Pruebas de Acceso a Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado.

Bachillerato L. O. E.

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Puedes utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos.

PROPUESTA A

1A. a) Enuncia el Teorema de Bolzano. **(0,5 puntos)**

b) Razona que las gráficas de las funciones $f(x) = 3x^5 - 10x^4 + 10x^3 + 3$ y $g(x) = e^x$ se cortan en algún punto con coordenada de abscisa entre -1 y 0. **(1 punto)**

c) Calcula los puntos de inflexión de $f(x)$. **(1 punto)**

2A. Calcula el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, para que el valor (en unidades de superficie) del área de la región determinada por la parábola $f(x) = -x^2 + a^2$ y el eje de abscisas, coincida con la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = -a$. **(2,5 puntos)**

3A. a) Encuentra dos matrices A, B cuadradas de orden 2 que cumplan:

- Su suma es la matriz identidad de orden 2.
- Al restar a la matriz A la matriz B se obtiene la traspuesta de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$ **(1,5 puntos)**

b) Si M es una matriz cuadrada de orden 2 tal que $|M| = 7$, razona cuál es el valor de los determinantes $|M^2|$ y $|2M|$. **(1 punto)**

4A. a) Estudia la posición relativa del plano $\pi \equiv x - y - z = a$ y la recta

$$r \equiv \begin{cases} 2x + y + az = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$. **(1,25 puntos)**

b) Calcula la distancia entre π y r para cada valor de $a \in \mathbb{R}$. **(1,25 puntos)**

(sigue a la vuelta)

PROPUESTA B

1B. a) Calcula los valores de los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$ para que la función

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx}{x + 1}$$

tenga como asíntota oblicua la recta $y = 2x + 3$. **(1,5 puntos)**

b) Para los valores encontrados, escribe la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisas $x = 0$. **(1 punto)**

2B. Calcula las siguientes integrales:

$$\int \frac{2\,\text{sen}x\,\cos x}{1 + \text{sen}^2 x}\,dx, \qquad \int \frac{x^2 + x - 4}{x^3 - 4x}\,dx$$

(1,25 puntos por integral)

3B. a) Sabiendo que

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = 2$$

donde $a, b, c \in \mathbb{R}$, calcula los determinantes

$$\begin{vmatrix} a-1 & b-1 & c-1 \\ a^2-1 & b^2-1 & c^2-1 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} (a+1)^2 & (b+1)^2 & (c+1)^2 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

indicando las propiedades que usas en cada caso para justificar tu respuesta. **(2 puntos)**

b) Razona que, puesto que $|A| = 2$, los parámetros a, b y c deben ser distintos entre sí (no puede haber dos iguales). **(0,5 puntos)**

4B. a) Estudia la posición relativa de las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + y - 2z = 1 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad s \equiv \begin{cases} x - z = 0 \\ x + 2y - z = 12 \end{cases}$$

(1,25 puntos)

b) Calcula la distancia entre las rectas r y s. **(1,25 puntos)**

Pruebas de Acceso a Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado.

Bachillerato L. O. E.

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Puedes utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos.

PROPUESTA A

1A. a) Calcula el valor de $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, para que la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - e^{-x}}{ax}, & \text{si } x < 0 \\ \left(\dfrac{2x+7}{2x+1}\right)^x, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

sea continua en $x = 0$. **(1,25 puntos)**

b) Calcula el límite

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) \qquad \textbf{(1,25 puntos)}$$

2A. Calcula las siguientes integrales:

$$\int \frac{1 + x + \sqrt{x}}{x^2}\, dx, \qquad \int \frac{e^x}{e^{2x} - 3e^x + 2}\, dx \qquad \textbf{(1,25 puntos por integral)}$$

Observación: El cambio de variable $t = e^x$ puede ayudarte a calcular la segunda integral.

3A. a) Despeja X en la ecuación matricial $X \cdot A - B = 2X$, donde A, B y X son matrices cuadradas de orden 3. **(1,25 puntos)**

b) Calcula X, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(1,25 puntos)}$$

4A. a) Estudia la posición relativa de las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x - 2z = 1 \\ y - z = 2 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad s \equiv \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 2y + 2z = a \end{cases}$$

en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$. **(2 puntos)**

b) Encuentra el punto de corte de las rectas en el caso en que sean secantes. **(0,5 puntos)**

(sigue a la vuelta)

PROPUESTA B

1B. a) Interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto. **(1 punto)**

b) Halla el punto de la gráfica de la función $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$ donde la recta tangente tiene pendiente mínima. **(1,5 puntos)**

2B. a) Esboza la región encerrada entre las gráficas de las funciones $f(x) = 1/x$ y $g(x) = -2x + 3$. **(0,5 puntos)**

b) Calcula el área de la región anterior. **(2 puntos)**

3B. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $m \in \mathbb{R}$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & 5z & = & -1 \\ 2x & - & y & - & 3z & = & 1-m \\ x & - & 2y & + & 2z & = & m \end{array}\right.$$ **(1,5 puntos)**

b) Calcula la solución cuando el sistema sea compatible indeterminado. **(1 punto)**

4B. a) Dados los puntos $P(4,2,3)$ y $Q(2,0,-5)$, da la ecuación implícita del plano π de modo que el punto simétrico de P respecto a π es Q. **(1,25 puntos)**

b) Calcula el valor del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$ para que el plano determinado por los puntos P, Q y $R(\lambda, 1, 0)$ pase por el origen de coordenadas. **(1,25 puntos)**

Pruebas de Acceso a Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado.

Bachillerato L. O. E.

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Puedes utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos.

PROPUESTA A

1A. a) Enuncia el Teorema de Rolle. **(1 punto)**

b) Razona que existe al menos un punto en el intervalo $(1, 2)$ donde la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 15x^2 + 4x + 12$ tiene pendiente nula. **(1,5 puntos)**

2A. Calcula el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, para que el área de la región comprendida entre las gráficas de las parábolas $f(x) = -x^2 + a^2$ y $g(x) = -4x^2 + 4a^2$ sea 32 unidades de superficie. **(2,5 puntos)**

3A. a) Despeja X en la ecuación matricial $A \cdot X = I_3 - 2B \cdot X$, donde I_3 es la matriz identidad de orden 3 y A, B y X son matrices cuadradas de orden 3. **(1,25 puntos)**

b) Calcula X, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ **(1,25 puntos)**

4A. Dados los planos $\pi \equiv ax + 2y + z = 4$, $a \in \mathbb{R}$, y $\pi' \equiv 2x - 4y - 2z = b$, $b \in \mathbb{R}$:

a) Razona para qué valores de $a, b \in \mathbb{R}$ son π y π' coincidentes. **(1 punto)**

b) Razona para qué valores de $a, b \in \mathbb{R}$ son π y π' paralelos no coincidentes. **(0,75 puntos)**

a) Razona para qué valores de $a, b \in \mathbb{R}$ son π y π' perpendiculares. **(0,75 puntos)**

(sigue a la vuelta)

Pruebas de Acceso a Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado.

Bachillerato L. O. E.

Materia: MATEMÁTICAS II

PROPUESTA B

1B. a) Calcula para qué valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$ se verifica la igualdad

$$\lim_{x \to 0} (\cos(ax))^{\frac{1}{x^2}} = e^{-2}$$ **(1,25 puntos)**

b) Calcula el límite

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}\right)$$ **(1,25 puntos)**

2B. Calcula las siguientes integrales:

$$\int \frac{2\cos x}{1 + \operatorname{sen}^2 x}\, dx, \qquad \int (x^2 + 2x) \ln x \; dx$$ **(1,25 puntos por integral)**

3B. Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 0 \\ -4x & - & 2y & + & mz & = & 0 \\ 3x & + & y & + & 2z & = & 0 \end{array} \right. \qquad m \in \mathbb{R}$$

a) ¿Existe algún valor del parámetro m para el que el sistema sea incompatible? **(0,5 puntos)**

b) Estudia para qué valor del parámetro m el sistema tiene alguna solución distinta de la trivial $x = y = z = 0$. **(1 punto)**

c) Resuelve el sistema para todos los valores de $m \in \mathbb{R}$. **(1 punto)**

4B. Dados el punto $P(1, 0, 1)$ y la recta

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 2 + \lambda \end{array} \right. \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

a) Da unas ecuaciones paramétricas de la recta s que corta perpendicularmente a r y pasa por el punto P. **(1,25 puntos)**

b) Calcula el punto simétrico Q de P respecto a r. **(1,25 puntos)**

Pruebas de Acceso a Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado.

Bachillerato L. O. E.

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Puedes utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos.

PROPUESTA A

1A. Si la media aritmética de dos números reales positivos es 24, calcula el valor de dichos números para que el producto de uno de ellos por el cuadrado del otro sea máximo. **(2,5 puntos)**

2A. Calcula las siguientes integrales:

$$\int \left(\frac{2\ln x}{x} + \ln x \right) \, dx, \qquad \int 3\sqrt{2x+1}\, dx$$

(1,25 puntos por integral)

3A. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $m \in \mathbb{R}$

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} & & 2y & - & z & = & m \\ 3x & & & - & 2z & = & 11 \\ & & y & + & z & = & 6 \\ 2x & + & y & - & 4z & = & m \end{array} \right.$$

(1,5 puntos)

b) Calcula la solución cuando el sistema sea compatible determinado. **(1 punto)**

4A. Dado el plano $\pi \equiv x - z = 0$ y las rectas

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = 2 \\ z = -1 - \lambda \end{array} \right. \quad \lambda \in \mathbb{R} \qquad \text{y} \qquad s \equiv \left\{ \begin{array}{l} x + y = 2 \\ 4y + 2z = 6 \end{array} \right.$$

a) Halla el ángulo que forman π y r. Razona cuántos planos hay perpendiculares a π que contengan la recta r. **(1,25 puntos)**

b) Halla la posición relativa de π y s. Razona cuántos planos hay perpendiculares a π que contengan la recta s. **(1,25 puntos)**

(sigue a la vuelta)

PROPUESTA B

1B. a) Enuncia el Teorema del valor medio de Lagrange. **(1,25 puntos)**

b) Calcula un punto del intervalo $[-2, 2]$ en el que la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 3x + 2$ sea paralela a la recta que pasa por los puntos $(-2, 0)$ y $(2, 12)$. **(1,25 puntos)**

2B. El área del recinto encerrado entre la gráfica de la parábola $f(x) = a(x^2 - 2x)$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, y el eje de abscisas, es de 12 unidades de superficie. Calcula el valor de a. **(2,5 puntos)**

3B. Évariste Galois, Niels Abel y Srinivasa Ramanujan fueron tres genios matemáticos que antes de sus prematuras muertes dejaron desarrollada una importante obra matemática. Calcula las edades que tenían cuando fallecieron, sabiendo que su suma es 78, que su media aritmética coincide con la edad de Abel, y que cuatro veces la edad de Ramanujan más dos veces la de Abel es nueve veces la edad de Galois.
(1,25 puntos por plantear un sistema de ecuaciones lineales con los datos del problema y 1,25 puntos por calcular las edades)

4B. a) Determina el valor del parámetro $k \in \mathbb{R}$ para que la recta

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = k - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

esté contenida en el plano $\pi \equiv x + 2y + z = 7$. **(1,25 puntos)**

b) Para el valor de k obtenido en el apartado anterior, obtén la ecuación implícita de un plano π' que corte perpendicularmente a π, de modo que la intersección de ambos planos sea r. **(1,25 puntos)**
