Pruebas de Acceso a Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado.

Bachillerato L. O. E.

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Puedes utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos.

PROPUESTA A

1A. Dada la función

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c,$$

calcula los parámetros $a, b, c \in \mathbb{R}$ sabiendo que:

- la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = -1$ tiene pendiente -3
- $f(x)$ tiene un punto de inflexión de coordenadas $(1, 2)$.

(2,5 puntos)

2A. a) Esboza la región encerrada entre la parábola $f(x) = x^2 - 1$ y la recta $g(x) = 5 - x$. **(0,5 puntos)**
b) Calcula el área de la región anterior. **(2 puntos)**

3A. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $m \in \mathbb{R}$

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & 2y & + & 3z & = & 0 \\ mx & + & (m+1)y & + & (m-1)z & = & m-2 \\ 3x & + & (m+3)y & + & 4z & = & m-2 \end{array} \right.$$

(1,5 puntos)

b) Calcula la solución cuando el sistema sea compatible determinado. **(1 punto)**

4A. a) Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de intersección del plano $\pi \equiv x - y + 3z = -3$ con los ejes de coordenadas. **(1,25 puntos)**
b) Si llamamos A, B y C a los vértices del triángulo del apartado anterior, encuentra el valor del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$ para que el tetraedro de vértices A, B, C y $D(-\lambda^2, 2 + \lambda, -3)$ tenga volumen mínimo. **(1,25 puntos)**

(sigue a la vuelta)

PROPUESTA B

1B. La concentración (en %) de nitrógeno de un compuesto viene dada, en función del tiempo $t \in [0, +\infty)$ medido en segundos, por la función

$$N(t) = \frac{60}{1 + 2e^{-t}}$$

a) Comprueba que la concentración de nitrógeno crece con el tiempo. ¿Para qué $t \in [0, +\infty)$ la concentración de nitrógeno es mínima y cuál es esta concentración? **(1,25 puntos)**

b) ¿A qué valor tiende la concentración de nitrógeno cuando el tiempo tiende a infinito? **(1,25 puntos)**

2B. Calcula las siguientes integrales:

$$\int \frac{1}{4 + 9x^2}\, dx \qquad\qquad \int \left(\tan x + \frac{1}{\tan x}\right) dx$$

(1,25 puntos por integral)

3B. a) Sean A y B matrices cuadradas de orden $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, tales que B es la inversa de A:

- Si $|A| = 3$, razona cuánto vale $|B|$.
- ¿Cuál es el rango de B?

(0,75 puntos)

b) Calcula el determinante de la matriz cuadrada X de orden 3 que verifica

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 0 & 10 & -3 \\ 0 & 7 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

(1,75 puntos)

4B. Dados el plano $\pi \equiv 2x - z = 6$ y la recta

$$r \equiv \begin{cases} y + z = 0 \\ x - y + az = 4 \end{cases}$$

a) Encuentra el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que π y r sean paralelos. **(1,25 puntos)**

b) Para el valor de a del apartado anterior, da la ecuación general del plano π' que contiene a r y es perpendicular a π. **(1,25 puntos)**

Pruebas de Acceso a Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado.

Bachillerato L. O. E.

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Puedes utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos.

PROPUESTA A

1A. a) Enuncia el Teorema de Bolzano y el Teorema de Rolle. **(1 punto)**

b) Demuestra, usando el Teorema de Bolzano, que existen al menos tres raíces reales distintas de la ecuación

$$x^5 - 5x + 3 = 0 \qquad \textbf{(1 punto)}$$

c) Demuestra, usando el Teorema de Rolle, que la ecuación anterior no puede tener más de tres raíces reales distintas. **(0,5 puntos)**

2A. Calcula las siguientes integrales:

$$\int \operatorname{sen}^2 x \;\cos x \; dx \qquad \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx \qquad \textbf{(1,25 puntos por integral)}$$

3A. Sabiendo que

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 5,$$

calcula el valor de los determinantes

$$\begin{vmatrix} b & b+a & 2c \\ e & e+d & 2f \\ h & h+g & 2i \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a+d+g & b+e+h & c+f+i \\ d+g & e+h & f+i \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

indicando las propiedades que usas en cada caso para justificar tu respuesta.
(1,25 puntos por determinante)

4A. Dado el plano $\pi \equiv x + y + 2z = 7$ y el punto $P(1, 0, 0)$:

a) Calcula el punto Q de π que hace mínima la distancia a P. **(1,25 puntos)**

b) Calcula el punto simétrico P' de P respecto del plano π. **(1,25 puntos)**

(sigue a la vuelta)

PROPUESTA B

1B. Dada la función
$$f(x) = \frac{ax^2+b}{2x+6},$$
calcula los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$ sabiendo que:

- $f(x)$ tiene una asíntota oblicua de pendiente 2
- $f(x)$ tiene un mínimo relativo en el punto de abscisa $x = 0$. **(2,5 puntos)**

2B. Calcula el área encerrada entre las gráficas de las funciones
$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1 \qquad \text{y} \qquad g(x) = 1$$
(2,5 puntos)

3B. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & 2z & = & 0 \\ ax & & & - & 3z & = & a \\ 2x & + & ay & - & z & = & a \end{array}\right.$$
(1,5 puntos)

b) Resuélvelo para el valor $a = 1$. **(1 punto)**

4B. Dado el punto $P(1, 0, 0)$ y la recta
$$r \equiv \left\{\begin{array}{l} x = 2\lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = -1 \end{array}\right. \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

a) Da unas ecuaciones paramétricas de la recta s que pasa por P y corta perpendicularmente a r. **(1,25 puntos)**

b) Calcula la distancia de P a r. **(1,25 puntos)**

Pruebas de Acceso a Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado.

Bachillerato L. O. E.

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Puedes utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos.

PROPUESTA A

1A. a) Enuncia el Teorema del valor medio de Lagrange y da su interpretación geométrica. **(1 punto)**

b) Calcula un punto del intervalo $[0,2]$ en el que la recta tangente a la gráfica de $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$ sea paralela a la cuerda (o segmento) que une los puntos de la gráfica de $f(x)$ en $x = 0$ y $x = 2$. **(1,5 puntos)**

2A. Calcula la integral

$$\int \frac{x+2}{x^3+x^2}\,dx \qquad \textbf{(2,5 puntos)}$$

3A. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) Calcula A^n cuando $n \in \mathbb{N}$ es par. **(0,75 puntos)**

b) Resuelve la ecuación matricial $6A^{20}X = B - 3AX$, donde X es una matrix cuadrada de orden 3. (Indicación: Sustituye de inicio el valor de A^{20} para facilitar los cálculos) **(1,75 puntos)**

4A. Dadas las rectas

$$r \equiv \frac{x+1}{2} = y = \frac{z-1}{3}, \qquad s \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = a + \lambda \\ z = -\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

a) Calcula el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que r y s se corten en un punto. Da dicho punto de corte. **(1,25 puntos)**

b) Para el valor de a obtenido, calcula la ecuación general del plano π que contiene a r y s. **(1,25 puntos)**

(sigue a la vuelta)

PROPUESTA B

1B. Sabiendo que la función

$$f(x) = \frac{ax+b}{x^2+1}, \qquad a, b \in \mathbb{R},$$

tiene un punto crítico en $(1,1)$, calcula a y b y demuestra que el punto crítico es un máximo. **(2,5 puntos)**

2B. a) Esboza la región encerrada entre el eje de abscisas y las parábolas $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^2 - 4x + 4$. **(0,5 puntos)**

b) Calcula el área de la región anterior. **(2 puntos)**

3B. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $m \in \mathbb{R}$

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} mx & & & + & z & = & 1 \\ & & my & + & z & = & m \\ -mx & - & my & + & (m+1)z & = & -m-1 \end{array} \right.$$

(1,5 puntos)

b) Calcula la solución cuando el sistema sea compatible indeterminado. **(1 punto)**

4B. Dados el plano $\pi \equiv y - z = 3$ y la recta

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{array} \right. \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

a) Estudia la posición relativa de π y r. **(1,25 puntos)**

b) Da unas ecuaciones paramétricas de la recta s paralela a π que corta a r perpendicularmente en el punto $P(0, 1, -1)$. **(1,25 puntos)**

UNIVERSIDAD DE CASTILLA-LA MANCHA

Pruebas de Acceso a Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado.

Bachillerato L. O. E.

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Puedes utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos.

PROPUESTA A

1A. a) Interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto. **(0,5 puntos)**

b) Encuentra el punto de la función $f(x) = x^4 - 8x^3 + 18x^2 + 30x + 1$ en el que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ es mínima. Encuentra también el punto donde la pendiente es máxima.

(2 puntos)

2A. Encuentra una primitiva $F(x)$ de la función

$$f(x) = (x^2 + 1)e^x$$

tal que $F(0) = 5$. **(2,5 puntos)**

3A. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & -b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & -b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \qquad a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0, b \neq 0$$

a) Calcula $A \cdot A^T$, donde A^T es la matriz traspuesta de A. **(1 punto)**

b) Razona que siempre existe la matriz inversa de A, independientemente de los valores $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0, b \neq 0$. **(1,5 puntos)**

4A. Dados los planos $\pi_1 \equiv x - 2y - z = 0$ y $\pi_2 \equiv 2x - y + \lambda z = 4$:

a) Calcula el valor del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$ para que los planos π_1 y π_2 sean perpendiculares. **(1 punto)**

b) Para el valor de λ obtenido en el apartado anterior, obtén unas ecuaciones paramétricas de la recta r paralela a π_1 y a π_2 que pasa por el punto $P(1, 2, 3)$. **(1,5 puntos)**

(sigue a la vuelta)

PROPUESTA B

1B. Calcula el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, para que se verifique la igualdad

$$\lim_{x \to 0} e^{\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x}} = \lim_{x \to 0} (\cos 2x)^{\frac{a}{x^2}} \qquad \textbf{(2,5 puntos)}$$

2B. a) Esboza la región encerrada entre la parábola $f(x) = x^2 - 6x + 9$ y la recta $g(x) = 2x + 2$. **(0,5 puntos)**

b) Calcula el área de la región anterior. **(2 puntos)**

3B. Un grupo de amigos se reúne cada sábado en la misma cafetería. Hace dos sábados tomaron 4 cafés, 6 refrescos y 2 infusiones, siendo el precio total 15,40 euros. El sábado pasado tomaron 5 cafés, 4 refrescos y 3 infusiones, siendo el precio total 14,40 euros. Hoy sábado han pedido 3 cafés, 8 refrescos y 1 infusión. Cuando piden la cuenta, el camarero les dice que el precio total es 18 euros.

Se pide:

a) Plantea un sistema de ecuaciones lineales con los datos del enunciado anterior. **(1 punto)**

b) Asumiendo que los dos sábados anteriores los precios totales estaban bien calculados y que los precios de los cafés, refrescos e infusiones no han cambiado, razona que hay un error en la cuenta de este sábado. **(1,5 puntos)**

4B. Dadas las rectas

$$r \equiv \frac{x}{2} = y + 1 = \frac{z-1}{3}, \qquad s \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

a) Estudia su posición relativa. **(1,25 puntos)**

b) Calcula la distancia entre r y s. **(1,25 puntos)**
