = \int_1^0 \frac{(1 - t^2)(-2t)}{1 + t}\, dt = 2\int_0^1 \frac{(1 - t)(1 + t)t}{1 + t}\, dt = 2\int_0^1 t(1 - t)\, dt =$$
$$= 2\int_0^1 (t - t^2)\, dt = 2\left[\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}\right]_0^1 = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

Problema 1.3 Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{array}{rcrcr} kx & + & 2y & = & 2 \\ 2x & + & ky & = & k \\ x & - & y & = & -1 \end{array}$$

1. Probar que el sistema es compatible para cualquier valor del parámetro k.

2. Especificar para qué valores del parámetro k es determinado y para cuáles indeterminado.

3. Hallar las soluciones en cada caso.

Reordenamos las ecuaciones, con lo que las matrices de los coeficientes y ampliada son:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & \vdots & -1 \\ k & 2 & \vdots & 2 \\ 2 & k & \vdots & k \end{pmatrix}$$

Los puntos verticales muestran la separación entre la matriz de los coeficientes y la ampliada.

Para el cálculo de los rangos, vamos a utilizar la **reducción gaussiana**, y para ello, recordamos las operaciones elementales de fila:

1. C_{ij} = cambiar las filas i, j.

2. $M_i(k)$ = multiplicar la fila i por el número $k \neq 0$.

3. $S_{ij}(k)$ = sumar a la fila i la fila j multiplicada por el número k.

En fin:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & \vdots & -1 \\ k & 2 & \vdots & 2 \\ 2 & k & \vdots & k \end{pmatrix} \Longrightarrow \{S_{21}(-k), S_{31}(-2)\} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & \vdots & -1 \\ 0 & k+2 & \vdots & k+2 \\ 0 & k+2 & \vdots & k+2 \end{pmatrix}$$

La tercera fila es igual que la segunda, luego eliminamos aquella, con lo que el sistema queda como:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & \vdots & -1 \\ 0 & k+2 & \vdots & k+2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Distinguimos dos casos:

- $k = -2$, entonces (1) queda como $\begin{pmatrix} 1 & -1 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$, o bien

  $$\begin{pmatrix} 1 & -1 & \vdots & -1 \end{pmatrix}$$

  El rango común r de las matrices de los coeficientes y ampliada es $r = 1$ y el número de incógnitas n es $n = 2$, luego el sistema es compatible indeterminado, o más detallado, compatible con infinitas soluciones dependientes de $n - r = 2 - 1 = 1$ parámetro. El sistema a resolver es $x - y = -1$, y llamando $x = t$, es $y = 1 + t$. Resumiendo:

  $$x = t, \ y = 1 + t, \ \forall t \in \mathbb{R}$$

- $k \neq -2$, o bien $k + 2 \neq 0$. En este caso (1), puede simplificarse por $M_2\left(\frac{1}{k+2}\right)$, y queda como:

  $$\begin{pmatrix} 1 & -1 & \vdots & -1 \\ 0 & 1 & \vdots & 1 \end{pmatrix}$$

  El rango común r de las matrices de los coeficientes y ampliada es $r = 2$ y $n = 2$, luego el sistema es de Cramer y tiene solución única. Queda como:

  $$\begin{aligned} x - y &= -1 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

  Sustituyendo la segunda en la primera resulta $x = 0$, luego la solución es:

  $$x = 0, \ y = 1$$

Problema 1.4 Sean los puntos $A(0, 0, 1)$, $B(1, 0, -1)$, $C(0, 1, -2)$ y $D(1, 2, 0)$.

1. Hallar la ecuación del plano π determinado por los puntos A, B y C.
2. Demuestra que los cuatro puntos no son coplanarios.
3. Calcular la distancia del punto D al plano π.

Los vectores directores de π son:

$$\overrightarrow{AB} = (1, 0, -2), \quad \overrightarrow{AC} = (0, 1, -3)$$

luego

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante obtenemos $\pi \equiv 2x + 3y + z - 1 = 0$.

Sustituyendo las coordenadas de D en π resulta:

$$2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 0 - 1 = 0, \text{ o bien, } 7 = 0$$

absurdo, luego $D \notin \pi$, y por consiguiente, los cuatro puntos no son coplanarios. Finalmente:

$$d(D, \pi) = \frac{|2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 0 - 1|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 1}} = \frac{7}{\sqrt{14}} = \{\text{racionalizando}\} = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

2. Opción B

Problema 2.1 Sea la función f definida por $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{1-x}$ para $x \neq 1$.

1. Estudiar las asíntotas de la gráfica de la función f.
2. Hallar los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan) y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

El punto $x = 1$ es una discontinuidad asintótica, luego la recta $x = 1$ es asíntota vertical. Como no hay más discontinuidades de éste tipo, no hay más asíntotas verticales. Por otro lado:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-x}}{1-x} = \left(\lim_{x \to +\infty} e^{-x} \right) \cdot \left(\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1-x} \right) = e^{-\infty} \cdot 0 = 0 \cdot 0 = 0$$

Sin embargo:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{-x}}{1-x} = \{-x = y\} = \lim_{y \to +\infty} \frac{e^{y}}{1+y} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} =$$
$$= \{\text{L'Höpital}\} = \lim_{y \to +\infty} \frac{e^{y}}{1} = e^{+\infty} = +\infty$$

En conclusión:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

luego, la recta $y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$. No hay asíntotas oblícuas.

Derivando y simplificando:

$$f'(x) = \frac{xe^{-x}}{(x-1)^2}$$

Los factores e^{-x} y $(x-1)^2$ son positivos, luego solamente hay que tener en cuenta el factor x. Así pues, si $x < 0$, $f'(x) < 0$, luego f decrece en $]-\infty, 0[$, y si $x > 0$, f crece en $]0, 1[\cup]1, +\infty[$ (no podemos escribir directamente $]0, +\infty[$ debido a la discontinuidad en $x = 1$).

Teniendo el crecimiento y decrecimiento, los extremos locales son sencillos, en concreto, f tiene un mínimo local en $x = 0$ de valor $f(0) = 1$. Resumiendo, el punto $(0, 1)$ es el único extremo local, en concreto, un mínimo.

Problema 2.2 Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \frac{9 - x^2}{4}$$

1. Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.
2. Esbozar el recinto limitado por la gráfica de f, la recta $x + 2y = 5$ y el eje de abscisas. Calcular el área de dicho recinto.

La recta tangente en $x = 1$ es, $y = f(1) + f'(1)(x - 1)$. Por un lado es $f(1) = \dfrac{9 - 1^2}{4} = 2$, y por otro:

$$f'(x) = -\frac{x}{2} \Longrightarrow f'(1) = -\frac{1}{2}$$

luego la recta tangente es:

$$y = 2 - \frac{1}{2}(x - 1) = 2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} = \frac{5 - x}{2}$$

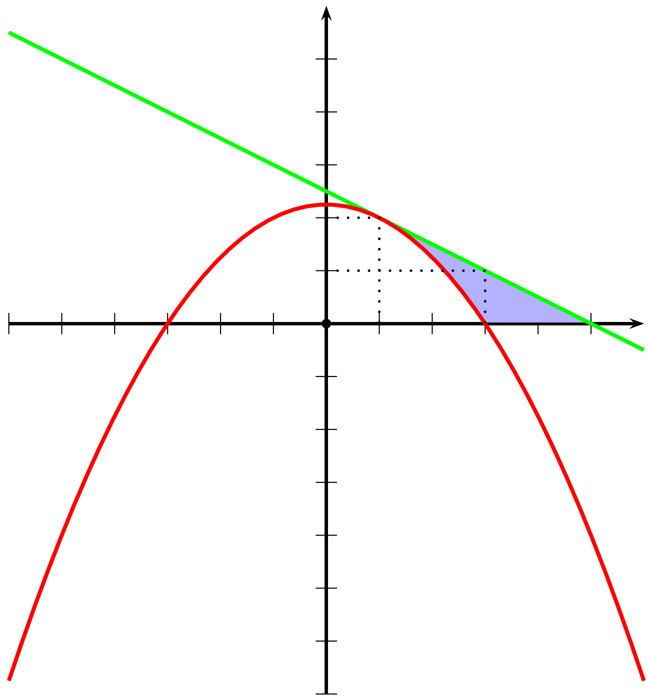
es decir:

$$y = \frac{5 - x}{2}, \text{ o lo que es lo mismo, } x + 2y = 5$$

que es la recta del apartado segundo. Para dibujar esta recta, con dos puntos es suficiente. Uno de ellos es el punto de tangencia $(1, 2)$ y el otro el $(5, 0)$. La gráfica de f es una parábola, f es par, para $x = 0$ es $y = \frac{9}{4}$. Al revés, si $y = 0$, resulta $x = \pm 3$. El vértice es:

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow -\frac{x}{2} = 0 \Longrightarrow x = 0 \Longrightarrow V\left(0, \frac{9}{4}\right)$$

Finalmente, como $f''(x) = -\frac{1}{2} < 0$, f es cóncava, y el recinto pedido es (recta tangente en verde y parábola en rojo):



Sea S la superficie de la región sombreada. El dominio no es simple. Lo descomponemos en dos simples, en concreto $x \in [1,3] \cup [3,5]$. Sean S_1 y S_2 las áreas de cada uno de ellos. Obviamente $S = S_1 + S_2$. En el intervalo $[3,5]$, el área es la de un triángulo rectángulo, luego:

$$S_2 = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1$$

En $[1,3]$ es:

$$S_1 = \int_1^3 \left(\frac{5-x}{2} - \frac{9-x^2}{4} \right) dx = \int_1^3 \frac{x^2 - 2x + 1}{4}\, dx = \frac{1}{4} \int_1^3 (x-1)^2\, dx =$$
$$= \frac{1}{4} \left[\frac{(x-1)^3}{3} \right]_1^3 = \frac{1}{12} \left[(x-1)^3 \right]_1^3 = \frac{1}{12} \cdot 8 = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

luego $S = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$. Con esto finaliza el problema. No obstante, si observamos el dominio desde el eje y, vemos que es simple, luego vamos a hacer lo mismo, pero integrando respecto a éste eje. La función inversa de $y = \frac{9-x^2}{4}$ es:

$$4y = 9 - x^2 \Longrightarrow x^2 = 9 - 4y \Longrightarrow x = \pm\sqrt{9-4y}$$

es decir, $x = +\sqrt{9-4y}$ puesto que la x es positiva.

La función inversa de $y = \frac{5-x}{2}$ es:

$$2y = 5 - x \Longrightarrow x = 5 - 2y$$

Por tanto:

$$S = \int_0^2 \left[(5-2y) - \sqrt{9-4y} \right]\, dy$$

En fin:

$$\int_0^2 \sqrt{9-4y}\, dy = -\frac{1}{4} \int_0^2 -4 \cdot (9-4y)^{1/2}\, dy = -\frac{1}{4} \left[\frac{(9-4y)^{3/2}}{3/2} \right]_0^2 = \{\text{cálculos}\} = \frac{13}{3}$$

También:

$$\int_0^2 (5-2y)\, dy = \left[5y - y^2 \right]_0^2 = 10 - 2^2 = 6$$

luego

$$S = 6 - \frac{13}{3} = \frac{5}{3}, \quad \text{c.q.d.}$$

Problema 2.3 Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones con tres incógnitas:

$$\begin{aligned} x - y &= \lambda \\ 2\lambda y + \lambda z &= \lambda \\ -x - y + \lambda z &= 0 \end{aligned}$$

1. Clasificarlo según los distintos valores del parámetro λ.
2. Resolverlo par $\lambda = 0$ y $\lambda = -1$.

Las matrices de los coeficientes y ampliada son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2\lambda & \lambda \\ -1 & -1 & \lambda \end{pmatrix}, \qquad A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \lambda \\ 0 & 2\lambda & \lambda & \lambda \\ -1 & -1 & \lambda & 0 \end{pmatrix}$$

Desarrollando, obtenemos $|A| = 2\lambda(\lambda+1)$, luego

$$|A| = 0 \iff \lambda = 0 \text{ ó } \lambda = -1$$

Distinguimos tres casos:

- Si $\lambda \neq 0, -1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow r(A) = 3$. La matriz ampliada también tiene rango 3, y el número de incógnitas también es 3. En definitiva, el sistema es de Cramer, y tiene por tanto solución única. No hay nada que resolver puesto que no nos lo han pedido.

- Si $\lambda = 0$, es $|A| = 0$, luego $r(A) < 3$. La matriz ampliada es

  $$A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  Eliminamos la segunda fila, con lo cual la matriz queda como:

  $$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  Sumando a la segunda fila la primera:

  $$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \{\text{dividiendo por 2 la segunda fila}\} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  es decir, $\text{rango}(A) = 2 = \text{rango}(A')$, el número de incógnitas es $n = 3$, luego es un sistema compatible con infinitas soluciones dependientes de 1 parámetro. El sistema queda como:

  $$x - y = 0, \; y = 0 \Longrightarrow x = 0$$

  luego, la solución es:

  $$x = 0, \; y = 0, \; z = t, \; \forall t \in \mathbb{R}$$

- Si $\lambda = -1$, es $|A| = 0$, luego $r(A) < 3$. La matriz ampliada es

  $$A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

  La suma de la primera y tercera es la segunda, luego, eliminamos la tercera, con lo cual la matriz queda como:

  $$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

  es decir, $\text{rango}(A) = 2 = \text{rango}(A')$, el número de incógnitas es $n = 3$, luego es un sistema compatible con infinitas soluciones dependientes de 1 parámetro. El sistema queda como:

  $$x - y = -1, \; -2y - z = -1$$

  Llamando $y = t$ es, $z = 1 - 2t$, $x = y - 1 = t - 1$, luego, la solución es:

  $$x = -1 + t, \; y = t, \; z = 1 - 2t, \; \forall t \in \mathbb{R}$$

Problema 2.4 Hallar el punto simétrico de $P(2,1,-5)$ respecto de la recta r definida por

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ x + y + 2 = 0 \end{cases}$$

Parametrizamos r, y para ello, hacemos $x = t \Longrightarrow z = t$, y por tanto $y = -x - 2 = -t - 2$, es decir:

$$r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = -2 - t \\ z = t \end{cases}$$

Un vector director de r es $\vec{u} = (1,-1,1)$. Sea π el plano perpendicular a r que pasa por P. El vector director de r es el vector normal de π, luego, la ecuación implícita de π es:

$$x - y + z + \lambda = 0$$

Como $P \in \pi$, tenemos:

$$2 - 1 - 5 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 4 \Longrightarrow \pi \equiv x - y + z + 4 = 0$$

Sea R el punto de intersección de r y π, es decir $R = r \cap \pi$. Como $R \in r$, R es de la forma $R = (t, -2-t, t)$. Como además $R \in \pi$, debe cumplirse:

$$t + 2 + t + t + 4 = 0 \Longrightarrow 3t + 6 = 0 \Longrightarrow t = -2 \Longrightarrow R(-2, 0, -2)$$

El punto R es el punto medio del segmento PP', siendo $P'(a,b,c)$ el punto que andamos buscando. Aplicando la fórmula del punto medio:

$$\frac{a+2}{2} = -2,\ \frac{b+1}{2} = 0,\ \frac{c-5}{2} = -2 \Longrightarrow a = -6,\ b = -1,\ c = 1$$

luego el punto buscado es $P'(-6,-1,1)$.