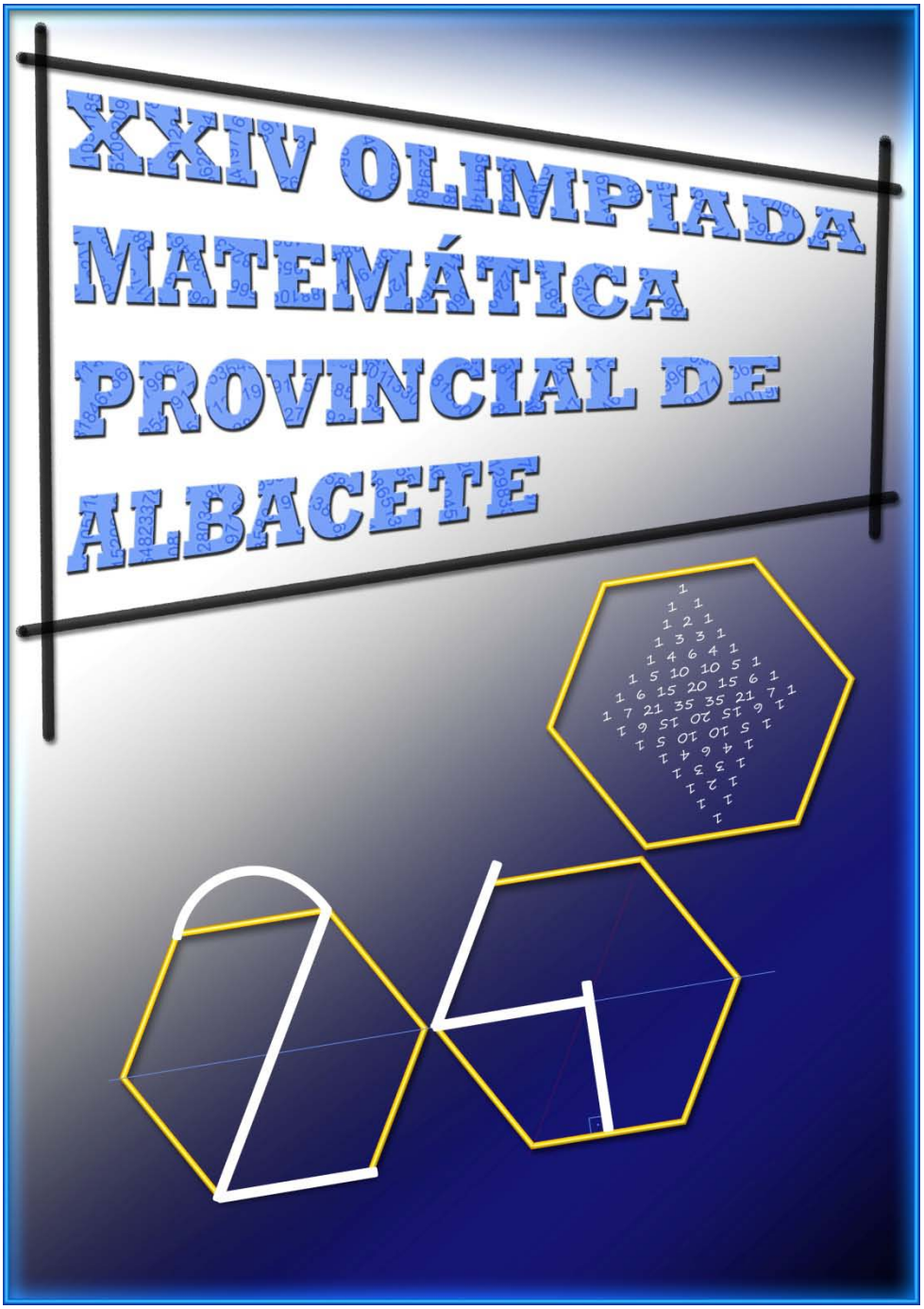


DISEÑO DE Mª PILAR TEMPRADO BELMONTE

Enunciados y Soluciones a los Problemas

SOCIEDAD CASTELLANO MANCHEGA DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

S.C.M.P.M.

XXIV OLIMPIADA

Autor
Juan Martínez-Tébar Giménez

Esta publicación se distribuye de forma gratuita al profesorado de matemáticas de los centros de secundaria de Castilla la Mancha

PRESENTACIÓN

La Olimpiada Matemática es una actividad organizada con la finalidad de contribuir a desarrollar la competencia matemática entre los alumnos de primer y segundo ciclos de Educación Secundaria. Permite además intercambiar experiencias y compartir propuestas didácticas por parte de los profesores de los diferentes centros de la provincia de Albacete. También con ella se intenta sensibilizar a la sociedad sobre la necesidad de mejorar una educación matemática que potencie el desarrollo personal y la integración de unos ciudadanos libres y responsables en el siglo XXI. Son propósitos de esta actividad:

- Potenciar el razonamiento matemático a través de la resolución de problemas.
- Fomentar la capacidad de comunicación y argumentación matemáticas de los estudiantes.

La riqueza de un problema no se encuentra en su resolución, sino en la variedad de puntos de vista que nacen de los diferentes “resolutores”, el enunciado debe invitar a la asunción de riesgos en la interpretación, a que cada uno marque sus límites, a que cada uno, en fin, haga suyo el planteamiento y obtenga placer al dedicar tiempo y esfuerzo a su resolución, aunque ésta no se alcance.

.

En esta edición los finalistas han sido:

CICLO 12-14		CICLO 14-16	
BURGE CANO	DWAYNE	CUENCA ZOROA	CARMEN
CANDEL MARTÍNEZ	ANDRÉS	GARCÍA GARCÍA	ALEJANDRO
CASILLAS DEL VAL	NICOLÁS	MARTÍNEZ TABERNERO	RODRIGO
GARCÍA CERDÁN	FERNANDO	SALVADOR LÓPEZ	MIGUEL ÁNGEL
GARCÍA MARTÍNEZ	NURIA	MORENO BONILLO	FRANCISCO MIGUEL
GONZÁLEZ CALATAYUD	JOSÉ VICENTE	ANDREU MORENO	FRANCISCO
LÓPEZ MATILLA	JUAN	PEÑARUBIA BURGOS	ROBERTO
LOZANO ROMERO	FRANCISCO	GONZÁLEZ DELGADO	GABRIEL
PÉREZ ANDRÉS	QUERUBÍN LUIS	HERNÁNDEZ PLAZA	DANIEL
SÁEZ GONZÁLEZ	LUCÍA	MANSO GARCÍA-MAURIÑO	JUAN

Profesores y alumnos finalistas en el Ayuntamiento de Chinchilla de Monte Aragón

XXII Olimpiada Provincial de Albacete

PRESENTACIÓN 3

Nivel 12/14 7

Primera Fase 7
F.1 (12/14) Problema 1. EL JUEGO DE 2013 7
F.1 (12/14) Problema 2. AÑO INTERNACIONAL DE LA ESTADÍSTICA 7
F.1 (12/14) Problema 3. CU-CÚ 8
F.1 (12/14) Problema 4. MÚLTIPLOS DE 3. 8
F.1 (12/14) Problema 5. PERÍMETRO 9
F.1 (12/14) Problema 6. ¡¡GOOOOOOL!! 9

Segunda Fase 10
F.2 (12/14) Problema 1. SOMBRA 10
F.2 (12/14) Problema 3. LA PLAZA DEL NÚMERO PI 11

Fase Final 12
F.F (12/14) Problema 1. COMIENDO CARAMELOS 12
F.F (12/14) Problema 2. DE PASEO 12
F.F (12/14) Problema 3. QUITANDO FICHAS 13

Nivel 14/16 14

Primera Fase 14
F.1 (14/16) Problema 1. AÑO INTERNACIONAL DE LA ESTADÍSTICA. 14
F.1 (14/16) Problema 2. EL JUEGO DE 2013. 14
F.1 (14/16) Problema 4. ¿CÓMO TE LLAMAS? 15
F.1 (14/16) Problema 6. NUEVOS MÉDICOS. 16

Segunda Fase 17
F.2 (14/16) Problema 1. PARTIENDO TRIÁNGULOS 17
F.2 (14/16) Problema 2. 007 18
F.2 (14/16) Problema 3. UNA NOCHE EN LA ÓPERA 18

Fase Final 19
F.F (14/16) Problema 1. ÁREAS ESCONDIDAS. 19
F.F (14/16) Problema 2. A VUELTAS CON 2013 19

Soluciones 20
- Solución - Fase 1 - (12/14) – EL JUEGO DE 2013. 20
- Solución - Fase 1 - (12/14) – AÑO INTERNACIONAL DE LA ESTADÍSTICA 21
- Solución - Fase 1 - (12/14) – CU-CÚ 21
- Solución - Fase 1 - (12/14) – MÚLTIPLOS DE TRES. 21
- Solución - Fase 1 - (12/14) – PERÍMETRO. 21
- Solución - Fase 1 - (12/14) –¡¡GOOOOL!!. 22

- Solución - Fase 2 - (12/14) – SOMBRA. 22
- Solución - Fase 2 - (12/14) – PAGA DOMINICAL 23
- Solución - Fase 2 - (12/14) – LA PLAZA DEL NÚMERO PI. 23
- Solución - Fase Final - (12/14) – COMIENDO CARAMELOS 24
- Solución - Fase Final - (12/14) –DE PASEO 25
- Solución - Fase Final - (12/14) – QUITANDO FICHAS..... 25
- Solución - Fase 1 - (14/16) – JUEGO DEL 2013. 26
- Solución - Fase 1 - (14/16) – AÑO INTERNACIONAL DE LA ESTADÍSTICA. 27
- Solución - Fase 1 - (14/16) – HORA EXACTA 27
- Solución - Fase 1 - (14/16) – ¿COMO TE LLAMAS? 27
- Solución - Fase 1 - (14/16) –LA ESPIRAL DE ALBERTO 28
- Solución - Fase 2 - (14/16) –PARTIENDO TRIÁNGULOS ... 29
- Solución - Fase 2 - (14/16) –007..... 30
- Solución - Fase 2 - (14/16) –UNA NOCHE EN LA ÓPERA .. 30
- Solución - Fase Final - (14/16) – ÁREAS ESCONDIDAS..... 32
- Solución - Fase Final - (14/16) –A VUELTAS CON 2013. 32
- Solución - Fase Final - (14/16) –UNA PARTIDA A LOS DADOS. 33

Fotografías 35

XXIV OLIMPIADA

XXIV Olimpiada

Chinchilla de Monte Aragón 2012

Nivel 12/14

Primera Fase

F.1 (12/14) Problema 1. EL JUEGO DE 2013

Con los dígitos del año 2013, es decir, 0 - 1 - 2 - 3, y las operaciones básicas: SUMA (+), RESTA (-), PRODUCTO (x), DIVISIÓN (÷), así como los paréntesis o corchetes necesarios, conseguir todos los números entre el 0 y el 10.

F.1 (12/14) Problema 2. AÑO INTERNACIONAL DE LA ESTADÍSTICA

2013 ha sido declarado por la UNESCO Año Internacional de la Estadística.

STATISTICS2013.ORG
AÑO INTERNACIONAL DE LA ESTADÍSTICA

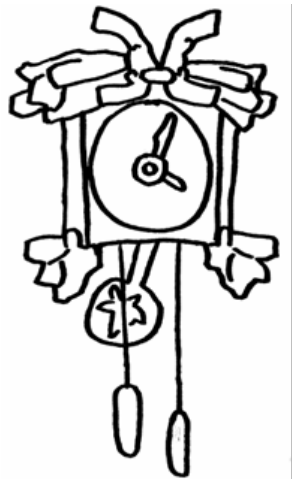
Un parámetro estadístico muy conocido es la media aritmética, que consiste en sumar todos los valores de una colección y dividirlos por el número total de datos.

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots\ldots x_n}{n}$$

En una de sus películas Groucho Marx, caracterizado de médico le dice a una enfermera "Señorita, tengo mucha prisa, deme una media de la temperatura de todos mis pacientes"
¿Podría un médico extraer alguna conclusión de ese dato para curar individualmente a sus pacientes? Razona tu respuesta.

F.1 (12/14) Problema 3. CU-CÚ

Un reloj de cuco tarda cinco segundos en dar las 6. ¿Cuánto tardará en dar las doce?

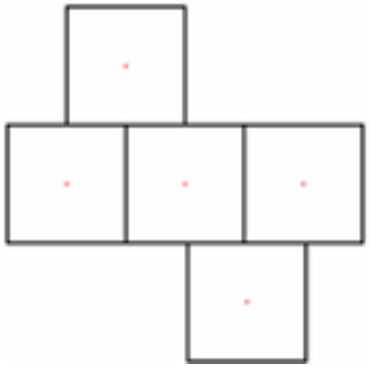


F.1 (12/14) Problema 4. MÚLTIPLOS DE 3.

Con los dígitos 2, 3, 5, 7 y 8, ¿cuántos números múltiplos de 3 se pueden escribir usando tres cifras distintas?

F.1 (12/14) Problema 5. PERÍMETRO

Si la figura está formada por cinco cuadrados de perímetro 40 cm. cada uno, ¿cuál es el perímetro de la figura?



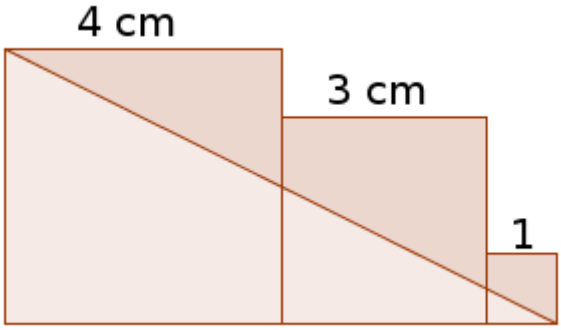
F.1 (12/14) Problema 6. ¡¡GOOOOOOL!!

Cuatro famosos futbolistas discuten sobre quién fue el autor del último gol que le dio el triunfo a uno de sus equipos.
Andrés dice "Radamel es el autor del gol".
Radamel dice "Cristiano es el autor del gol".
Cristiano dice que Radamel ha mentido al decir que él ha sido el que ha metido el gol.
Leo dice que él no marcó el último gol.
Sabiendo que sólo uno de ellos dice la verdad ¿puedes averiguar quién fue el autor del gol?
Nota: los nombres de los jugadores no guardan ninguna relación con jugadores reales, por supuesto.

Segunda Fase

F.2 (12/14) Problema 1. SOMBRA

Encuentra el área de la zona sombreada.
Por si no ves clara la figura, se trata de encontrar el área dentro de la unión de tres cuadrados, de lados 4, 3 y 1 centímetros, unidos en ese orden y con la cara inferior alineada, que está por encima de la línea que une la esquina superior más alejada del cuadrado grande con la esquina inferior más alejada del más pequeño.



F.2 (12/14) Problema 2. PAGA DOMINICAL

Tres amigos, Juan, Nino y Antonio reciben una paga cada domingo. Averigua cuánto dinero recibe cada uno a partir de las siguientes afirmaciones, sabiendo que sólo dos de las tres afirmaciones que hace cada uno de ellos son ciertas.

Juan dice: "He recibido menos que Nino. Antonio recibe 3€ más que Nino. Nino recibe 10€.".

Nino dice: "Tengo 2€ menos que Antonio de paga. He recibido 9€. Mi paga es 1€ superior a la de Juan.".

Antonio dice:"Hay 3€ de diferencia entre Juan y yo. No soy el que menos recibe. Juan obtiene 12€ de paga."

F.2 (12/14) Problema 3. LA PLAZA DEL NÚMERO PI

En la Plaza del Número Pi hay 17 portales, que al principio estaban numerados del 1 al 17 en orden circular. Sin embargo, cuando el cartero Baldomero llegó a entregar una carta se quedó desconcertado. Alguien había cambiado muchos números de sitio. De hecho, ningún par de números eran consecutivos.
Preguntando a los vecinos, se enteró que habían dedicado un pequeño homenaje al nombre de la plaza, al Número Pi, o, más directamente, a su aproximación 3,14.
Colocaron los números de forma que entre dos portales hubiese una diferencia de 3, o bien de 14. "¡No puede ser!" Dijo Baldomero. "¿Cómo prepararé las cartas para su entrega?".
Los vecinos se negaron a cambiar de nuevo los números, y Baldomero se fue muy enfadado.
Cuando ya estaba en la oficina, recapacitó y pensó que debía respetar la decisión de los vecinos. Sin embargo, no recordaba el orden en el que estaban los números de la plaza.
¿Puedes tú ayudar a Baldomero? ¿Podrás reconstruir el orden en el que están? ¿Puede haber más de un orden diferente en la plaza?

XXIV OLIMPIADA

Fase Final

F.F (12/14) Problema 1. COMIENDO CARAMELOS

Isabel ha estado en la procesión de Chinchilla y le han dado muchos caramelos.

Cuenta 71 caramelos en total de los sabores siguientes: limón, naranja, fresa y menta.

Hay el doble de caramelos de limón que de fresa; los caramelos de naranja son uno menos que los de fresa y los de menta son seis caramelos menos que los de limón.

a. ¿Cuál es el mínimo número de caramelos que has de extraer de la bolsa para estar seguro de tener al menos dos caramelos del mismo sabor?

b. ¿Y cuántos de estos caramelos habría que extraer como mínimo para estar seguro de poder comerse al menos dos sabores?

Razona las respuestas.

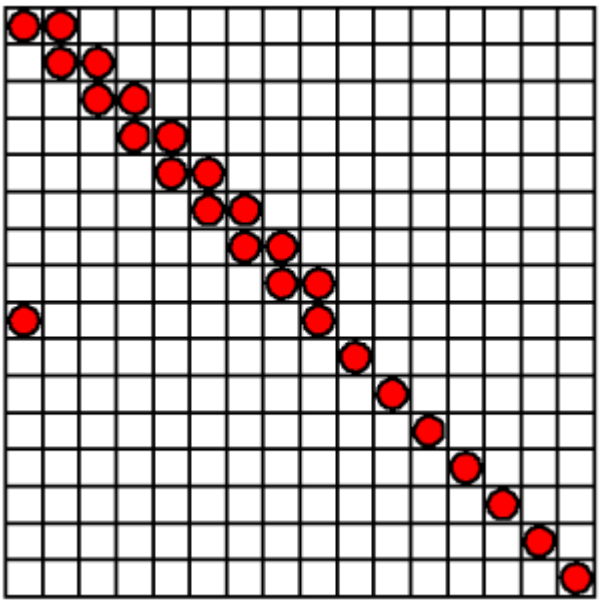
F.F (12/14) Problema 2. DE PASEO

Ana, María y Alicia son tres amigas que van a dar un largo paseo todos los sábados. Cada sábado le toca a una ir a recoger a sus amigas y tienen el siguiente acuerdo.
Cuando Ana recoge a Alicia pasa primero a por María recorriendo 14 Km.
María siempre que recoge a Ana pasa primero por casa de Alicia, recorriendo 18 Km.
Mientras que Alicia siempre que recoge a María pasa primero a recoger a Ana recorriendo 16 km.
Sabiendo que sus casas forman un triángulo. ¿Sabrías indicar el área del triángulo que forman sus casas?

F.F (12/14) Problema 3. QUITANDO FICHAS

En un tablero de 16 x 16 se colocaron 25 fichas, como en la figura.

En el dibujo apreciamos que se han puesto 16 en la diagonal, 8 en las 8 primeras filas exactamente a la derecha de la diagonal, y una ficha en la primera casilla de la novena fila.



Está permitido seleccionar 8 filas y 8 columnas y retirar del tablero todas las fichas que se encuentran en esas 16 líneas. Determina si es posible retirar todas las fichas del tablero

Nivel 14/16

Primera Fase

F.1 (14/16) Problema 1. AÑO INTERNACIONAL DE LA ESTADÍSTICA.

2013 ha sido declarado por la UNESCO Año Internacional de la Estadística.

Un parámetro estadístico muy conocido es la media aritmética, que consiste en sumar todos los valores de una colección y dividirlos por el número total de datos.

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots\ldots x_n}{n}$$

En cierta ocasión un dirigente afirmó, refiriéndose al dinero que iban a recibir las comunidades autónomas, que todas percibirían una cantidad por encima de la media estatal. Según la definición de media que tienes ¿es esto posible?

STATISTICS2013.ORG

AÑO INTERNACIONAL DE LA ESTADÍSTICA

F.1 (14/16) Problema 2. EL JUEGO DE 2013.

Con los dígitos del año 2013, es decir, 0 - 1 - 2 - 3, y las operaciones: SUMA (+), RESTA (–), PRODUCTO (×), DIVISIÓN (÷), RAÍZ CUADRADA (√)y la POTENCIACIÓN (^) así como los paréntesis o corchetes necesarios, conseguir todos los números entre el 0 y el 20. Puedes usar la concatenación de dígitos (por ejemplo utilizar el 20 o el 203)

XXIV OLIMPIADA

2013

F.1 (14/16) Problema 3. HORA EXACTA

Anoche Juan olvidó darle cuerda a su reloj de pared y no tiene otro en su casa para saber que hora es . Como tiene que salir a comprar, le da cuerda y va andando al centro comercial. Allí paso una media hora y al entrar y salir de él mira la hora en un reloj.

Cuando regresa Juan pone en hora el reloj de su casa. ¿Comó ha podido hacerlo, sabiendo que siempre camina al mismo paso?

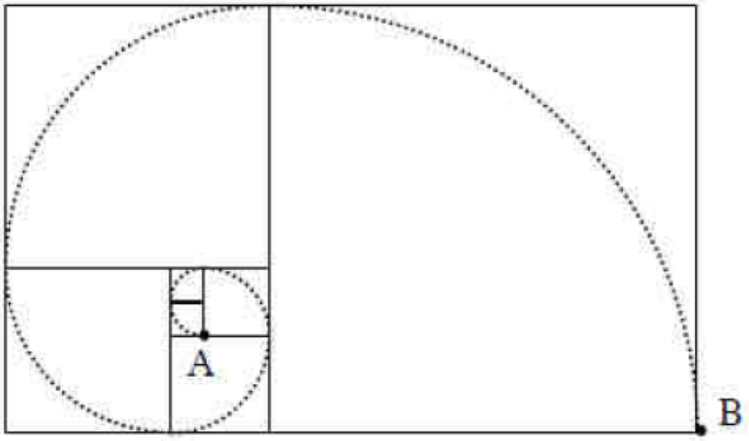
F.1 (14/16) Problema 4. ¿CÓMO TE LLAMAS?

En algunos países se les suelen dar varios nombres a los hijos (sobre todo en países en que se usa solo un apellido). Suponiendo que el número total de nombres usados en un país concreto es de 300 y que a un niño no se le ponen más de tres nombres, ¿de cuántas formas se podrá llamar un recién nacido?

XXIV OLIMPIADA

F.1 (14/16) Problema 5. ESPIRAL DE DURERO

Alberto forma rectángulos juntando cuadrados. Ha comenzado con dos pequeños cuadrados, uno de los cuales tiene un vértice en el punto A, después ha continuado adosando un cuadrado a la derecha, después uno debajo, después uno a la izquierda, después uno encima, después de nuevo uno a la derecha y así sucesivamente. En la figura está representado el rectángulo formado por los primeros siete cuadrados, que tiene un vértice en el punto B.
Alberto ha dibujado a continuación un cuarto de circunferencia en el interior de cada uno de los siete cuadrados; cada cuarto de circunferencia une dos vértices opuestos de un cuadrado y tiene el centro en otro vértice del mismo cuadrado. Los primeros siete cuartos de circunferencia forman una "espiral" que va desde A hasta B. El perímetro del rectángulo formado por los primeros siete cuadrados mide136 cm. ***¿Cuál es la longitud de la espiral desde A hasta B?***
Escribe la medida utilizando π con una aproximación al centímetro.



F.1 (14/16) Problema 6. NUEVOS MÉDICOS.

El mes pasado se hizo entrega de los diplomas a la última promoción de medicina de la facultad Albacete.

Los organizadores del acto pensaron que, para acabar más pronto, los alumnos deberían subir al escenario en grupos.

Pero al tratar de agruparlos de dos en dos, de tres en tres, de cuatro en cuatro, de cinco en cinco o de seis en seis, vieron que en todos los casos sobraba un alumno.

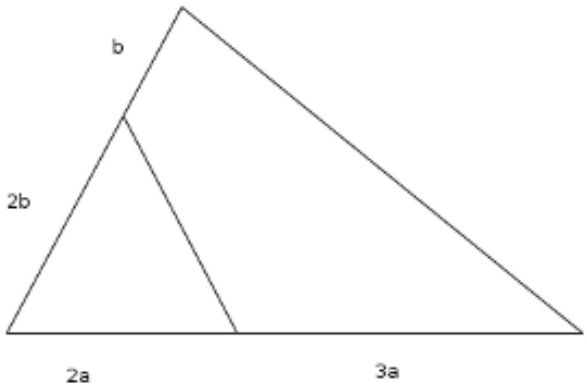
Sin embargo, agrupándolos de siete en siete, todos los grupos quedaban igual, con lo que el acto se llevo a cabo de esta forma.

Sabiendo que eran menos de 400 ¿podrías decir cuántos alumnos eran en la promoción?

Segunda Fase

F.2 (14/16) Problema 1. PARTIENDO TRIÁNGULOS

En un triángulo se ha trazado una línea que divide a la base en dos partes que están en relación 2 a 3 (es decir, que la de la derecha mide 3/5 del total y la de la izquierda, 2/5 del total), y divide al lado de la izquierda en dos partes que están en relación 1 a 2 (la de arriba mide la mitad que la de abajo).
El triángulo pequeño que así se forma tiene un área de 8 u2.
Averigua lo que medía el triángulo grande original (antes de dividirlo)



F.2 (14/16) Problema 2. 007

James Bond tiene que desactivar un misil que el malvado Dr Polinomio quiere hacer estallar en Poliedra.

Sabemos que la clave de desactivación tiene siete dígitos y gracias a los espías sabemos también que esta clave tiene las siguientes características:

a) Las tres primeras cifras forman un número que es igual al producto del número formado por la cuarta y la quinta cifra y el número constituido por las dos últimas cifras.

b) El número de dos cifras formado por la cuarta y la quinta cifra es igual al doble del número formado por las dos últimas cifras más dos.

c) La suma de las dos últimas cifras es 4.

¿Puedes tú ayudar a 007?

F.2 (14/16) Problema 3. UNA NOCHE EN LA ÓPERA

María y sus tres hermanas van a la ópera. Tienen reservadas cuatro asientos en la mejor fila del patio de butacas.

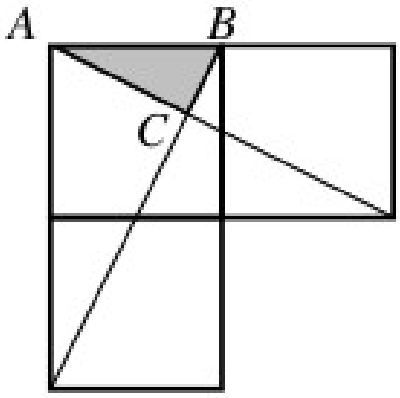
María y dos de sus hermanas llegan antes de la hora y ocupan los asientos al azar. Sólo falta Alicia, la hermana pequeña.

¿Cuál es la probabilidad de que María tenga que cambiar de asiento, si cuando llegue Alicia exige ocupar el asiento que tenía asignado, y lo mismo hacen todas las hermanas que se tengan que levantar a causa de esta situación?

Fase Final

F.F (14/16) Problema 1. ÁREAS ESCONDIDAS.

En la figura observas tres cuadrados de lado 1 y dos segmentos que unen dos pares de vértices. ¿Cuál es el área del triángulo ABC?



F.F (14/16) Problema 2. A VUELTAS CON 2013.

¿Sabrías calcular de una forma sencilla la siguiente operación?

$$2013^2-2012^2+2011^2-2010^2+\ldots\ldots\ldots+3^2-2^2+1^2$$

¿Y podrías decir también cuál es la última cifra del siguiente producto?

$$3^{2103}.2^{2102}$$

Razona tus respuestas

Año Internacional de la Cooperación en la Esfera del Agua

XXIV OLIMPIADA

F.F (14/16) Problema 3. UNA PARTIDA A LOS DADOS

Pablo y Jesús toman todos los días café mientras juegan una partida a los dados. Lanzan una vez dos dados, si el resultado de la suma es par gana Jesús, si sale impar gana Pablo. Quien pierde paga el café.

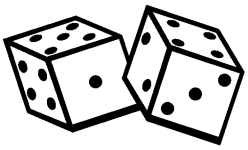
Un día Jesús cansado del mismo juego le propone a Pablo:

"Tiraremos dos dados (numerados del 1 al 6) si la suma sale múltiplo de 5 gano yo y si sale múltiplo de 6 ganas tu" (en caso de no salir ninguna de las dos opciones se sigue tirando hasta que una de las dos ocurra).

Pablo le contesta: "Para no alargarnos, si la suma sale número primo ganas tu, si sale número compuesto gano yo".

¿Son justas las dos opciones o en alguna de ellas lleva algún jugador ventaja? Justifica tu respuesta.

Diseña tú un juego con los dados que te parezca más justo



Soluciones

- **Solución - Fase 1 - (12/14) – EL JUEGO DE 2013.**

Puede haber más de una combinación para un número.

- 0=(1+2+3).0
- 1=(1+2)/3+0
- 2=(3+1) /2+0
- 3=((2· 0)/1)+3
- 4=3-1+2+0
- 5=3+2·1+0
- 6=0+1+2+3
- 7=3·2+1+0
- 8=(1+3)· 2+0
- 9=3·(1+2)+0
- 10 = 20/(-1+3)

- **Solución - Fase 1 - (12/14) – AÑO INTERNACIONAL DE LA ESTADÍSTICA**

Para curar individualmente a sus pacientes no le sirve el dato de la temperatura media, ya que este dato nos da información de TODOS los pacientes.

Por la definición de media unas temperaturas serán más altas y otras más bajas, o excepcionalmente todas pueden ser iguales e iguales a la media. Serviría si quisiera saber si hay alguna epidemia entre sus pacientes pero no a cuales

- **Solución - Fase 1 - (12/14) – CU-CÚ**

Si un reloj de cuco tarda cinco segundos en dar las 6 es que los intervalos entre campanadas son de 1 segundo. Por consiguiente, en dar las 12 tardará 11 segundos**.**

- **Solución - Fase 1 - (12/14) – MÚLTIPLOS DE TRES.**

Un número es múltiplo de 3 cuando la suma de sus cifras es múltiplo de 3.
Con los dígitos dados sólo se pueden formar (salvo el orden de los sumandos) las siguientes sumas de tres sumandos cuyo resultado es múltiplo de 3:

$2+3+7=12$ $\quad 2+5+8=15$ $\quad 3+5+7=15$ $\quad 3+7+8=18$

Los dígitos de cada número se pueden permutar de 6 formas distintas; por ejemplo:

237 273 327 372 723 732

Por tanto, en total hay 6•4=24 números que cumplen las condiciones del enunciado.

- **Solución - Fase 1 - (12/14) – PERÍMETRO.**

Si cada cuadrado tiene un perímetro de 40 cm, cada uno de los lados mide 10 cm.
Como la figura está compuesta por 12 de estos lados su perímetro es 120 cm.

- **Solución - Fase 1 - (12/14) –¡¡GOOOOL!!.**

Si Cristiano miente, entonces Radamel sería quien dice la verdad y sería Cristiano el autor del gol. Pero entonces Leo y Radamel también mentirían. Si Leo miente, entonces Leo es el autor del gol. Pero no pueden ser autores del gol Leo y Cristiano a la vez.

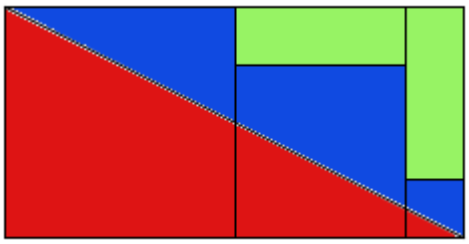
Por lo tanto, Cristiano dice la verdad. Esto implica que los otros tres mienten: Radamel no es el autor del gol (mentira de Andrés), Cristiano no es el autor del gol (mentira de Radamel)... y el autor del gol es Leo (mentira de Leo).

- **Solución - Fase 2 - (12/14) – SOMBRA.**

Si miramos la figura, podría ser la suma de tres cuadrados menos un triángulo, o bien la mitad de un rectángulo menos dos pequeños rectángulos.

Si lo interpretamos como suma de cuadrados menos un triángulo, podríamos calcular el área de los cuadrados (16 + 9 + 1 = 26) y restarle el área del triángulo (base de 4 + 3 + 1 = 8, altura de 4), que sería base por altura partido por 2, es decir, $26 - \frac{8.4}{2} = 26 - 16 = 10$.

Si lo interpretamos como medio rectángulo menos dos pequeños rectángulos, observa que los dos pequeños rectángulos miden ambos 3 por 1, es decir, entre ambos tienen área 6, mientras que el rectángulo grande mide 8 por 4, es decir, tiene área 32. Su mitad tiene área 16, y si le quitamos 6, queda exactamente 10, como antes.



- **Solución - Fase 2 - (12/14) – PAGA DOMINICAL**

Hay nueve afirmaciones, de las que hemos de averiguar cuáles son verdaderas y cuáles no lo son.

Lo mejor en este caso es buscar contradicciones. Según Juan, Nino cobra 10€, mientras que según Nino, cobra 9€. Está claro que uno de los dos miente. También se contradicen Juan y Nino en que Antonio cobra 3€ más que Nino, según Juan, mientras que sólo cobra 2€ más según Nino. Uno de los dos miente, pero otro debe decir la verdad, puesto que uno de los dos miente en la otra contradicción y sólo pueden decir una mentira.

Ya sabemos que Nino cobra 9 o 10€, que Antonio cobra más que Nino, 2 ó 3 € más, exactamente. Por tanto, Antonio puede cobrar entre 11€ y 13€. Por otra parte, las otras dos afirmaciones son ciertas, por lo que Juan debe cobrar 1€ menos que Nino (8 o 9 €).

Por lo tanto, es falsa la afirmación de Antonio en la que dice que Juan cobra 12 €. Como consecuencia, las otras dos deben ser ciertas, es decir, cobra 3€ más (ya que está claro que cobra más) que Juan. Por lo tanto, su paga debe ser entre 11€ y 12€.

Ahora todos tienen dos valores posibles, veamos si hay suficientes datos para aclarar la situación.

Supongamos que Juan cobra 8€. En ese caso, Nino gana 9€ y Antonio 11€. Podemos comprobar que en ese caso hay una contradicción, ya que Juan miente dos veces (Nino no cobra 10€ y Juan no gana 3€ más que Nino).

Si Juan cobrara 9€, Nino cobraría 10€, y en ese caso, Antonio debe cobrar 12€. Aquí todos dirían dos afirmaciones ciertas y la otra falsa, por lo que es el único caso en el que no hay contradicción y por tanto es la solución al problema.

- **Solución - Fase 2 - (12/14) – LA PLAZA DEL NÚMERO PI**

La idea es que, si cada número tiene con respecto a sus vecinos, o bien 3 o bien 14 de diferencia, cada portal sólo puede tener cuatro vecinos a lo sumo, pero como son sólo 17 (14 + 3), no puede tener a los dos lados diferencias de 3 y de 14 a la vez (es decir, no puede haber, por ejemplo, uno 3 unidades menor y otro 14 mayor, porque entre uno y otro habría 17, y la máxima diferencia posible es 16).

Precisamente por eso, se da la circunstancia de que todos pueden tener exactamente dos vecinos, de forma que sólo hay dos formas de situar los portales, según empecemos a ponerlos de una u otra forma.

O sea, que si empezamos por el 1, puede que el 4 esté a la derecha o a la izquierda, pero según esté a uno u otro lado, detrás estará el 7, el 10, el 13, el 16, el 2, el 5, el 8, el 11, el 14, el 17, el 3, el 6, el 9, el 12, el 15 y luego nuevamente el 1, pues habremos recorrido los 17 números de la plaza.

- **Solución - Fase Final - (12/14) – COMIENDO CARAMELOS**

Empecemos por averiguar cuántos hay de cada sabor en la bolsa.

Hay el doble de limón que de fresa, es decir, que entre limón y fresa, hay un número múltiplo de 3.

Los de naranja son uno menos que los de fresa, es decir, que si añadimos uno más (72 en total), habrá los mismos de fresa y de naranja. Y en total, será un múltiplo de 4.

Los de menta son seis menos que los de limón, o sea que si añadimos 6 (78 en total), hay los mismos de limón y de menta, y de fresa y de naranja. Eso significa que, si dividimos entre 2, tendremos 39, que son los de limón y de fresa, y dividiendo entre 3, obtenemos 13, que son los de fresa.

Es decir, que hay 13 de fresa, 26 de limón, 12 de naranja y 20 de menta. En total 13 + 26 + 12 + 20 = 71, efectivamente.

Ahora vamos a razonar sobre las preguntas. Si queremos sacar dos caramelos del mismo sabor, lo peor que puede suceder es que los cuatro primeros salgan distintos, pero al sacar 5 tendremos la seguridad de que dos de ellos son del mismo sabor.

Si queremos que dos sean distintos, la peor situación que podemos tener es que saquemos los 26 de limón seguidos, pero si sacamos 27 caramelos, necesariamente dos de ellos tendrán diferente sabor.

- **Solución - Fase Final - (12/14) –DE PASEO**

Este problema se interpreta como que cada uno, desde un vértice del triángulo, recorre dos lados para recoger a los dos compañeros. Así, tenemos que, si los vértices del triángulo les llamamos, Ana (A), María (B) y Alicia (C), Ana recorre AB y BC, un total de 14 km., María recorre BC y CA, en total, 18 km., y Alicia recorre CA y AB, 16 km.
Se puede hacer un sistema de ecuaciones, pero si sumas todos los resultados, tienes que AB + BC + BC + CA + CA + AB = 14 + 18 + 16 = 48, y has sumado los tres lados dos veces cada uno. De esta forma, los tres lados suman 24 km, y restando podemos saber que AC = 24 - (BC + CA) = 6, que BC = 24 - (CA + AB) = 8 y que BA = 24 - (AB + BC) = 10.
Ahora que sabemos que se trata de un triángulo de lados 10, 8 y 6, podríamos pensar en calcular su altura desde una base, o en aplicar la fórmula de Herón para calcular el área a partir de sus lados, pero antes hay que probar la fórmula de Pitágoras, para ver si por casualidad es rectángulo, ya que 36 + 64 = 100 (en realidad se trata de un triángulo semejante al histórico 3, 4, 5). De esta forma se puede calcular su área situando un cateto como base y otro como altura, dando 6*8/2 = 24 kilómetros cuadrados.

- **Solución - Fase Final - (12/14) – QUITANDO FICHAS.**

Las que están en la diagonal a partir de la novena fila y la novena columna, sólo se pueden elegir si se selecciona una fila o columna en la que estén, así que es necesario utilizar siete de las filas o columnas (da igual) de las que disponemos para quitar estas siete fichas.
Por esto, el problema queda reducido a quitar, seleccionando nueve filas o columnas (pero no más de 8 del mismo tipo) en el cuadrado 9x9 donde están las 18 restantes.
Observamos que debemos quitar dos en cada una de las selecciones, ya que no hay fila o columna que tenga más de 2 fichas, y 9.2 = 18.

Si quitamos la ficha que está separada quitando las de su fila, dejaremos una ficha solitaria en la última columna, por lo que la única manera de seleccionarla será quitando la fila en la que se encuentra, la octava. Esto dejará una ficha suelta en la octava columna (séptima fila), y obligará a retirar la fila 7. De la misma manera, tendremos que retirar todas las filas hasta la primera, con lo que necesitamos usar nueve filas, en lugar de las 8 que nos permite el problema, por lo que no es posible hacerlo así.
Si quitamos la ficha separada quitando la columna, razonamos del mismo modo, y deberíamos seleccionar nueve columnas, cosa que tampoco es posible.
Luego, efectivamente, no es posible quitar esas 25 fichas con las condiciones que se nos ha dado.

- **Solución - Fase 1 - (14/16) – JUEGO DEL 2013.**

Puede haber más de una combinación para un número.

- 0=(1+2+3).0
- 1=(1+2)/3+0
- 2=(3+1) /2+0
- 3=((2· 0)/1)+3
- 4=3-1+2+0
- 5=3+2·1+0
- 6=0+1+2+3
- 7=3·2+1+0
- 8=(1+3)· 2+0
- 9=3·(1+2)+0
- 10 = 20/(-1+3)
- 11 = 13-2+0
- 12 =12+3·0
- 13 = 13 - 2 · 0
- 14 = 30 / 2 - 1
- 15 = 13 + 2 + 0
- 16 = 30 / 2 + 1
- 17 = 20 - 3 · 1
- 18 = 21 - 3 + 0
- 19 = 10 + 3^2
- 20=2/.1+3·0

- **Solución - Fase 1 - (14/16) – AÑO INTERNACIONAL DE LA ESTADÍSTICA.**

Esta afirmación, que es real**,** es una prueba del anumerismo de muchos dirigentes**.**

Para que exista la media unas cantidades estarán por encima de ella y otras por debajo. Esta afirmación es matemáticamente imposible.

La única posibilidad es que todas las comunidades hubieran cobrado exactamente la misma cantidad, aun así esta sería igual a la media.

- **Solución - Fase 1 - (14/16) – HORA EXACTA**

A su regreso a casa el reloj le dará el tiempo que ha tardado en ir al centro comercial hacer las compras y regresar. Como en el centro comercial si hay reloj también sabe el tiempo exacto que ha estado de compras. Restando ese tiempo al total sabe el tiempo invertido en ir y volver

Como siempre camina al mismo paso el tiempo de regreso será la mitad de este último y como al salir del centro comercial miró la hora lo único que tendrá que hacer será sumarle esta cantidad a la hora de salida del centro comercial.

- **Solución - Fase 1 - (14/16) – ¿COMO TE LLAMAS?**

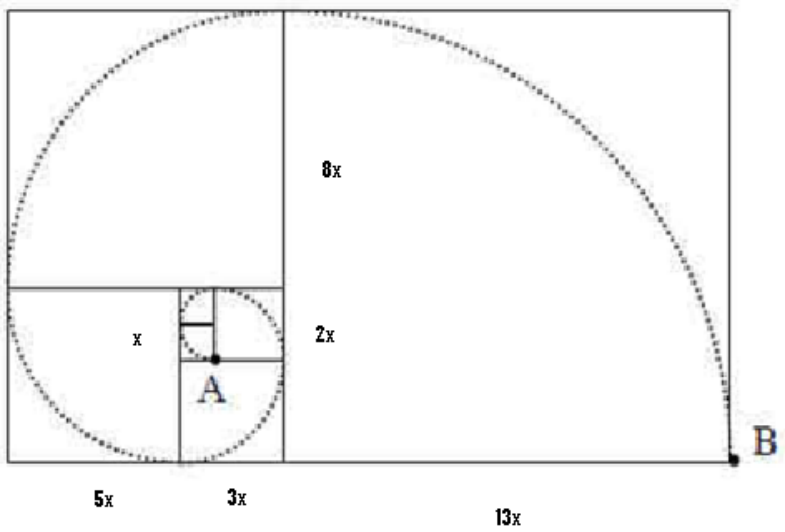
Al niño se le podrán poner uno, dos o tres nombres, siendo todos ellos distintos: no tiene sentido ponerle "Javier Javier".

- Un solo nombre: 300 formas.
- Dos nombres: 300·299=89.700 formas (ya que no es lo mismo "Luis Eduardo" que "Eduardo Luis").
- Tres nombres: 300·299·298=26.730.600 formas.

En total: 300+89.700+26.730.600=26.820.600 formas.

- **Solución - Fase 1 - (14/16) –LA ESPIRAL DE ALBERTO**

Si llamo x al lado del cuadrado más pequeño, los lados de los demás serán, 2x, 3x, 5x, 8x y 13x.



El rectángulo por tanto tendrá lados de longitud 13x y 21x siendo su perímetro 68x.
Como me dicen que el perímetro vale 136 cm la longitud del lado pequeño será de 2 cm.
El lado del cuadrado es también el radio del de la circunferencia que se traza. Como es un cuarto de circunferencia su longitud será en cada caso igual a $\frac{2\pi r}{4} = \frac{\pi r}{2}$
Por tanto la longitud de la espiral

$$\frac{\pi}{2}.(2+2+4+6+10+16+26) = 33\pi \simeq 103,67\,cm$$

- **Solución - Fase 1- (14/16) – NUEVOS MÉDICOS**

La idea para resolver este problema consiste en tratar de encontrar al principio un número que cumpla alguna de las condiciones, e ir después exigiéndole más.

Un número que al dividir entre dos da un resto de 1, es un número impar.

Fácilmente comprobamos que si queremos que además su resto al dividirlo entre 3 dé 1, debe ser de la forma 7, 13, 19, 25,... El hecho de que vayan de 6 en 6 es crucial. Debemos pensar que, si quitásemos un único alumno, podríamos dividirlo de forma exacta entre 2 y entre 3, es decir, entre 6. Eso significa que los números que cumplen esta propiedad son los posteriores a los múltiplos de 6.

Para que suceda lo mismo al agrupar de cuatro en cuatro, debemos buscar los posteriores de los múltiplos de 12 (13, 25, 37, etc.).

Es evidente que sucederá lo mismo automáticamente al hacer grupos de 6 (sobrará uno para hacer grupos completos), pero si queremos que también suceda al agrupar de cinco en cinco, buscaremos los números posteriores a los múltiplos de 60, ya que es el múltiplo más pequeño de 12 y 5.

Así, tendremos que el número buscado pertenece a la familia 61, 121, 181, y demás. Pero queremos que sea múltiplo de 7, para que sí se puedan agrupar de 7 en 7.

Para esto no hay otro sistema sencillo que el ensayo de todos los números para ver cuál es el que nos interesa (siempre que quede por debajo de 400).

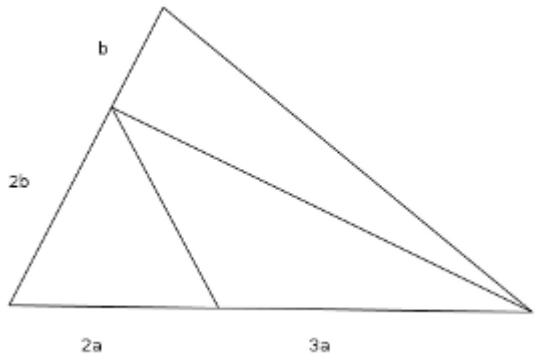
El único número que cumple esta condición es el 301

- **Solución - Fase 2 - (14/16) –PARTIENDO TRIÁNGULOS**

Se trata de dividir el problema en dos, trazando una recta que introduzca un triángulo intermedio. Vamos a dibujar una recta que una un vértice del triángulo grande con uno del pequeño. Bien podría ser la otra posibilidad, y el razonamiento habría sido análogo, pero elegimos la del dibujo de la derecha.

Así, el problema lo razonaremos en dos etapas. Primero, trataremos de calcular el área del triángulo intermedio, cuya base será 5/2 de la base del pequeño, y la altura será la misma, ya que comparte vértice superior. Así, tendremos que el área del triángulo intermedio será de 20 u^2.

Ahora, para comparar este triángulo intermedio con el grande, giraremos mentalmente el dibujo, hasta lograr que la base sea el lado que antes ocupaba el lugar izquierdo. Ahora, el triángulo intermedio y el mayor tendrán la altura común, y la base del mayor será 3/2 de la de el menor, por lo que su área será 3/2 de 20 = 30 u^2.



Otra manera de razonarlo, más algebraica, sin hacer ningún trazo, es observar que el área del triángulo se calcula multiplicando la base por la altura, y debido a lo que nos dice el problema, la base del triángulo mayor es 5/2 de la del pequeño y su altura, que aumenta proporcionalmente al tamaño de su lado izquierdo, es 3/2 de la del pequeño. Por eso su área será

$A_g = \frac{b_g.h_g}{2} = \frac{\frac{5}{2}.b_p.\frac{3}{2}h_p}{2} = \frac{\frac{15}{4}.b_p.h_p}{2} = \frac{15}{4}.A_p = \frac{15}{4}.8 = 30\ u^2$, donde b, h y A representan la base, la altura y el área, respectivamente, y la g y la p representan el triángulo pequeño y el grande.

- **Solución - Fase 2 - (14/16) –007**

Partiendo de que el último par de cifras suman cuatro, por lo que sólo pueden ser 04, 13, 22, 31, 40.

A partir del último par de cifras obtenemos las dos cifras siguientes (cuarta y quinta), pues es el doble más dos. Respectivamente, serían 10, 28, 46, 64 y 82.

Por último obtenemos las tres primeras cifras multiplicando. Observa que a partir de la tercera opción no puede hacerse, pues el resultado tiene más de tres cifras, por lo que las únicas soluciones serían 0401004 (también podría no considerarse válida, ya que el producto en realidad sólo tiene dos cifras) y 3642813.

- **Solución - Fase 2 - (14/16) –UNA NOCHE EN LA ÓPERA**

La mejor manera de resolver los problemas de probabilidad es haciendo un árbol de sucesos disjuntos e ir apuntando las probabilidades en cada caso, condicionadas a la posición del árbol, para al final multiplicarlas todas, calcular el peso de cada rama y sumar las ramas favorables.

En nuestro caso, vamos a suponer que queremos calcular la probabilidad de que María se tenga que cambiar de asiento. Por lo tanto, vamos a ir apartando probabilidades de manera clara en casos complementarios.

Cuando llega Alicia, sólo hay un asiento libre. La probabilidad de que su asiento esté libre es, por tanto, de 1/4, pero en ese caso María no se tiene que cambiar de asiento, por lo que la rama que nos interesa tiene una probabilidad de 3/4 (el asiento de Alicia está ocupado).

Ahora, suponiendo que el asiento esté ocupado, hay 1/3 de probabilidad de que la que lo ocupa sea Alicia, y en ese caso se tendría que cambiar (ya tenemos una rama favorable, 3/4.1/3). Sin embargo, también hay que seguir lo que sucede en la rama complementaria (probabilidad 2/3), que la ocupe otra de las hermanas, que por supuesto se tiene que levantar.

Ahora, Alicia ya está en su sitio, y hay otra hermana buscando su sitio. Hay una probabilidad de 1/3 de que su sitio esté vacío, pero en ese caso María no cambia de asiento y no nos interesa, la rama contraria (su asiento está ocupado) tiene probabilidad 2/3.

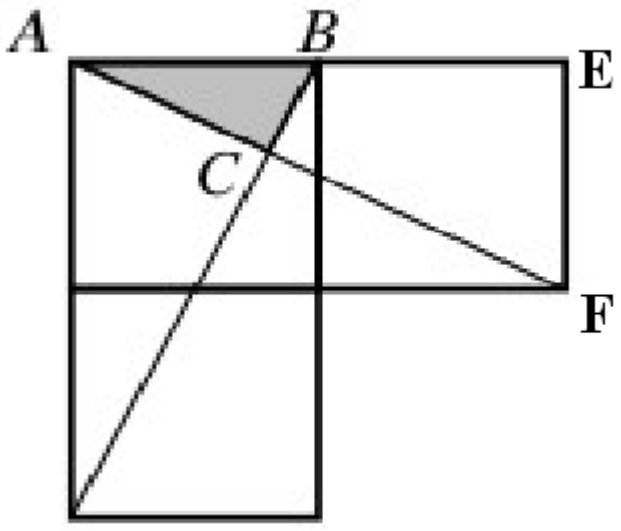
Como Alicia ya está en su asiento, hay una probabilidad de 1/2 de que la que ocupa el asiento sea María, y en ese caso, esa rama también es favorable (3/4.2/3.2/3.1/2), aunque también hay que seguir la rama complementaria, de que sea la tercera hermana.

En este último caso, se abren dos ramas de nuevo, que su asiento esté libre (1/2, María se queda en su asiento, que resulta ser realmente su asiento), o bien que esté ocupado, en este caso por María, que encuentra que su asiento era el que estaba libre, 1/2 de probabilidad. Esta última rama tiene de probabilidad 3/4.2/3.2/3.1/2.1/2.

Ahora hay que sumar las tres probabilidades, 3/4.1/3 + ¾.2/3.2/3*1/2 + 3/4.2/3.2/3.1/2.1/2. Simplificando en cada fracción, obtenemos 1/4 + 1/6 + 1/12 = 3/12 + 2/12 + 1/12 = 6/12 = 1/2.

Efectivamente, la probabilidad de que María se tenga que levantar es del 50%.

- **Solución - Fase Final - (14/16) – ÁREAS ESCONDIDAS**



Las diagonales al cortarse formarán un ángulo recto en C por lo que el triángulo ABC es rectángulo y su hipotenusa AB vale 1
También podemos observar que el triangulo ABC y el AEF son semejantes ya que ambos son rectángulos y tiene en común el ángulo en A
EF =1 AE= 2 AF= √5 (aplicando el Teorema de Pitágoras)

Al ser triángulos semejantes $\frac{\sqrt{5}}{1} = \frac{1}{BC} = \frac{2}{AC}$ de donde

obtenemos que

$$AC = \frac{2\sqrt{5}}{5} \quad \text{y} \quad BC = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

Por lo tanto el área

$$ABC = \frac{1}{2}\frac{2\sqrt{5}}{5}\frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{1}{5}u^2$$

- **Solución - Fase Final - (14/16) –A VUELTAS CON 2013.**

Para el primer apartado recordando las identidades notables

a^2-b^2= (a+b).(a-b)

Observamos que

$(2013^2-2012^2) = (2013+2012).(2013-2012)= 2013+2012$
$(2011^2-2010^2) = (2011+2010).(2011-2010)= 2011+2010$
….

Y vemos que este patrón se repite dos a dos y así que la operación queda reducida a :

2013+2012+2011+…..+3+2+1

Por lo que el problema ahora es calcular la suma de los 2013 primeros números naturales.
Aplicando la suma de n términos de una progresión aritmética tendríamos:

Para el segundo tenemos que ver en qué número terminan las potencias de 2 y de 3

$2^1=2$ $2^2=4$ $2^3=8$ $2^4=16$ $2^5=32$ $2^6=64$ $2^7=128$ …..

$3^1=3$ $3^2=9$ $3^3=27$ $3^4=81$ $3^5=243$ $2^6=729$ $3^7=2187$…..

Observamos que cada cuatro potencias se repite la cifra en que termina el número entonces lo que hay que hacer es dividir los exponentes entre cuatro y ver cuál es el resto.

$\mathbf{2^{2012}}$ terminará en **6** y $\mathbf{3^{2013}}$ terminará en **3** por lo que el producto $\mathbf{3^{2013} . 2^{2012}}$ terminará en **8**

- **Solución - Fase Final - (14/16) –UNA PARTIDA A LOS DADOS.**

Según la propuesta de Jesús los múltiplo de 5 se producen al lanzar dos dados 7 veces de 36

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Mientras que los múltiplo de 6 se produce en 6 ocasiones de 36

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Por lo que este juego es ligeramente favorable a Jesús

Mientras que en la propuesta de Pablo sale número compuesto en 21 ocasiones de 36 siendo el resultado primo en las 15 restantes de 36. Bastante favorable a Pablo

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Un posible juego justo sería que gana Jesús si el resultado de la suma es 6 o menor, si es 8 o mayor gana Pablo y si es siete cada uno se paga su café.

Fotografías

En la fase semifinal en la Escuela Politécnica (Albacete)

Final en Chinchilla de Monte-Aragón

Magia Matemática con Fernando Blasco

Los ganadores de esta edición de la XXIV OMA

Los finalistas de la todas las provincias de Castilla Mancha en la Olimpiada Regional en Villarrobledo

XXIV OLIMPIADA

Los ganadores de la XV Olimpiada Matemática de Castilla Mancha

El equipo de Castilla Mancha en la XXIV Olimpiada Matemática Nacional en Andorra

COMISIÓN ORGANIZADORA:

Serapio García Cuesta
Bernardino Del Campo López
Juan Martínez-Tébar Giménez
Antonio Bueno Aroca
Jesús Carcelén Gandía
Jesús García Segovia
Joaquín Jiménez Ramos
Ramón Cuenca Cuenca
Juan Emilio García Jiménez
Carlos Motos Martínez-Esparza
Fco Javier Blázquez Merino
Juan Pablo Martínez Corchano
Rafael Pérez Laserna
Vicente Pascual Fidalgo

XXIV OLIMPIADA

DIPUTACIÓN DE ALBACETE