OLIMPIADA MATEMÁTICA PROVINCIAL DE ALBACETE

DISEÑO DE ANTONIO MOLINA

(Piezas pertenecientes al Museo de la Cuchillería de Albacete)

Enunciados y Soluciones a los Problemas

SOCIEDAD CASTELLANO MANCHEGA DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

S.C.M.P.M.

Autor
Juan Martínez-Tébar Giménez

Esta publicación se distribuye de forma gratuita al profesorado de matemáticas de los centros de secundaria de Castilla la Mancha

PRESENTACIÓN

La Olimpiada Matemática es una actividad organizada con la finalidad de contribuir a desarrollar la competencia matemática entre los alumnos de primer y segundo ciclos de Educación Secundaria. Permite además intercambiar experiencias y compartir propuestas didácticas por parte de los profesores de los diferentes centros de la provincia de Albacete. También con ella se intenta sensibilizar a la sociedad sobre la necesidad de mejorar una educación matemática que potencie el desarrollo personal y la integración de unos ciudadanos libres y responsables en el siglo XXI. Son propósitos de esta actividad:

- Potenciar el razonamiento matemático a través de la resolución de problemas.
- Fomentar la capacidad de comunicación y argumentación matemáticas de los estudiantes.

La riqueza de un problema no se encuentra en su resolución, sino en la variedad de puntos de vista que nacen de los diferentes "resolutores", el enunciado debe invitar a la asunción de riesgos en la interpretación, a que cada uno marque sus límites, a que cada uno, en fin, haga suyo el planteamiento y obtenga placer al dedicar tiempo y esfuerzo a su resolución, aunque ésta no se alcance.

.

En esta edición los finalistas han sido:

CICLO 12-14		CICLO 14-16	
ALBALADEJO HERREROS	ALICIA	ABIZANDA SARO	ADRIANA
ALFARO CONTRERAS	MARÍA	ALBEROLA BALLESTEROS	JOSÉ VÍCTOR
CABAÑERO GARCÍA	ESTELA	CALATAYUD MARTÍ	PILAR
COSTA ABARCA	JOSE	GÓMEZ BALLESTEROS	CRISTINA
GONZÁLEZ PONS	HÉCTOR	MARTÍNEZ VALVERDE	JUAN
MOLINA MARTÍNEZ	NOELIA	PARRA GÓMEZ	JOSÉ PEDRO
NOVA MARTINEZ	ENYA Mª	RODRÍGUEZ GÓMEZ	JOSÉ MARÍA
PONT PÉREZ	INÉS	TARRUELLA HERNÁNDEZ	DIANA
TEMPRADO BELMONTE	MARÍA PILAR	TÉBAR MARTÍNEZ	ROBERTO
VILLANUEVA PANADERO	ALMUDENA	ZAMORANO CASTILLO	ALEJANDRO

Profesores y alumnos finalistas en Chinchilla de Montearagón (Albacete)

En 2010 celebramos en Albacete el Primer congreso de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas de Castilla la Mancha con un gran éxito de asistencia, con conferencias y comunicaciones de gran nivel.

Un año más las Matemáticas y los problemas han vuelto a salir a la calle, donde por medio del juego se han acercado a todos los públicos para enseñar y divertir.

XXI Olimpiada Provincial de Albacete

Nivel 12/14

Primera Fase

Problema 1. LA CUERDA DE LA FERIA
Problema 2. SELLOS
Problema 3 MOSAICOS
Problema 4. ¿QUÉ ESTÁS TRAMANDO
Problema 5. LAS MONEDAS Y EL CÍRCULO
Problema 6 SANDIAS DE TOMELLOSO

Segunda Fase

Problema 1. TRES EN RAYA
Problema 2. ¿CÓMO ESTÁN TUS HIJOS?
Problema 3. LA ARAÑA Y LA HORMIGA

Fase Final

Problema 1. EL PASADIZO DEL CASTILLO
Problema 2 DIVIDIENDO EL TRIÁNGULO
Problema 3 EL PASILLO

Nivel 14/16

Primera Fase

Problema 1. IZANDO LA BANDERA
Problema 2. LIO DE TECLAS
Problema 3. LA POSADA DEL ROSARIO
Problema 4.PIEDRAS A MONTONES
Problema 5. MOSAICOS SEMIRREGULARES
Problema 6. EL MENÚ DEL FERIAL

Segunda Fase

Problema 1. CURIOSOS DADOS
Problema 2. PLEGANDO PAPEL
Problema 3. LA MANCHE EN LA MESA

Fase Final

Problema 1. FLORES DE SARTÉN
Problema 2. DIAGONALES EN UN RECTÁNGULO
Problema 3. EN EL CASINO

Soluciones

XXI Olimpiada

Chinchilla De Montearagón 2010

Nivel 12/14

Primera Fase

F.1 (12/14) Problema 1. LA CUERDA DE LA FERIA

En sus orígenes la Feria, cuyo tercer centenario de su confirmación celebramos en 2010, era eminentemente ganadera y los animales se ubicaban en "La Cuerda"

Un tratante de ganado tenía 32 ovejas dispuestas en ocho corrales de planta cuadrada. En cada corral de las esquinas hay una oveja y en cada una de las centrales hay siete.

1	7	1
7		7
1	7	1

El tratante cuenta cada noche las ovejas que hay en cada hilera y se asegura de que sean nueve. Una vez hecho esto se retira a dormir. Cierto día le roban cuatro animales. Cuando el tratante hace su recuento nocturno no se percata de nada, pues las ovejas siguen sumando nueve por hilera.

¿Qué hicieron los ladrones para burlar al tratante? ¿Cómo situaron en los corrales a las ovejas que dejaron?

Tres días más tarde le roban otras cuatro y tampoco el tratante se dio cuenta de nada al contar. ¿Cómo lo volvieron a burlar?

Una semana después, el tratante realizó su habitual recuento, le salieron las cuentas y volvió tranquilo a dormir. A la mañana siguiente una inspección del veterinario descubrió que sólo quedaban 20 ovejas.

¿Qué hicieron los ladrones para burlar por tercera vez al ingenuo tratante?

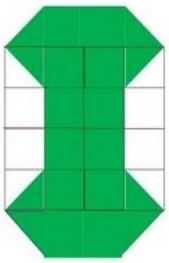
¿Hubiera sido posible un cuarto robo?

F.1 (12/14) Problema 2. SELLOS

Un coleccionista gasta 1 euro en comprar sellos de 1, 4 y 12 céntimos. ¿Cuántos sellos serán de cada clase si en total ha comprado 40?

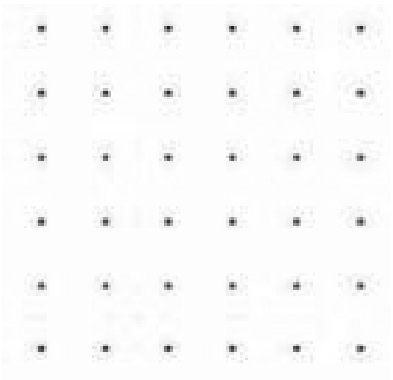
F.1 (12/14) Problema 3. MOSAICOS

En el dibujo aparece una pieza que se encuentra en los mosaicos de la Alhambra. Ya sabes que estas piezas se forman a partir de polígonos regulares que rellenan el plano, siendo iguales en superficie a los polígonos de los que proceden. Averigua el perímetro y el área de la figura que aparece sombreada. ¿Sabes su nombre?



F.1 (12/14) Problema 4. ¿QUÉ ESTÁS TRAMANDO?

En una trama cuadrada 6x6 encuentra todas las longitudes de los segmentos que se pueden formar uniendo dos puntos de la trama.



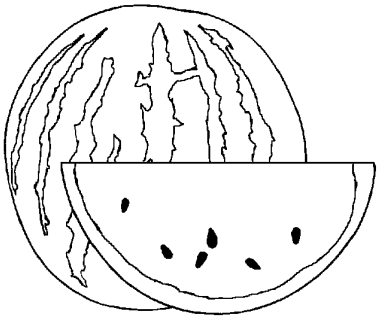
F.1 (12/14) Problema 5. LAS MONEDAS Y EL CÍRCULO

Dos personas A y B juegan en un tablero con forma de círculo. Cada uno de los jugadores dispone de una gran cantidad de monedas, todas del mismo tamaño.
Comienza el jugador A, y por turnos alternados cada uno de los jugadores pone una moneda dentro del tablero circular, sin mover ninguna de las que ya estaban puestas, tampoco se pueden poner monedas encima de la ya existentes; así poco a poco se va llenando el tablero. Pierde el que ya no puede poner monedas.

¿Cuál de los dos jugadores tiene ventaja? Describe la estrategia ganadora.

F.1 (12/14) Problema 6. SANDÍAS DE TOMELLOSO

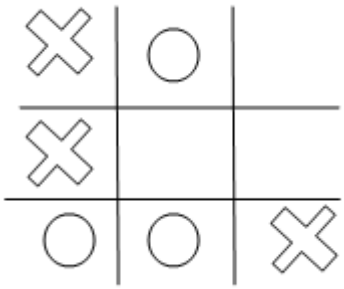
Están a la venta dos sandías de la misma calidad. Una tiene 60 centímetros de circunferencia máxima, la otra 50 cm. La primera cuesta vez y media más cara que la segunda; ¿Qué sandía es más ventajosa comprar? (Supón que son prácticamente esféricas)



Segunda Fase

F.2 (12/14) Problema 1. TRES EN RAYA

En una partida de tres en raya solamente falta por colocar la última marca. Explica de forma razonada y siguiendo la lógica del juego quién ganará la partida

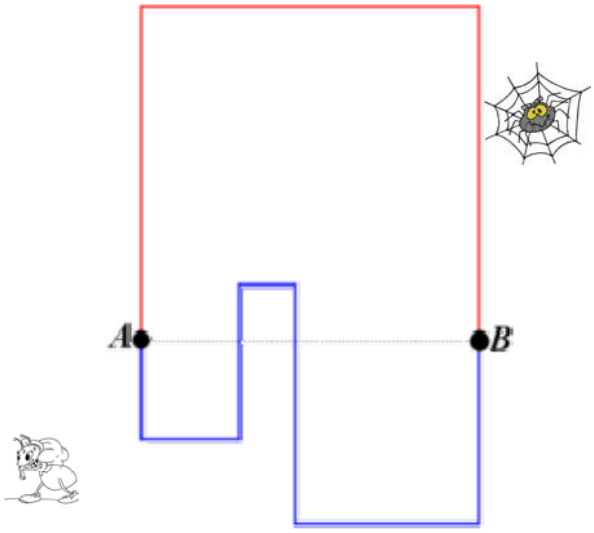


F.2 (12/14) Problema 2. ¿CÓMO ESTÁN TUS HIJOS?

¿Cómo están tus hijos? Ya deben ser mayores. La última vez que estuve por aquí eran todos adolescentes, entre los 13 y los 19 años.
- Pues fíjate que el producto de sus edades actuales es justamente el número de la matrícula de mi coche, 6336.
¿Cuáles son las edades actuales de los tres hijos?

F.2 (12/14) Problema 3. LA ARAÑA Y LA HORMIGA

*La distancia en línea recta entre dos puntos **A** y **B** es de 10 cm. Una araña va de **A** a **B** recorriendo tres lados de un cuadrado cuyos lados miden 10 cm. En cambio una hormiga recorre tres lados de cada uno de tres cuadrados más pequeños que le permiten llegar exactamente desde **A** hasta **B**, como se muestra en la figura.*



¿Quién ha recorrido más distancia?

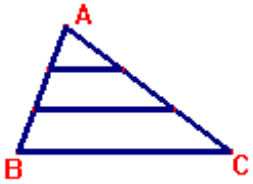
Fase Final

F.F (12/14) Problema 1. EL PASADIZO DEL CASTILLO

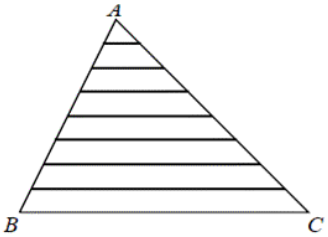
Unos chicos jugando en unas cuevas han encontrado un túnel que conecta con una cámara secreta del castillo de Chinchilla. Para acceder a ella hay una reja y un pedestal.
Colocando exactamente 6 Kg. en el pedestal se acciona un mecanismo que levanta la reja y permite el acceso, según reza una inscripción que está en la pared del pasadizo.
Disponen de dos bombonas de 7 y 5 litros y un pozo de agua que se encuentra en el túnel.
Sabiendo que un litro de agua pesa prácticamente un kilogramo ¿Podrán abrir la reja accediendo así a la cámara secreta del castillo de Chinchilla de Montearagón?

F.F (12/14) Problema 2. DIVIDIENDO EL TRIÁNGULO

En el triángulo ABC, cuyo lado BC mide 20 cms, dibujamos:



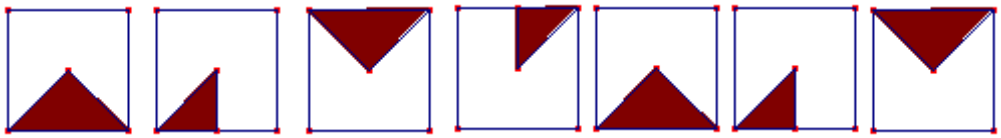
a) Dos segmentos paralelos al lado BC, que dividen en 3 partes iguales al lado AB. ¿Cuál es la suma de las longitudes de esos 2 segmentos?



b) Siete segmentos paralelos al lado BC, que dividen en 8 partes iguales al lado AB ¿Cuál es la suma de las longitudes de los 7 segmentos?

F.F (12/14) Problema 3. EL PASILLO

En un pasillo hemos encontrado una fila de baldosas con una zona coloreada, que sigue la siguiente pauta:



Si cada baldosa tiene 10 cms. de lado y en total hay 237 baldosas:

a) ¿Cómo será la última baldosa?

b) ¿Cuánto mide la superficie total coloreada?

c) ¿Cuál sería el número máximo de baldosas que podemos pintar si disponemos de pintura para pintar 1 m^2?

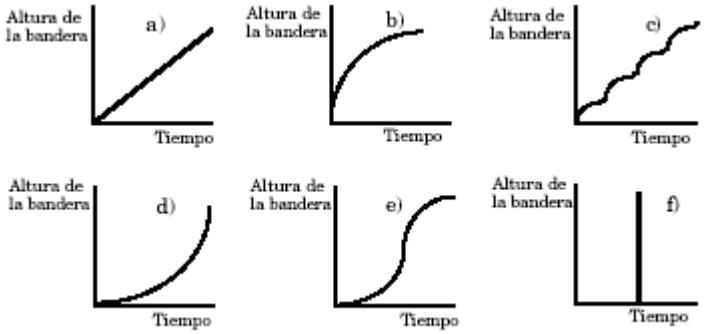
Nivel 14/16

Primera Fase

F.1 (14/16) Problema 1. IZANDO LA BANDERA

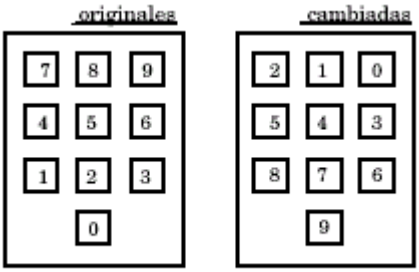
Para celebrar el Tercer Centenario de la confirmación de nuestra Feria se va a izar una gran bandera en el Pincho. Si representamos la acción de izar la bandera hasta lo alto del mástil en una gráfica.

I) Explica en palabras qué significa cada una de las siguientes gráficas.
II) ¿Qué gráfica muestra la situación de forma más realista?
III) ¿Qué gráfica es la menos realista?



F.1 (14/16) Problema 2. LIO DE TECLAS

Isabel, la hermana pequeña de Pablo ha cambiado las teclas de la calculadora nueva que tiene su hermano, sin decirle nada. Las teclas originales y las nuevas son las que se muestran en los siguientes dibujos:



Así pues, si Pablo presiona la tecla en la que hay un 4, el número que entra realmente en la calculadora es un 5 que, por otra parte, es lo que aparece en la pantalla. Sin darse cuenta de este desmadre, Pablo mete en la calculadora un número primo p de dos dígitos, y otro número

primo q de un dígito (utilizando lo que él ve, claro) y ordena sumarlos. Sorprendentemente, la respuesta que aparece es ¡la respuesta correcta! ¿Sabrías decir qué dos números primos p y q introdujo Pablo en su calculadora?

F.1 (14/16) Problema 3. LA POSADA DEL ROSARIO

Un hombre tomó una posada por treinta días, por el precio de un ducado cada día. Este huésped no tenía dinero, sino cinco piezas de plata, que entre todas ellas valían treinta ducados. Con estas piezas pagaba cada día la posada y no le quedaba debiendo nada a la posadera, ni ella a él. ¿Puedes decir cuántos ducados valía cada pieza y cómo se pagaba con ellas?

F.1 (14/16) Problema 4. PIEDRAS A MONTONES

Es un juego de montones de piedras en el que hay varios montones que pueden modificarse de acuerdo a las dos siguientes reglas:

(1) Se pueden juntar dos de los montones en uno solo.

(2) Si un montón tiene un número par de piedras, se puede partir en dos montones con el mismo número de piedras cada uno

.

Si al principio hay tres montones, uno de ellos tiene 5 piedras, otro tiene 49 y el otro tiene 51.

Determina si es posible lograr, con movimientos sucesivos, y siguiendo las reglas (1) y (2), que al final haya 105 montones, cada uno con una piedra. Explica claramente el proceso.

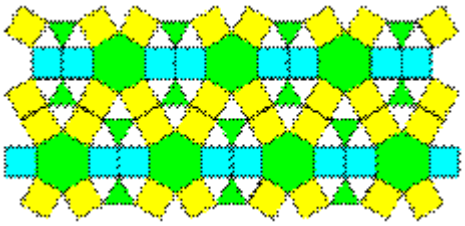
F.1 (14/16) Problema 5. MOSAICOS SEMIRREGULARES

El problema geométrico de encontrar polígonos regulares iguales que rellenen el plano se reduce a un problema aritmético: buscar polígonos cuya suma de ángulos sea 360º.

Vamos ahora a construir mosaicos utilizando más de un polígono regular, imponiendo una condición:

En cada vértice han de coincidir los mismos polígonos y en el mismo orden.

A los mosaicos así formados se les denomina semirregulares. Encuéntralos todos de forma razonada.



F.1 (14/16) Problema 6. EL MENÚ DEL FERIAL

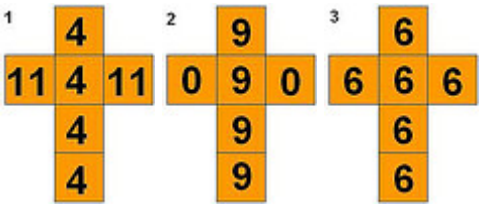
En una caseta de la Feria confeccionan el menú del día eligiendo al azar un primero entre: gazpacho manchego, arroz, ensalada o entremeses. Un segundo también al azar entre filete empanado, boquerones o merluza; y el postre también de forma aleatoria eligiendo entre fruta, arroz con leche, natillas o flan.

Jesús es celíaco y no puede comer gazpacho, ni filete empanado ni natillas. ¿Cuál es la probabilidad de que un día que vaya a la Feria Jesús pueda comer en la caseta?

Segunda Fase

F.2 (14/16) Problema 1. CURIOSOS DADOS

Supongamos que tenemos a nuestra disposición 3 dados que aquí aparecen desarrollados:



El juego en cuestión consiste en lo siguiente:

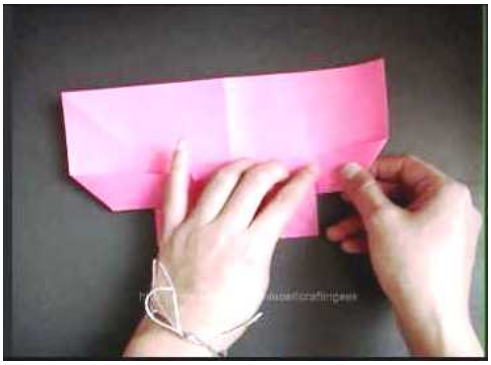
Vosotros tomáis uno de los tres dados y después yo tomo uno de los dos que quedan. A continuación tiráis vuestro dado y yo el mío. Gana la tirada quien saque mayor puntuación.

Juego sencillo y además elegís primero. La pregunta es:

¿Qué dado escogeríais para tener mayor probabilidad de ganar el juego a la larga, es decir, después de un número grande de tiradas?

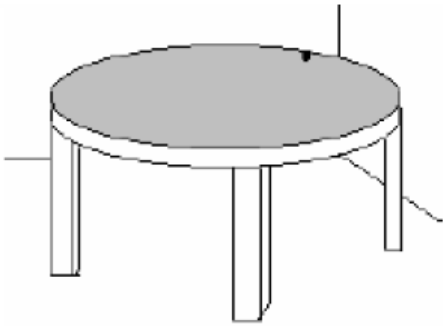
F.2 (14/16) Problema 2. PLEGANDO PAPEL

Imagínate una tira de papel larga y estrecha, extendida ante ti sobre la mesa, de izquierda a derecha. Coge el extremo derecho y colócalo encima del izquierdo. Ahora aplasta la tira sobre la mesa aplanándola, de manera que quede plegada por la mitad y presente un doblez. Ábrela y observa la marca del pliegue. Después del segundo plegado ves tres marcas: una "hacia arriba" y dos "hacia abajo".
Ahora vamos a suponer que eres capaz de plegar la tira de papel por la mitad seis veces y luego la desdoblas completamente. Haz una predicción del número total de marcas que habrá. ¿Cuántas serán "hacia arriba" y cuántas "hacia abajo"?. ¿En qué orden estarán?
Explica cómo podemos predecir el número total de marcas para 7, 8, 9…, n pliegues, esto es generaliza la solución.



F.2 (14/16) Problema 3. LA MANCHA EN LA MESA

Una mesa circular se encuentra en la esquina de un cuarto, de manera que toca dos paredes. En la orilla de la mesa se encuentra una mancha de tinta a 8 centímetros de una pared y nueve centímetros de la otra. ¿Cuál es el diámetro de la mesa?



Fase Final

F.F (14/16) Problema 1. FLORES DE SARTÉN

Las flores de sartén son un postre típico de Chinchilla de Montearagón.

Mi abuela ha hecho muchas y quiero guardarlas en cajas para llevármelas a casa. No tengo cajas pero si pliegos de cartón de 15 X 15 cm.

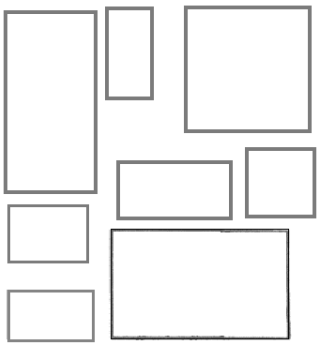
Si recortase un cuadrado de 1 cm de cada esquina y doblase los lados para hacer una caja abierta. ¿Cuál sería la capacidad de esta caja?

Si recortase un cuadrado de 2X2 cm en cada esquina y doblase los lados. ¿Tendría esta caja más capacidad o menos que la anterior?
Trata de averiguar de qué tamaño tengo que cortar el cuadrado por cada esquina para conseguir una caja con el máximo de capacidad para guardar las flores.

F.F (14/16) Problema 2. DIAGONALES EN UN RECTÁNGULO

Dibuja varios rectángulos sobre papel cuadriculado cuya longitud y altura sean un número entero de cuadrados.
Dibuja una diagonal en cada rectángulo y anota el número de cuadros que corta.

¿Se te ocurre algún sistema para averiguar el número de cuadrados que cruza la diagonal en cuadriláteros de cualquier tamaño sin tener que dibujarlos?



F.F (14/16) Problema 3. EN EL CASINO

En el casino de la plaza están cansados de jugar al truque por lo que deciden cambiar de juego.
Tres jugadores utilizan un juego de tres cartas. En cada carta está escrito un número entero no nulo: p, q y r, tales que $p < q < r$.
Se da una carta a cada jugador y cada uno recibe un número de fichas igual al número escrito sobre su carta. Luego se recogen las cartas, se mezclan y se las distribuye de nuevo, continuando así el juego.
Después de N repartos (N>1) los jugadores recibieron respectivamente 20, 10 y 9 fichas.
Sabiendo que el jugador que terminó con 10 fichas recibió r fichas en el último reparto de cartas, ¿cuáles son los números p, q y r y cuáles los diferentes repartos de cartas?

Soluciones

- **Solución - Fase 1 - (12/14) –LA CUERDA DE LA FERIA**

En total ha habido 3 robos y en cada uno se han robado 4 ovejas

Se puede plantear otra fuga de una o de dos personas, como se indica a continuación:

Primer robo

2	5	2
5		5
2	5	2

Segundo robo

3	3	3
3		3
3	3	3

Tercer robo

4	1	4
1		1
4	1	4

Se puede plantear otro robo de una o de dos ovejas más, como se indica a continuación:

4	0	5
1		0
4	1	4

4	0	5
0		0
5	0	4

El número mínimo de ovejas que pueden quedar es 18.
La clave está en que las ovejas de las esquinas son contadas dos veces.

- **Solución - Fase 1 - (12/14) – SELLOS**

Si llamo **x** al número de sellos de 1 cts., **y** al número de sellos de 4 cts. y **z** al de los de 12 cts. tendré las siguientes ecuaciones:

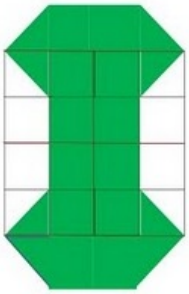
$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=40 \\ x+4y+12z=100 \end{array}\right\}$$

Se puede resolver con parámetro pero no es adecuado al nivel y podemos hacer otras cosas.
Sabiendo que compra por lo menos uno de cada y teniendo en cuenta las condiciones del problema llegamos enseguida a algunas conclusiones rápidas:
El número máximo de sellos de 12 cts. puede ser 7
El número máximo de sellos de 4 cts. sería 24

El número máximo de sellos de 1cts es 38.
Podemos ir probando estas condiciones en las ecuaciones y encontramos que:
El coleccionista ha comprado 28 sellos de 1 cts., 9 de 4 cts. y 3 de 12 cts.

- **Solución - Fase 1 - (12/14) – MOSAICOS**

Este mosaico se llama hueso nazarí y como se puede ver proviene del cuadrado.
Si considero que el cuadrado tiene lado 1, observamos que para construir el hueso hemos dividido el cuadrado original en 16 cuadraditos iguales de lado 1/4.



Las esquinas la forman las diagonales de estos cuadraditos que, por Teorema de Pitágoras tendrán una longitud de

$$\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\sqrt{\frac{2}{16}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

Contando los segmentos el perímetro será $8.\frac{1}{4}+8.\frac{\sqrt{2}}{4}=2+2\sqrt{2}$ unidades.
El área del hueso no varía con respecto a la del cuadrado del que procede y seguirá siendo una unidad al cuadrado.

- **Solución - Fase 1 - (12/14) – ¿QUÉ ESTÁS TRAMANDO?**

.Obviamente uniendo los puntos horizontal o verticalmente tendremos longitudes iguales a los números naturales del 1 al 6.
Si los unimos en diagonal tendremos que utilizar otra vez el Teorema de Pitágoras para calcular las longitudes resultantes que serán números irracionales.
Desde la más sencilla $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$, también $\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$; $\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$ …y así sucesivamente hasta llegar a $\sqrt{6^2+6^2}=\sqrt{72}$

- **Solución - Fase 1 - (12/14) – LAS MONEDAS Y EL CÍRCULO**

Gana el jugador que inicia el juego. Para ello debe jugar de manera precisa; la estrategia es la siguiente: primero (supongamos que sea el jugador A) pone su primera moneda en el CENTRO del círculo. El jugador B pone su moneda en otro lugar del tablero circular y el jugador A le responde poniendo su moneda en el lugar simétrico, respecto al centro del círculo, de la moneda que puso B. Y así sucesivamente.... de esta manera el jugador A garantiza que si el B puede poner su moneda, él también lo hará. Por tanto gana el primer jugador (en nuestro caso el A)

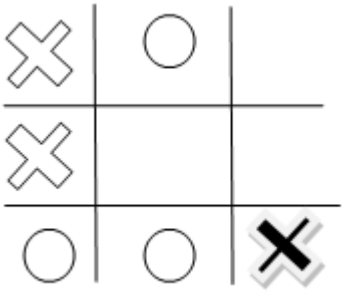
- **Solución - Fase 1 - (12/14) –SANDIAS DE TOMELLOSO**

La relación existente entre las longitudes de las circunferencias es igual a la de sus diámetros respectivos. Si la circunferencia de un melón mide 60 cm y la de otro 50 cm, la relación entre sus diámetros será de 60: 50 = 6/5, y la relación entre los volúmenes será: $\left(\frac{6}{5}\right)^3 = 1,728$

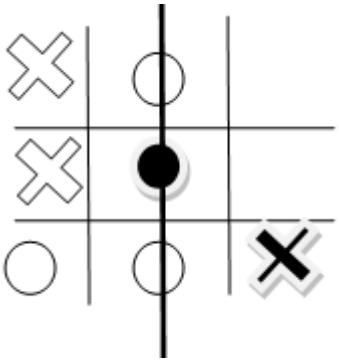
El melón mayor debe costar, si se valora con arreglo a su volumen (o peso), 1,73 veces más que el menor; en otras palabras, el 73 % más caro. En total, sólo piden el 50 % más. Está claro que tiene más cuenta comprar el mayor.

- **Solución - Fase 2 - (12/14) – TRES EN RAYA**

Hay que tener en cuenta la lógica del juego y que se juega marcado con lápiz en el papel y no con fichas.



La cruz marcada ha debido ser la última en poner para impedir que el círculo hiciese tres en raya cosa que no va a impedir en la próxima tirada.



- **Solución - Fase 2 - (12/14) – ¿CÓMO ESTÁN TUS HIJOS?**

Haciendo la descomposición factorial es $2^6.3^2.11$
Sabiendo que se llevan 6 años entre el mayor y el menor y que las edades son mayores de 13 la solución es 16, 18 y 22 años.

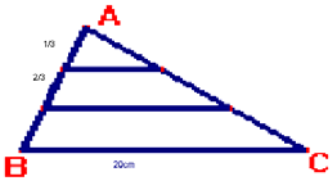
- **Solución - Fase 2 - (12/14) – LA HORMIGA Y LA ARAÑA**

Si el lado del cuadrado es n, la araña recorre 3n unidades de longitud.
La hormiga recorre 3a+3b+3c unidades. Pero como a+b+c=n se comprueba fácilmente que recorren la misma longitud.

- **Solución - Fase Final - (12/14) – EL PASADIZO DEL CASTILLO**

Se puede hacer de la siguiente manera.
Lleno la bombona de 7 litros (**B7**) y la trasvaso a la bombona de 5 l (**B5**), quedando 2 l en **B7.**
Vacío **B5** y en ella deposito los 2 l que quedaban en **B7**.
Vuelvo a llenar **B7** y vierto hasta llenar **B5** (que ya tenía 2l)
Vacío **B5** y la vuelvo a llenar con los 4 l que quedan en **B7**
Lleno otra vez **B7** y vuelvo a verter en **B5** (que le contenía 4 l) quedando en **B7** exactamente 6 l.

- **Solución - Fase Final - (12/14) –DIVIDIENDO EL TRIÁNGULO**

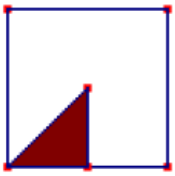


Por el teorema de Thales, al ser los lados paralelos los triángulos formados son semejantes.
El primer segmentó valdrá por tanto 1/3.20 cm y el segundo 2/3.20 cm.
Siendo la suma 20 cm.
En el segundo caso se procede de igual forma siendo la

$$\text{suma}\left(\frac{1}{8}+\frac{2}{8}+\frac{3}{8}+\frac{4}{8}+\frac{5}{8}+\frac{6}{8}+\frac{7}{8}\right).20 = 70cm.$$

- **Solución - Fase Final - (12/14) – EL PASILLO.**

a) Como la serie es de 7 baldosas, al dividir 237 entre 7 da 33 con resto es 6 por lo que será la sexta baldosa de la serie



b) Se aprecia claramente en la figura que en esta serie de 7 baldosas están coloreadas una y 3/8 partes de otra, como una baldosa tiene una superficie de 100 cm^2 cada siete baldosas tendrán 137,5 cm^2 de superficie coloreada, mientras que las 6 últimas tendrán 112,5 cm^2
Por tanto $137,5\ x\ 33 + 112,5 = 4650\,cm^2$

c) Con una sencilla regla de tres

$$\left.\begin{array}{ll} 237\ baldosas & 4650\,m^2 \\ x\quad baldosas & 10000\,m^2 \end{array}\right\} x \simeq 510\ baldosas$$

Aunque podríamos afinar más.

- **Solución - Fase 1 - (14/16) –IZANDO LA BANDERA**

I) La gráfica a) indica que la velocidad de subida de la bandera es uniforme durante todo su izado.
La gráfica b) indica que empieza muy deprisa y la velocidad va disminuyendo durante todo el tiempo.
La gráfica c) muestra que el izado se realiza a tirones.
En la d) sucede lo contrario que en la b), empieza muy lento y la velocidad de subida va aumentando.
En la e) hay dos fases distintas; en la primera mitad se comporta como en d) y en la segunda como en b).
Por último, en f) la subida de la bandera es instantánea.
II, III) La gráfica f) es la menos realista; podría decirse que imposible por exigir una velocidad infinita.
El ritmo constante de a) parece propio de un izado a motor o de una persona experimentada.
Si el izado lo realiza una persona sin experiencia, lo más fácil es que lo haga a tirones, tal como está representado en la c.

- **Solución - Fase 1 - (14/16) – LIO DE TECLAS**

Fijándonos en las dos claves, los números correspondientes a la misma tecla suman 9, por lo que si se introduce el número 10x+y en la calculadora con las claves cambiadas, aparecería el número 10(9 - x) + (9 - y) = 99 - (10x + y).
Si sumamos un número z de una cifra, sería 9 - z; se debe cumplir que
99 - (10x + y) + 9 - z = 10x + y + z → 10x + y + z = 54
Siendo ambos números primos, los casos posibles son:

z =1→ 10x+ y=53
z= 7→ 10x+ y= 47

- **Solución - Fase 1 - (14/16) –LA POSADA DEL ROSARIO**

Una de las piezas ha de ser de 1 ducado, con la que se pagaría el primer día.
Para pagar el segundo día usaríamos otra pieza de 2 ducados y nos devolvería la de 1 ducado, con la que pagaríamos el tercer día, y la posadera tendría 3 ducados.
El cuarto día pagamos con una pieza de 4 ducados y devuelve las dos de 1 y 2 ducados.
Seguiríamos pagando con la de 1, después la de 2 y devuelven 1, y así sucesivamente.
El octavo día pagaríamos con una de 8 ducados y nos devuelven las de 1, 2 y 4. Así podría pagar hasta el día 15.
El día 16 paga con una de 15 y le devuelven las de 2, 4 y 8, y así sucesivamente.
En resumen, las piezas deben ser de 1, 2, 4, 8 y 15 ducados.

- **Solución - Fase 1 - (14/16) – PIEDRAS A MONTONES.**

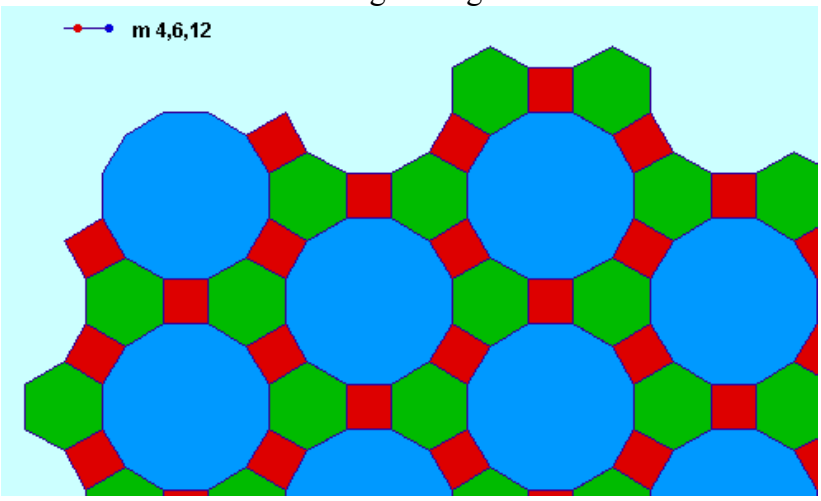
Es evidente que en el primer movimiento, según las reglas, tenemos que juntar dos de los tres montones de piedras, pues ninguno tiene una cantidad par. Hay varias posibilidades de hacerlo. Si en el primer movimiento juntamos los montones de 51 y 49, en el siguiente paso la cantidad de piedras en cada montón será un múltiplo de 5. Como las operaciones posibles son sumar dos montones o dividir uno entre 2, las cantidades de piedras en los montones de los siguientes pasos han de ser nuevamente todos múltiplos de 5; de esta manera será imposible conseguir montones de una sola piedra haciendo estas operaciones.

- **Solución - Fase 1 - (14/16) – MOSAICOS SEMIRREGULARES**

El número mínimo de polígonos en cada vértice es 3, y el número mínimo de lados de cada uno de los polígonos también es 3 (triángulo equilátero).
Solamente existen 8 mosaicos con estas características, que puedes ver a continuación.
Es frecuente denominar los mosaicos mediante números que indican los lados de los polígonos que lo forman y el orden de estos. Así **m488** designa el mosaico que en cada vértice concurren un cuadrado (4) y dos octógonos (88)

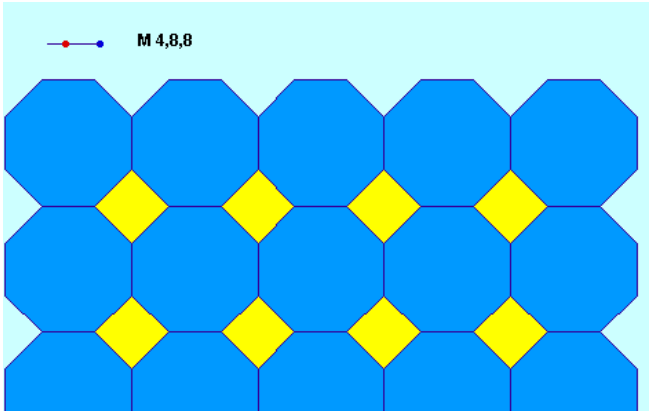
m4 = (4,6,12)

En cada vértice concurren un cuadrado, un hexágono regular y un dodecágono regular.



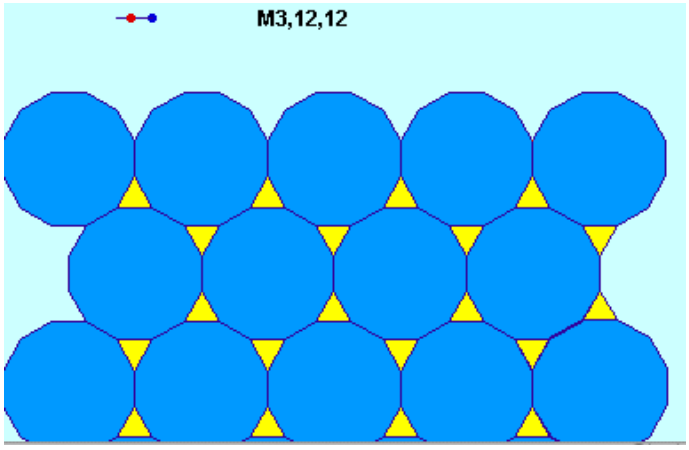
m_5 = (4,8,8)= 4 8^2

Probablemente es el mosaico semirregular más frecuente en embaldosados, bordados,... Cada vértice está formado por dos octógonos regulares y un cuadrado.



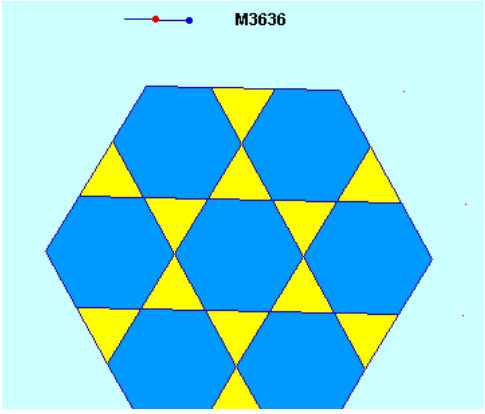
m_6 = (3,12,12)= 3 12^2

Dos dodecágonos regulares y un triángulo equilátero en cada vértice rellenan el plano



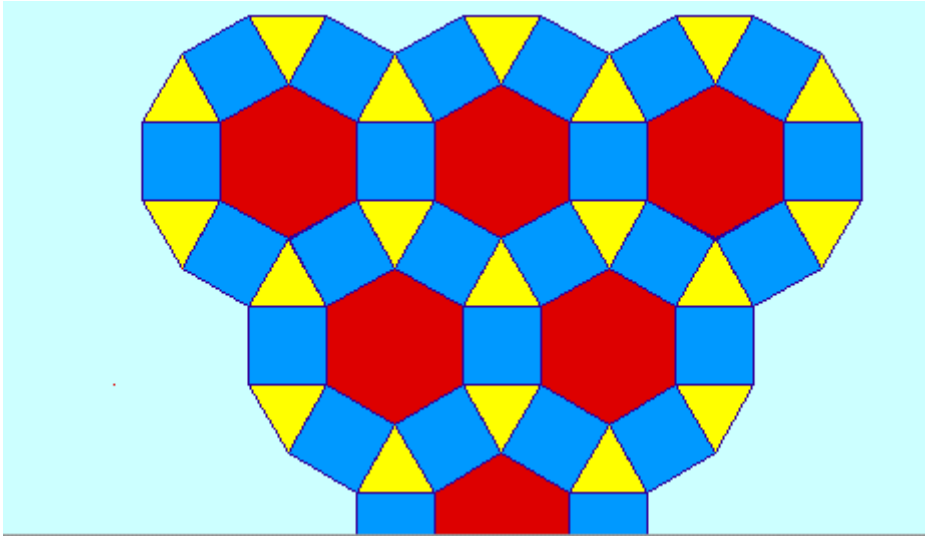
m_7 = (3,6,3,6)

Esta distribución de dos hexágonos y dos triángulos en cada vértice forma también un hexágono mayor.



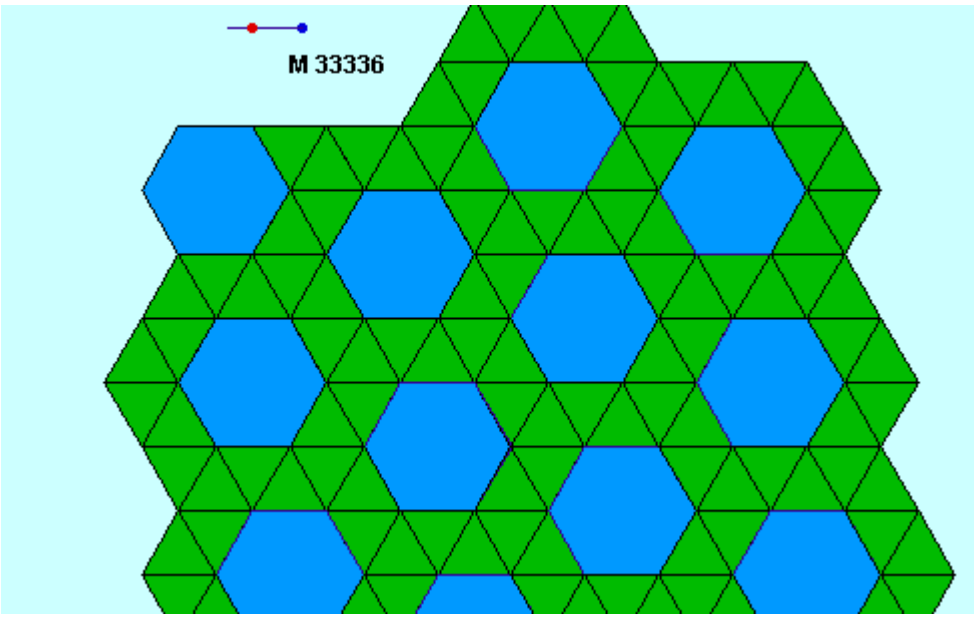
m_8 = (3,4,6,4)

Además de rellenar el plano esta distribución de polígonos regulares forma dodecágonos entrelazados que dan gran belleza al mosaico formado.



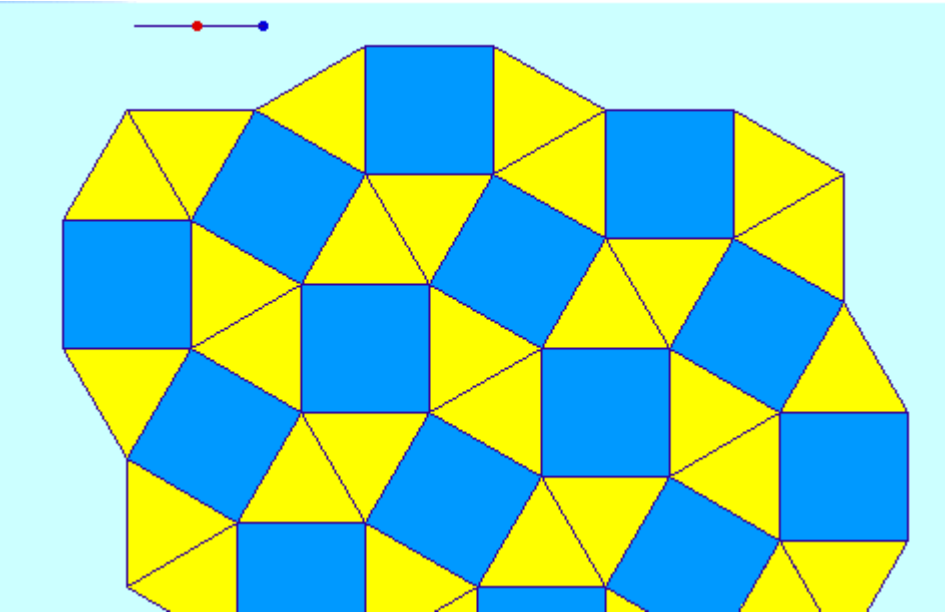
m_9 = (3,3,3,3,6)=$3^4$6

Otro mosaico generado por triángulos equiláteros y hexágonos regulares, diferente al 3636 visto anteriormente



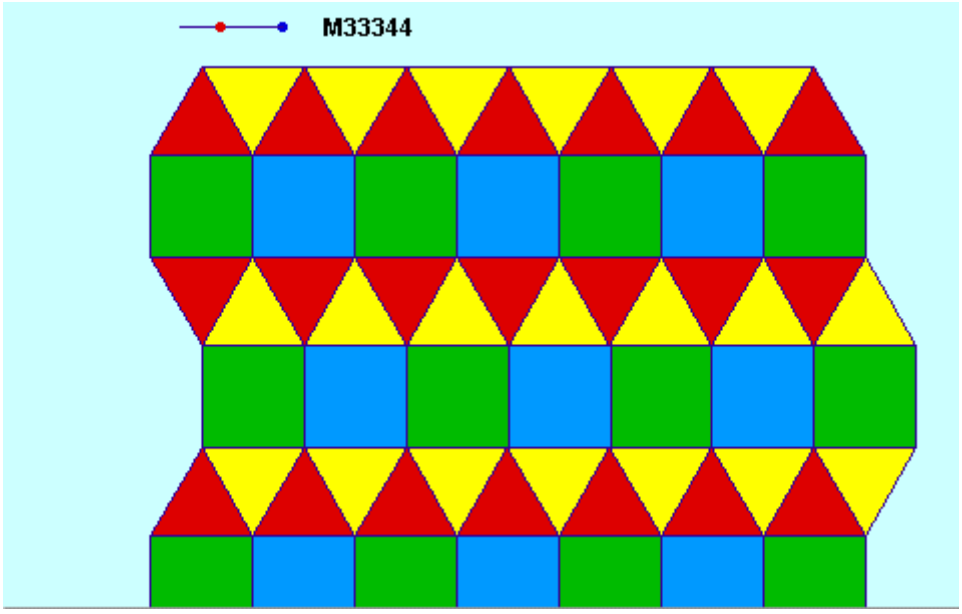
m_{10} = (3,3,4,3,4)=

Mosaico formado por triángulos equiláteros y cuadrados. Comprueba que siempre aparecen en el orden que se indica.



m_{11} = (3,3,3,4,4)= $3^3 4^2$

Observa lo diferente que es este mosaico del anterior, a pesar de tener los mismos polígonos en cada vértice (tres triángulos equiláteros y dos cuadrados) pero en orden diferente



http://mimosa.pntic.mec.es/clobo/geoweb/mosa2.htm

- **Solución - Fase 1 - (14/16) – EL MENÚ DEL FERIAL**

Con cuatros primeros, tres segundos y cuatro postres podemos confeccionar 4x3x4= 48 menús posibles. Como Jesús es celíaco debemos eliminar los menús que contengan gazpacho, filete empanado y natillas. Los que no contienen ninguno de los tres son 3x2x3= 18 menús. Por lo que la probabilidad pedida es $P = \frac{18}{48} = \frac{3}{8} = 0,375$

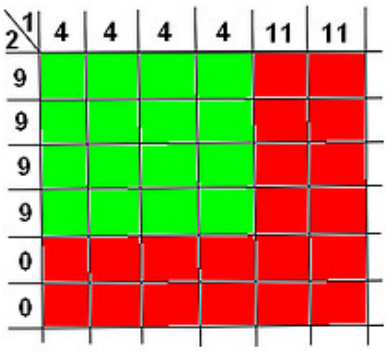
- **Solución - Fase 2 - (14/16) – CURIOSOS DADOS**

La respuesta es bien sencilla: **no existe una elección óptima**. Esto es, no hay forma de elegir un dado que supere a la larga a los otros dos. La razón es que estos dados **no son transitivos**.

Veamos qué es la propiedad transitiva:

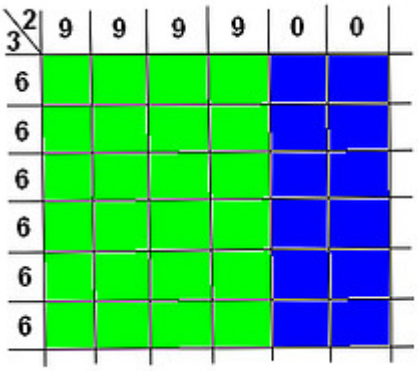
Dada una relación binaria R definida en un conjunto (donde ARB significa A *está relacionado con* B), se dice que R cumple la <u>propiedad transitiva</u> si a partir de que ARB y de BRC entonces se tiene que ARC. Un ejemplo sencillo de esto se da en el conjunto de las personas con la relación binaria *altura*, ya que si una persona A es más alta que otra persona B y a su vez esta persona B es más alta que una tercera persona C entonces tenemos que A es más alto que C. O el típico *Piedra, Papel, Tijera*, donde *tijera* gana a *papel*, *papel* gana a piedra pero *tijera* no gana a *piedra*, sino al contrario.

Vamos a ver que estos dados no cumplen dicha propiedad. Comparemos el dado 1 (ganadas en rojo) con el dado 2 (ganadas en verde) analizando el siguiente cuadro, que nos dice qué dado gana según los resultados de cada una de las tiradas:



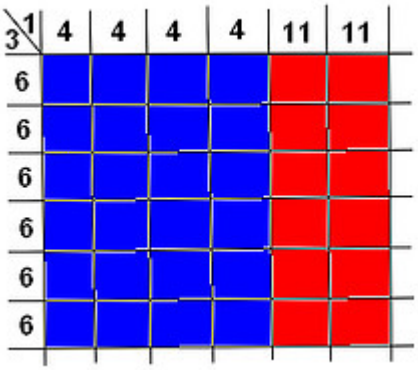
Como podemos ver a la larga la probabilidad de ganar con el dado 1 es de $\frac{20}{36} = \frac{5}{9}$.

Veamos qué ocurre ahora comparando el dado 2(ganadas en verde) con el dado 3(ganadas en azul):



Vemos que a la larga el dado 2ganará al dado 3en 24 de cada 36 partidas, es decir, que entre ellos el dado 2tiene una probabilidad de $\frac{24}{36} = \frac{2}{3}$de ganar.

Teniendo en cuenta que el dado 1gana al dado 2y que el dado 2gana al dado 3, si estos dados cumplieran la propiedad transitiva tendríamos que el dado 1gana al dado 3. Pero:



Esto es, **el dado 1no gana al dado 3**. De hecho el dado 3 tiene una probabilidad de $\frac{24}{36} = \frac{2}{3}$de ganar al dado 1.

Por ello el juego que os planteé al principio no es justo, ya que si vosotros elegís primero **yo siempre tendré la posibilidad de elegir un dado que tenga mayor probabilidad de ganar que el vuestro**.

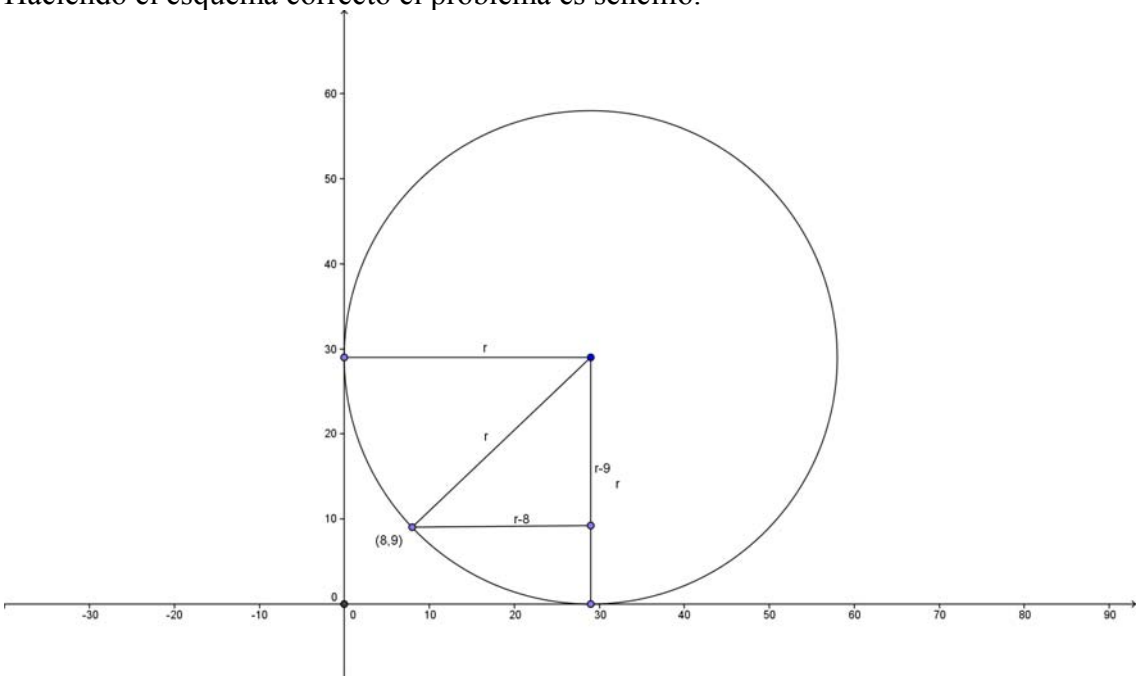
- **Solución - Fase 2 - (14/16) – PLEGANDO PAPEL**

Haciendo la siguiente tabla se comprueba que

Doblez	***Nº de dobleces***	***Hacia arriba***	***Hacia abajo***
1	***1***	***1***	***0***
2	***3***	***2***	***1***
3	***7***	***4***	***3***
4	***15***	***8***	***7***
5	***31***	***16***	***15***
6	***63***	***32***	***31***
n	2^n-1	2^{n-1}	$2^{n-1}-1$

- **Solución - Fase 2 - (14/16) – LA MANCHA EN LA MESA**

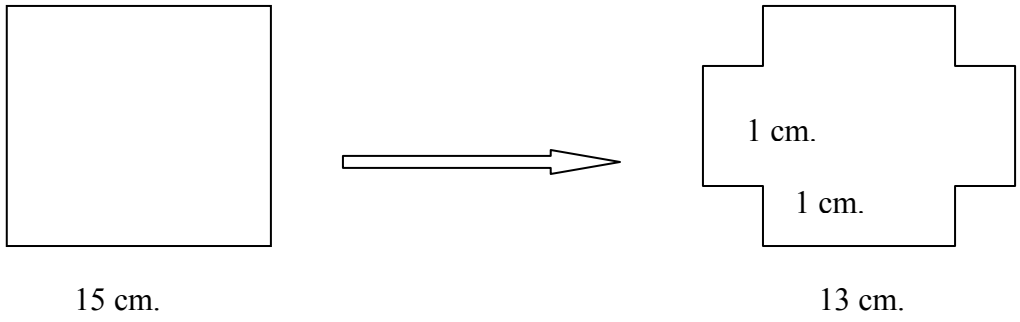
Haciendo el esquema correcto el problema es sencillo.



Y aplicamos el Teorema de Pitágoras $(r-8)^2+(r-9)^2=r^2$ operando $r^2-34r+145=0$. Resolviendo r_1=5 que evidentemente no es solución al problema y r_2=29 por lo que el diámetro de la mesa es 58 cm.

- **Solución - Fase Final - (14/16) – FLORES DE SARTEN**

Si recortamos un cuadrado de lado 1cm. tendré



Su volumen será $V = 13^2.1 = 169\ cm^2$

Si recorto un cuadrado de lado 2 el volumen será $V = 11^2.2 = 242\ cm^2$

Si l es el lado del cuadrado el volumen será $V = (15 - 2l)^2.l$

Para averiguar el tamaño de cuadrado que debe recortar para que el volumen sea máximo construyo la siguiente tabla:

l	1	2	**3**	4	5	…
V	169	242	**243**	196	125	…

Si lo que busco es un número entero tenemos una solución pero podemos afinar más y buscar un resultado mejor

l	2,1	2.2	2,3	2,4	**2,5**	2,6
V	244,944	247,192	248,768	249,696	**250**	249,704

- **Solución - Fase Final - (14/16) –DIAGONALES EN UN RECTÁNGULO.**

  En este problema debo dibujar bastante y contar.
  Si llamo al número de cuadrados de la base **b** y a los de la altura **h** y **d** al número de cuadrados que toca la diagonal obtengo:

b	h	d
2	1	2
2	2	2
2	3	4
2	4	5
2	5	6
..	..	..

Si ***m*** es el máximo común divisor de *h* y *b*, la relación es

$$d=h+b-m$$

Por ejemplo, si $h= 15$, $b = 10$, entonces $m = 5$ Y el número de cuadros atravesados por la diagonal es

$15 + 10 - 5 = 20$

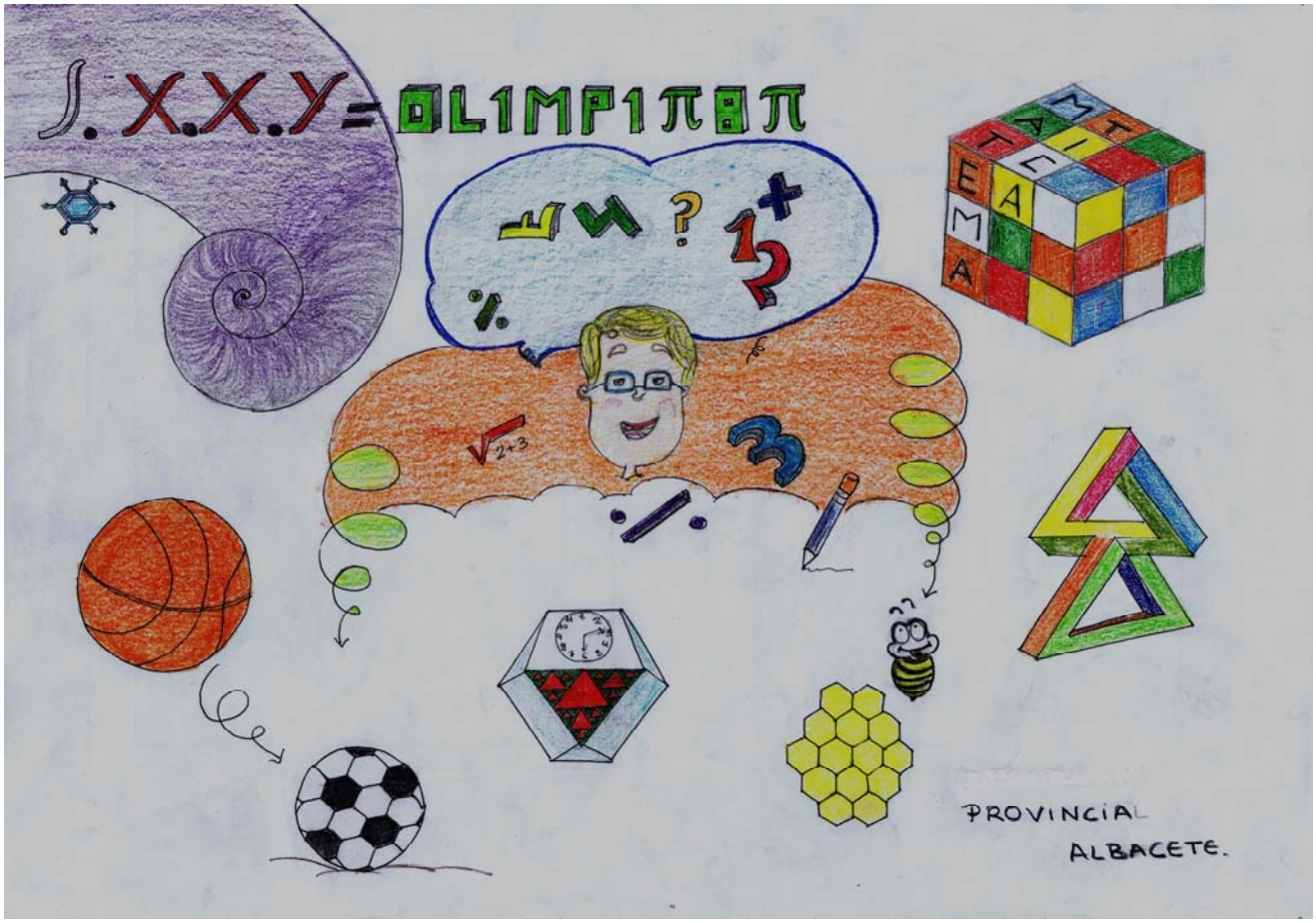
- **Solución - Fase Final - (14/16) – EN EL CASINO**

Este problema se puede abordar por el método de ensayo-error con algunas pequeñas restricciones que podemos extraer del enunciado.
r que es el número mayor es menor o igual a 9 ya que por lo menos hay dos repartos y el que lo obtiene en la última partida acaba con 10 fichas.

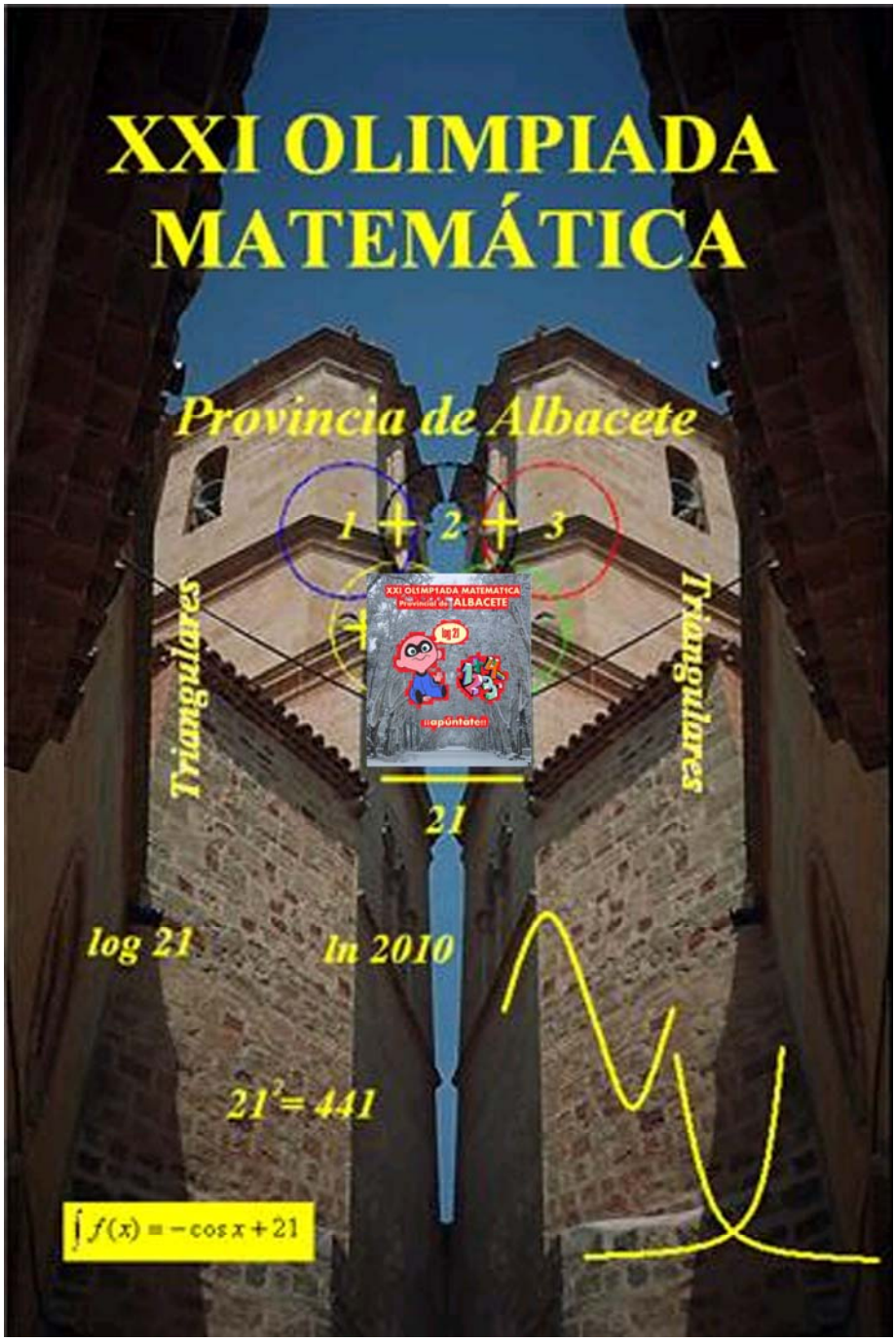
Si se juegan 3 partidas r=8; q=4; p=1.

	Jugador A	Jugador B	Jugador C
Primera partida	**p**	**q**	**r**
Segunda partida	**p**	**q**	**r**
Tercera partida	**r**	**p**	**q**
Total	**10**	**9**	**20**

CARTELES FINALISTAS



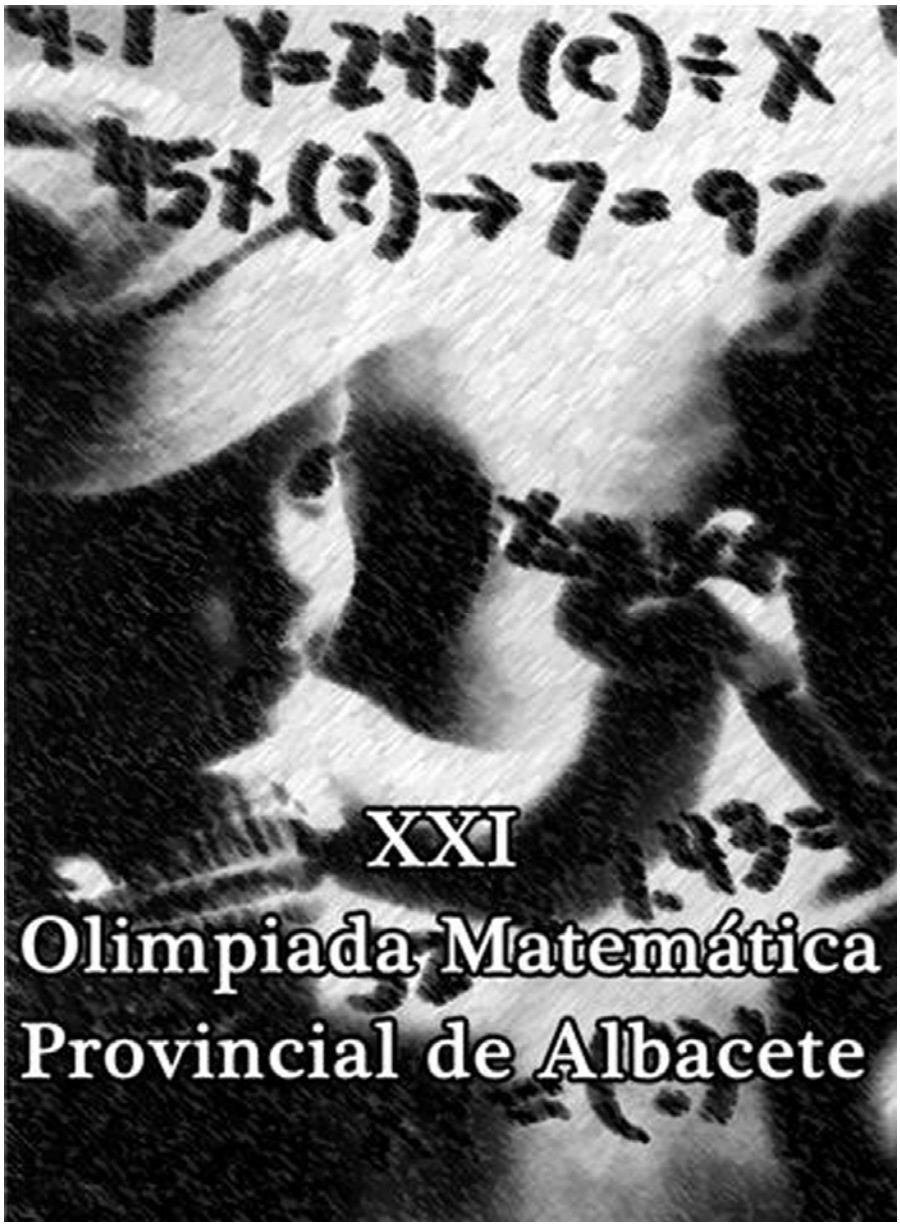
Rufino Ballesteros Jerez



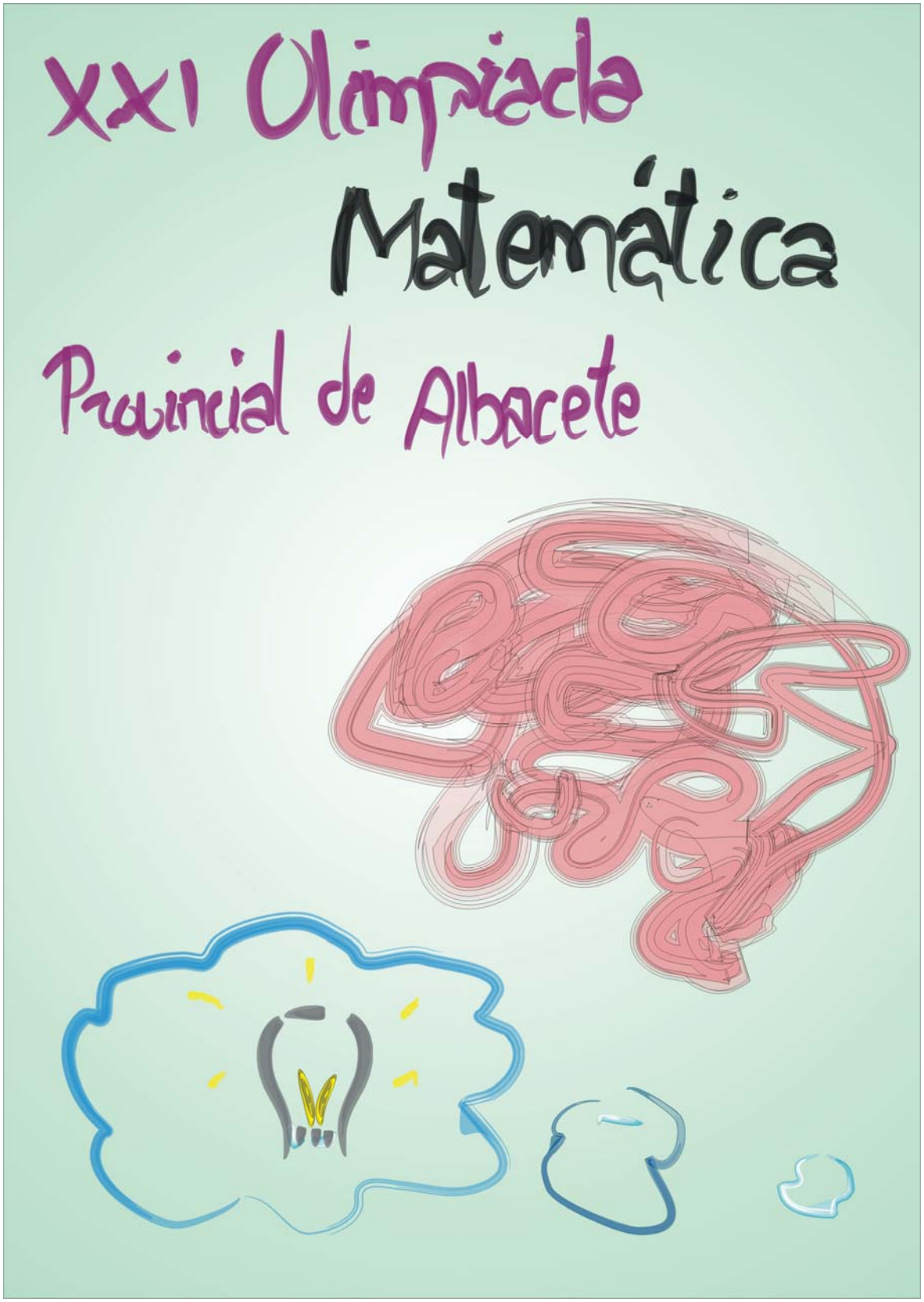
Álvaro Cuartero

Francisco Blázquez

Juan Carlos Felipe



Rubén Martínez Sánchez



XXI OLIMPIADA

LA COMISIÓN ORGANIZADORA:

Antonio Bueno Aroca
Bernardino Del Campo López
Jesús Carcelén Gandia
Jesús García Segovia
Joaquín Jiménez Ramos
Juan Martínez-Tébar Giménez
Juan Emilio García Jiménez
Carlos Motos Martínez-Esparza
Fco Javier Blázquez Merino
Juan Pablo Martínez Corchano
Martín Fernández Carrión
Ramón Cuenca Cuenca
Santiago Turégano Moratalla
Serapio García Cuesta
Vicente Pascual Fidalgo

XXI OLIMPIADA

DIPUTACIÓN DE ALBACETE