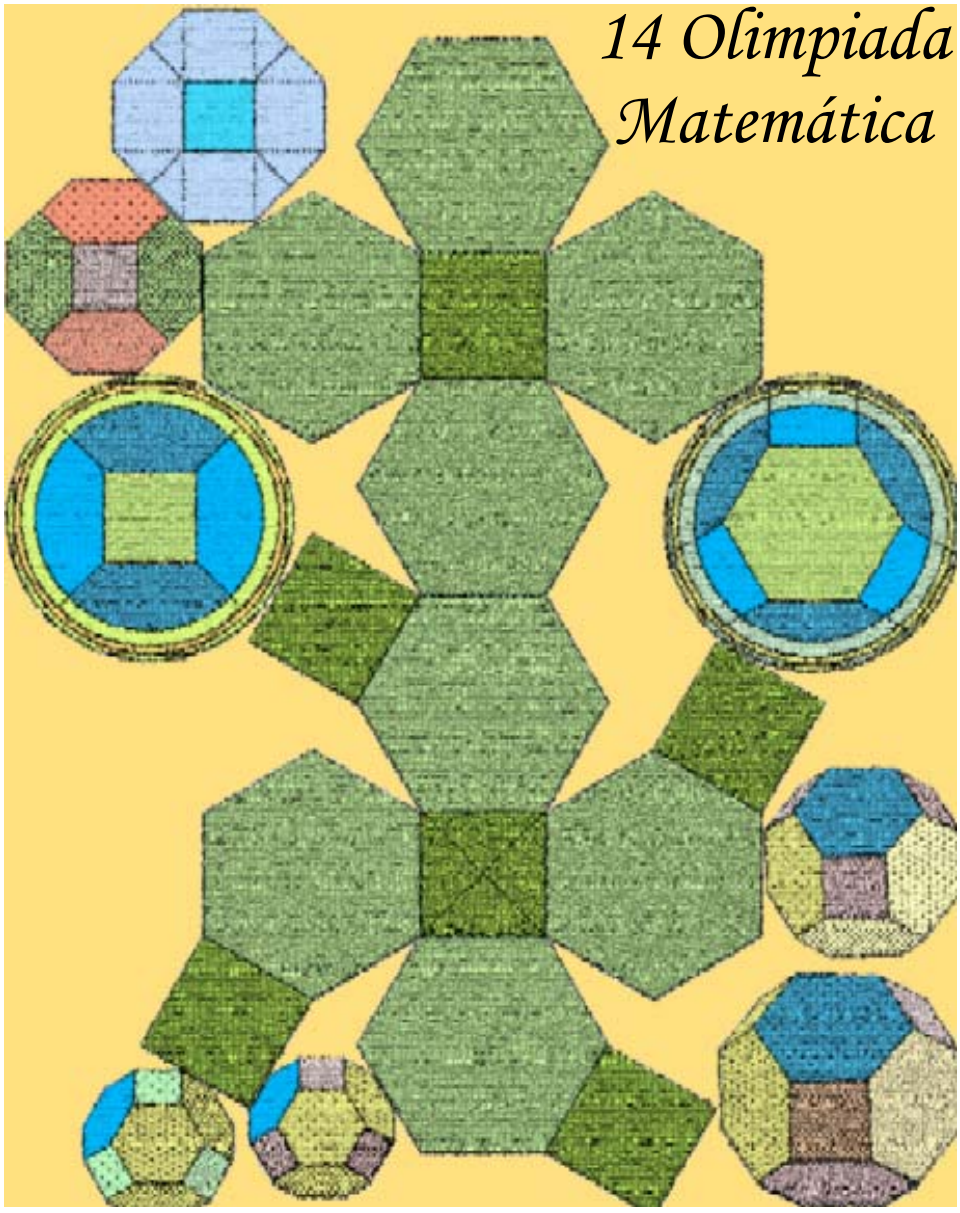
14 Olimpiada Matemática



Enunciados y Soluciones a los Problemas

SOCIEDAD CASTELLANO MANCHEGA DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS - S.C.M.P.M.

ISBN 84-689-1309-X
Depósito legal Albacete 171-2005

PRESENTACIÓN

La Olimpiada Matemática es una actividad organizada con la finalidad de contribuir a desarrollar la competencia matemática entre los alumnos de primer y segundo ciclos de Educación Secundaria. Permite además intercambiar experiencias y compartir propuestas didácticas por parte de los profesores de los diferentes centros de la provincia de Albacete.

También con ella se intenta sensibilizar a la sociedad sobre la necesidad de mejorar una educación matemática que potencie el desarrollo personal y la integración de unos ciudadanos libres y responsables en el siglo XXI.

Son propósitos de esta actividad:

- Potenciar el razonamiento matemático a través de la resolución de problemas.
- Fomentar la capacidad de comunicación y argumentación matemáticas de los estudiantes.

La riqueza de un problema no se encuentra en su resolución, sino en la variedad de puntos de vista que nacen de los diferentes "resolutores", el enunciado debe invitar a la asunción de riesgos en la interpretación, a que cada uno marque sus límites, a que cada uno, en fin, haga suyo el planteamiento y obtenga placer al dedicar tiempo y esfuerzo a su resolución, aunque ésta no se alcance.

EL COMITÉ ORGANIZADOR
Antonio Bueno Aroca
Antonio Díaz Carrillo
Bernardino Del Campo López
Jesús García Segovia
Juan Emilio García Jiménez
Juan Martínez-Tébar Giménez
Ramón Cuenca Cuenca
Santiago Turégano Moratalla
Serapio García Cuesta
Vicente Pascual Fidalgo

XIV Olimpiada Provincial de Albacete

Nivel 12/14

Primera Fase

Problema 1. LAS CHULETAS
Problema 2. EL CUPÓN
Problema 3. CÍRCULOS EN TRIÁNGULO
Problema 4. PADRES E HIJAS
Problema 5. DIAMANTES
Problema 6. SIEMPRE EXACTO

Segunda Fase

Problema 1. FUMAR PERJUDICA SERIAMENTE LA SALUD
Problema 2. DISEÑO LINEAL
Problema 3. LÁGRIMA CIRCULAR

Fase Final

Problema 1. PARTIDA SOLIDARIA
Problema 2. PUNTOS EN LA CIRCUNFERENCIA
Problema 3. EL REPARTO DE CROMOS

Nivel 14/16

Primera Fase

Problema 1. SALVAMANTELES MEXICANO
Problema 2. TRES SOMBREROS
Problema 3. RUBIAS
Problema 4. CIRCULOS Y TANGENCIAS
Problema 5. FIGURA SOMBREADA
Problema 6. CAPICUAS

Segunda Fase

Problema 1. NÚMEROS INVISIBLES
Problema 2. LÁGRIMA CIRCULAR
Problema 3. CAMINOS

Fase Final

Problema 1. COLUMNAS DE GAUDÍ
Problema 2. PUNTOS EN LA CIRCUNFERENCIA
Problema 3. COPO DE NIEVE

Soluciones

XIV Olimpiada

Albacete 2003

Nivel 12/14

Primera Fase

F.1 (12/14) Problema 1. LAS CHULETAS

El señor Asamantecas tiene un asador pequeño, donde apenas caben dos chuletas.

Su mujer y su hija Clara se mueren de hambre y están ansiosas por comer cuanto antes.

El problema es asar las tres chuletas en el mínimo tiempo posible.

Sr. Asamantecas: Vamos a ver, hacen falta 20 minutos para asar una chuleta por los dos lados, pues cada uno tarda 10. Como puedo preparar dos chuletas a la vez, en 20 minutos puedo tener listas dos. La tercera tardará otros 20 minutos. Así que la comida estará a punto dentro de 40 minutos.

Clara: ¡Pero papá! ¡Si puedes hacerlo en mucho menos! Acaba de ocurrírseme cómo ahorrar 10 minutos.

¿Cuál fue la feliz idea que se le ocurrió a Clara?

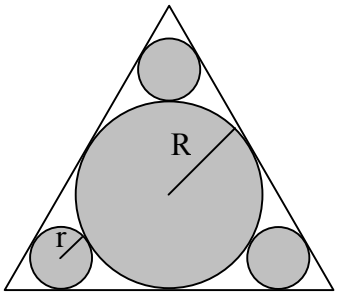
F.1 (12/14) Problema 2. EL CUPÓN

El número del cupón al que estoy abonado es muy curioso porque es capicúa y si sumo sus cinco cifras da el mismo resultado que si las multiplico, pero es que además la primera cifra de la izquierda resulta ser la edad de mi hermana pequeña, las dos siguientes la de mi hermana mediana y las dos últimas la de la mayor, que le lleva a la mediana más de un año.

¿Sabes a qué número estoy abonado?

F.1 (12/14) Problema 3. CÍRCULOS EN TRIÁNGULO

Conocido el valor de L, calcula:



A. Los radios R y r.

B. El área de cada círculo.

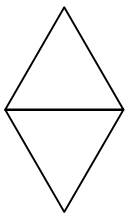
C. La relación entre el área sombreada respecto del área total.

F.1 (12/14) Problema 4. PADRES E HIJAS

Tres hombres Luis, Miguel y Antonio, van a la feria con sus hijas, que se llaman Amalia, Luisa y Margarita. Cada una de estas personas compra un determinado número de objetos, pagando por cada uno un cierto número de euros igual al número de objetos que compra. Antonio compra 23 objetos más que Margarita y Miguel 11 más que Luisa. Cada padre gasta 63 euros más que su hija.

¿Cuál es la hija de Antonio, cuál la de Miguel y cuál la de Luis?

F.1 (12/14) Problema 5. DIAMANTES



A dos triángulos equiláteros unidos por uno de sus lados le llamamos DI-AMANTE. Investiga cuantos pentamantes (agrupaciones de 5 triángulos equiláteros unidos por alguno de sus lados) diferentes hay.

F.1 (12/14) Problema 6. SIEMPRE EXACTO

Encontrar los menores 9 números consecutivos (mayores que 10), el primero terminado en 1,....., y el mayor terminado en 9, de manera que al dividirse por su última cifra, el resultado de siempre exacto.

Ejemplo: 31/1 si, 32/2 si, 33/3 si, 34/4 no,....

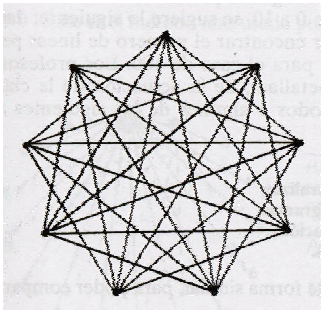
Segunda Fase

F.2 (12/14) Problema 1. FUMAR PERJUDICA SERIAMENTE LA SALUD

Un fumador tiene 215 puros en paquetes de 3, 6 y 8. Con serio peligro para su salud, se fuma todos los paquetes que contienen 6 puros y un número igual de paquetes de los que contienen 3. En el resto de los paquetes de 3 se fuma dos puros, de manera que queda uno en cada paquete. Los de 8 están intactos. Los cuenta y tiene 85 puros. ¿Cuántos paquetes tenía de cada clase?

F.2 (12/14) Problema 2. DISEÑO LINEAL

Este modelo se diseñó colocando nueve puntos en un círculo y uniendo cada uno con todos los demás, salvo con los dos más próximos. El modelo se compuso con 27 líneas.

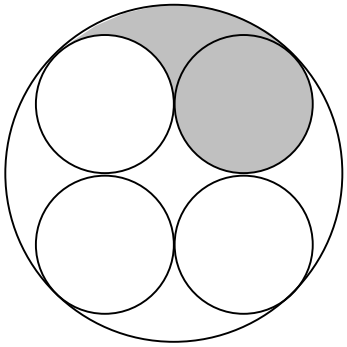


- *¿Cuántas líneas se necesitarán para hacer un modelo similar con 16 puntos?.*
- *¿Cuántas líneas se necesitarán para hacer un modelo similar con 100 puntos?.*
- *¿Puedes encontrar alguna manera de generalizar para cualquier número de puntos?.*

... Y ahora lo miramos al revés: si te dicen que se han necesitado trazar 170 líneas, ¿cuántos puntos había?.

F.2 (12/14) Problema 3. LÁGRIMA CIRCULAR

En la figura se muestran cuatro círculos de radio 1 dentro de un circulo más grande ¿ Cuál es el área de la figura sombreada?.



Fase Final

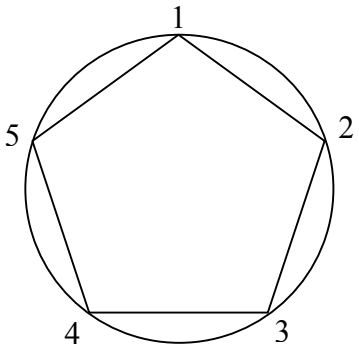
F.F (12/14) Problema 1. PARTIDA SOLIDARIA

Tres jugadores convienen en que el que pierda una partida doblará el dinero que en ese momento tengan los otros dos. Después de haber perdido todos ellos una partida, cada jugador se retira con 200 euros.

¿Cuánto dinero tenía cada uno al principio del juego?.

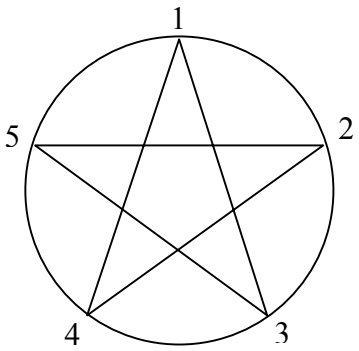
F.F (12/14) Problema 2. PUNTOS EN LA CIRCUNFERENCIA

Sobre una circunferencia te señalan un sentido de recorrido y cinco puntos igualmente distanciados señalados ordenadamente, según el sentido de recorrido, con los números 1, 2, 3, 4, 5. Si vas uniendo con un segmento el punto 1 con el punto 2, el 2 con 3, el 3 con el 4, el 4 con el 5, el 5 con el 1, formas una figura que es un pentágono regular.



Si vas uniendo los puntos de dos en dos hasta llegar al primero, es decir el 1 con el 3, el 3 con el 5, el 5 con el 2, el 2 con el 4, el 4 con el 1, llegas a formar otra figura distinta de la anterior.

Si los unes de tres en tres, es decir el 1 con el 4, el 4 con el 2, el 2 con el 5, el 5 con el 3, el 3 con el 1, la figura que obtienes es la misma que en el caso anterior.



Si los unes de cuatro en cuatro obtienes el pentágono regular, la misma figura que obtenías cuando unías los puntos de uno en uno.

En total obtienes, como ves, dos figuras distintas.

Trata ahora de responder a las preguntas siguientes indicando tu modo de razonar:

a. *Si en lugar de darte cinco puntos ordenados sobre la circunferencia e igualmente distanciados como arriba se indica te dan cuatro (ordenados e igualmente distanciados) ¿cuántas figuras distintas obtienes al proceder de igual forma, es decir, uniendo los puntos de uno en uno, de dos en dos, de tres en tres hasta llegar al primero?*

b. *¿Cuántas figuras distintas si te dan seis puntos y los unes de uno en uno, de dos en dos, de tres en tres,..., de cinco en cinco?*

c. *¿Y si te dan siete puntos?.*

d. *¿Y si te dan doce puntos?.*

e. ¿Y si te dan 60 puntos?.

f. ¿Puedes encontrar alguna manera de generalizar la solución?.

F.F (12/14) Problema 3. EL REPARTO DE CROMOS

Siete amigos tienen en total 2879 cromos, y no hay dos con la misma cantidad.

Si dividimos la cantidad de cromos de uno cualquiera por la cantidad de cromos de cualquier otro que sea menor, el resultado siempre es un número entero.

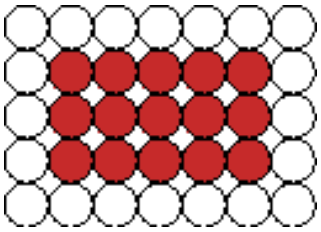
¿Cuántos cromos tiene cada amigo?.

Nivel 14/16

Primera Fase

F.1 (14/16) Problema 1. SALVAMANTELES MEXICANO

Me regalaron un tapete mejicano con la forma rectangular. Hay 20 círculos blancos y 15 rojos.



¿Me pregunto si seria posible construir un tapete con esta forma donde el numero de círculos rojos y blancos sean iguales?.

F.1 (14/16) Problema 2. TRES SOMBREROS

Un árbitro elige tres sombreros de un conjunto de tres blancos y dos negros.

- *Tres hombres sentados, alineados uno tras otro, y todos mirando en la misma dirección (de manera que cada uno sólo puede ver el sombrero de los que tiene delante de él) cierran los ojos mientras se les encasqueta su chapeo.*

- *Los sombreros no utilizados se ocultan de la vista.*

- *El árbitro le pregunta al tercero de la hilera si sabe el color de su sombrero. Éste contesta: "No lo sé".*

- *Hace entonces la misma pregunta al sentado en el centro. También éste contesta: "No lo sé".*

- *Cuando se lo pregunta al ocupante de la primera silla, éste contesta: "Sí, mi sombrero es blanco".*

¿Cómo pudo deducirlo?.

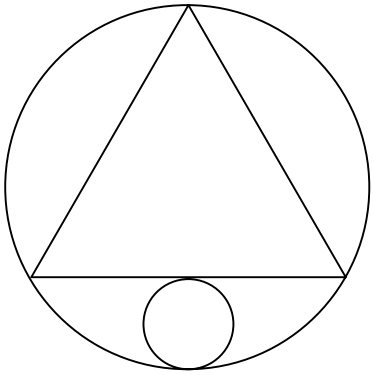
F.1 (14/16) Problema 3. RUBIAS

En una clase de un instituto los alumnos siempre van por parejas, y resulta que, por cada dos parejas que he visto en la que había dos alumnos rubios, sólo he visto una en la que alguno de sus componentes tuviese el pelo de otro color.

¿Podrías predecir la cantidad de alumnos que tiene la clase y cuántos de ellos son rubios?.

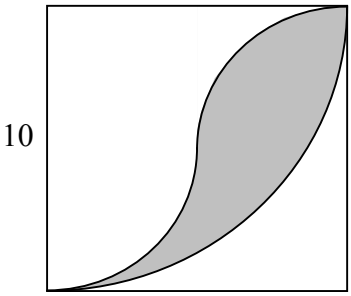
F.1 (14/16) Problema 4. CIRCULOS Y TANGENCIAS

En una circunferencia inscribimos un triángulo equilátero. Una segunda circunferencia es tangente a la primera y tangente a la base del triángulo en su punto medio, como se muestra en la figura.



F.1 (14/16) Problema 5. FIGURA SOMBREADA

Calcula el área y el perímetro de la figura sombreada. Si el lado del cuadrado mide 10 cm



F.1 (14/16) Problema 6. CAPICUAS

Pedro debía sumar todos los números capicúas de cuatro cifras, pero se olvidó sumar uno de ellos. Si obtuvo como resultado 490776, hallar el número capicúa que se olvidó.

Segunda Fase

F.2 (14/16) Problema 1. NÚMEROS INVISIBLES

En cada uno de los vértices de un triángulo está escrito con tinta invisible un número secreto y con tinta visible la suma de los números secretos correspondientes a los otros dos vértices.

- *¿Puedes indicar una regla sencilla para calcular los números secretos a partir de los números que se ven?*

En lugar de tener un triángulo tenemos ahora un cuadrilátero. En cada vértice del cuadrilátero tenemos un número secreto escrito con tinta invisible y en ese mismo vértice tenemos con tinta visible la suma de los números secretos de todos los otros vértices.

- *¿Puedes indicar una regla para calcular los números secretos?*

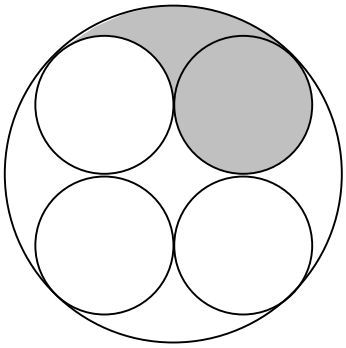
- *¿Y si tuvieras un polígono de 137 vértices y en cada vértice la suma de los números secretos correspondientes a los otros vértices?*

Tienes ahora un pentágono y en cada vértice, con tinta visible, la suma de los dos números secretos que están con tinta invisible en los vértices adyacentes.

- *¿Puedes indicar una regla para calcular los números secretos?*

F.2 (14/16) Problema 2. LÁGRIMA CIRCULAR

En la figura se muestran cuatro círculos de radio 1 dentro de un circulo más grande ¿ Cuál es el área de la figura sombreada?.



F.2 (14/16) Problema 3. CAMINOS

En el triángulo de números

1
1 2 1
1 2 3 2 1
1 2 3 4 3 2 1
1 2 3 4 5 4 3 2 1
1 2 3 4 5 6 5 4 3 2 1

Un camino 1-2-3-4-5-6 es una línea quebrada formada por segmentos horizontales y verticales que pasan por los números 1, 2 ,3, 4 ,5 , 6

- *¿Cuántos caminos 1-2-3-4-5-6 hay?*
- *Si prolongamos este triángulo de números de la forma en que está construido hasta 20 filas ¿ cuántos caminos 1-2-3-4 ...-20 hay?*
- *Si procedemos de esta manera hasta "n" filas ¿cuántos caminos 1-2-3-4-... –n hay?*

Fase Final

F.F (14/16) Problema 1. COLUMNAS DE GAUDÍ

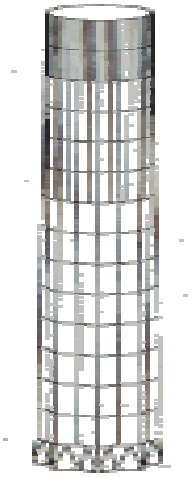
Gaudí era de la opinión de que la nueva arquitectura que le inspiraba la observación de la naturaleza debía tener las características de la vida, que puede mostrarse con el color y el movimiento.

Después de dos años de investigación consiguió para la Sagrada Familia unas columnas nuevas, diferentes a las que había hecho hasta entonces, en las que el movimiento era esencialmente la fuente de su generación.

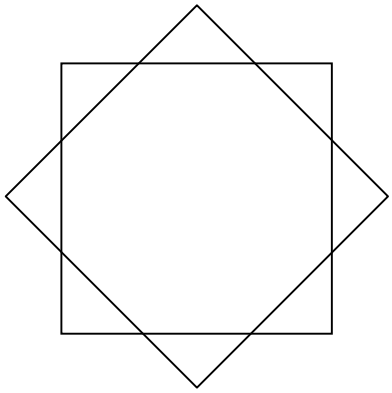
Ramas de un árbol

Columnas arboladas del templo de la Sagrada Familia

A partir de un mismo polígono estrellado como base, dos superficies se elevan y giran helicoidalmente en direcciones opuestas, la una hacia la derecha y la otra hacia la izquierda, y cuando se cortan generan unas aristas que se multiplican hasta llegar a conformar una circunferencia.



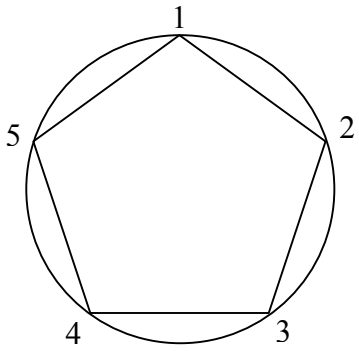
Tomando como base el polígono estrellado que resulta de girar un cuadrado (de un metro de lado) 45º sobre su propio centro, calcula el volumen de una columna recta de 40 m. de altura.



F.F (14/16) Problema 2. PUNTOS EN LA CIRCUNFERENCIA

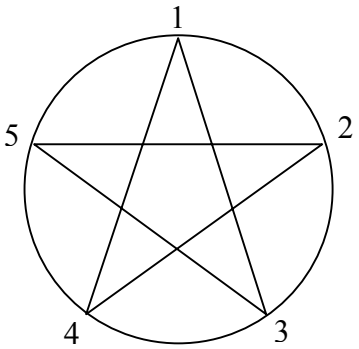
Sobre una circunferencia te señalan un sentido de recorrido y cinco puntos igualmente distanciados señalados ordenadamente, según el sentido de recorrido, con los números 1, 2, 3, 4, 5. Si vas uniendo con un segmento el punto 1 con el punto 2, el 2 con 3, el 3 con el 4, el 4 con el 5, el 5 con el 1, formas una figura que es un pentágono regular.

Si vas uniendo los puntos de dos en dos hasta llegar al primero, es decir el 1 con el 3, el 3 con el 5, el 5 con el 2, el 2 con el 4, el 4 con el 1, llegas a formar otra figura distinta de la anterior.



Si los unes de tres en tres, es decir el 1 con el 4, el 4 con el 2, el 2 con el 5, el 5 con el 3, el 3 con el 1, la figura que obtienes es la misma que en el caso anterior.

Si los unes de cuatro en cuatro obtienes el pentágono regular, la misma figura que obtenías cuando unías los puntos de uno en uno.



En total obtienes, como ves, dos figuras distintas. Trata ahora de responder a las preguntas siguientes indicando tu modo de razonar:

a. *Si en lugar de darte cinco puntos ordenados sobre la circunferencia e igualmente distanciados como arriba se indica te dan cuatro (ordenados e igualmente distanciados) ¿cuántas figuras distintas obtienes al proceder de igual forma, es decir, uniendo los puntos de uno en uno, de dos en dos, de tres en tres hasta llegar al primero?*

b. *¿Cuántas figuras distintas si te dan seis puntos y los unes de uno en uno, de dos en dos, de tres en tres,..., de cinco en cinco?*

c. *¿Y si te dan siete puntos?.*

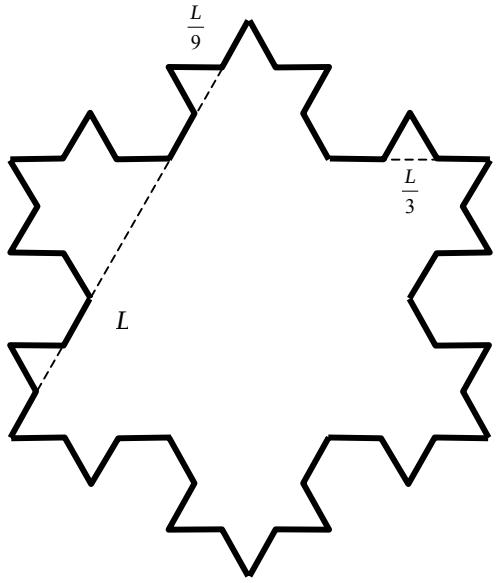
d. *¿Y si te dan doce puntos?.*

e. *¿Y si te dan 60 puntos?.*

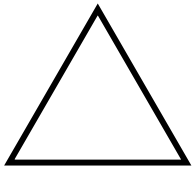
f. *¿Puedes encontrar alguna manera de generalizar la solución?.*

F.F (14/16) Problema 3. COPO DE NIEVE

Esto es un fractal y se le conoce como "copo de nieve" generarlo es fácil (lo difícil es dibujarlo).

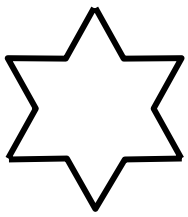


1. *Se inicia con un triángulo equilátero original de lado l.*

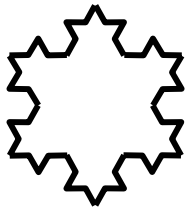


2. *Cada lado se segmenta en tres partes iguales.*

3. *Tomando como base el segmento medio de cada lado; se traza sobre el triángulo equilátero. En este caso, la nueva longitud de lado será 1/3 del lado original. Esta operación se repite para los otros dos lados del triángulo original.*



4. *Se borran los segmentos de en medio y se tiene una nueva figura con puntas triangulares (6 puntas).*



5. *A cada una de la puntas triangulares generadas se les aplican los pasos 2, 3 y 4. El fractal se genera repitiendo estos pasos sucesiva e indefinidamente a las puntas generadas.*

¿Cuál será el área del copo de nieve tras la primera transformación (seis puntas)?

¿Y si volvemos a aplicar la operación (18 puntas)?

Si aplicásemos este proceso indefinidamente ¿Podrías calcular el área de la figura resultante?

Soluciones

- **Solución - Fase 1 - (12/14) - LAS CHULETAS**

Para mejor entender la solución de Clara, conviene llamar A, B y C a las chuletas; cada una tiene dos lados 1 y 2. En los primeros 10 minutos se asan los lados A1 y B1.

Ahora retiramos la chuleta B. En los 10 minutos siguientes pondremos al fuego los lados A2 y C1. La chuleta A ya estará terminada.
En diez minutos más podremos dejar listos los lados B2 y C2.

Las tres chuletas estarán asadas en sólo 30 minutos ¿no es verdad?.

- **Solución - Fase 1 - (12/14) - EL CUPÓN**

Comentarios:

Este problema es interesante para motivar a los alumnos al principio de la olimpiada, por lo menos un problema que a la mayoría le debe resultar accesible, el método de tanteo es suficiente y sale 31113.

- **Solución - Fase 1 - (12/14) - CÍRCULOS EN TRIÁNGULO**

En este nivel, lo normal es que los alumnos y alumnas intenten resolver el problema dándole a L el valor de un número natural. Lo normal sería L=1 y luego quizá intenten probar otros valores conforme hagan los cálculos.

a) Radios:

Si trazamos el hexágono circunscrito al círculo grande, vemos que el triángulo grande queda dividido en 1+3+5=9 triángulos equiláteros como el grande. El lado de cada uno de estos es 1/3 del lado de aquél.
El radio del círculo grande es la altura de uno de estos triángulo que forman el hexágono circunscrito. Por el teorema de Pitágoras podemos calcular la altura del un triángulo pequeño o radio del circulo grande:

$$R = \sqrt{\frac{L}{9}^2 - \frac{L^2}{36}} \quad \Rightarrow \quad R = \sqrt{\frac{3L^2}{36}} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{L\sqrt{3}}{6}$$

El radio del círculo pequeño es la altura de uno de los triángulos del hexágono circunscrito al mismo. El lado de uno de estos triángulos es 1/9 del lado del triángulo grande. Por el procedimiento anterior, usando de nuevo el T. de Pitágoras:

$$r = \sqrt{\frac{L}{81}^2 - \frac{L^2}{324}} \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{\frac{3L^2}{324}} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{L\sqrt{3}}{18}$$

OTRA FORMA DE ABORDAR EL PROBLEMA:

Al estar el círculo grande inscrito en un triángulo equilátero, su Incentro coincide con el Circuncentro, Ortocentro y Baricentro. Por una propiedad del Baricentro sabemos que éste divide a las medianas (coincidentes con las alturas) en dos partes de longitudes 1/3 y 2/3 respectivamente. Por tanto R será la tercera parte de la altura del triángulo (H)

Por el T. de Pitágoras tenemos:

$$H = \sqrt{L^2 - \frac{L^2}{4}} \;\Rightarrow\; H = \frac{L\sqrt{3}}{2}$$

La tercera parte de H será el radio grande: $R = \frac{L\sqrt{3}}{6}$

El círculo pequeño en un círculo inscrito en un triángulo equilátero de lado L/3, ya que la altura (h) es la tercera parte de la altura total, (coincide con R). Por la misma razón que antes, r será igual a 1/3 de h, o sea, 1/3 de R.

$$r = \frac{L\sqrt{3}}{18}$$

b) Áreas:

Círculo grande:

$$A = \pi R^2 \;\Rightarrow\; A = \pi\left(\frac{L\sqrt{3}}{6}\right)^2 \;\Rightarrow\; A = \frac{\pi L^2}{12}$$

Círculo pequeño:

$$A = \pi r^2 \;\Rightarrow\; A = \pi\left(\frac{L\sqrt{3}}{18}\right)^2 \;\Rightarrow\; A = \frac{\pi L^2}{108}$$

Comprobamos que, como corresponde a un radio de 1/3, el área del pequeño es nueve veces menor.

c) Área sombreada: Círculo grande + 3 círculos pequeños

$$A_c = \frac{\pi L^2}{12} + 3\frac{\pi L^2}{108} \;\Rightarrow\; A_c = \frac{\pi L^2}{9}$$

Área del triángulo:

$$A_t = \frac{L \cdot \frac{L\sqrt{3}}{2}}{2} \Rightarrow A = \frac{L^2\sqrt{3}}{4}$$

La relación será $\frac{A_c}{A_t}$; es decir:

$$\frac{\frac{\pi L^2}{9}}{\frac{L^2\sqrt{3}}{4}} \Rightarrow \frac{4\pi}{9\sqrt{3}}$$

- **Solución - Fase 1 - (12/14) - PADRES E HIJAS**

A partir del número de objetos p (pa, pm, pl) que compra cada padre y del número de objetos h (ha, hm, hl) que compra cada hija, se pueden establecer las relaciones familiares.

Se sabe que:

$$pa = hm + 23 \quad \text{y que} \quad pm = hl + 11 \quad (1)$$

y también que como pagan por cada objeto un cierto número de euros igual al número de objetos que compran, los gastos respectivos son p^2 y h^2.

Como cada padre gasta 63 euros más que su hija se cumple que $p^2 = h^2 + 63$ o lo que es lo mismo $p^2 - h^2 = 63$, es decir:

$$(p + h)(p - h) = 3^2 * 7 \quad (2)$$

La igualdad (2) puede cumplirse en los siguientes casos:

1. p + h = 63 y p - h = 1 de donde p = 32 y h = 31
2. p + h = 21 y p - h = 3 de donde p = 12 y h = 9
3. p + h = 9 y p - h = 7 de donde p = 8 y h = 1

Para que se cumplan las identidades (1) debe ser pa = 32, hm = 9, pm = 12 y hl = 1 y, en consecuencia, por las parejas establecidas a partir de la igualdad (2) pl = 8 y ha = 31.

Por lo tanto:

- pa = 32 y ha = 31 Antonio es padre de Amalia
- pm = 12 y hm = 9 Miguel es padre de Margarita
- pl = 8 y hl = 1 Luis es padre de Luisa

- **Solución - Fase 1 - (12/14) - DIAMANTES**

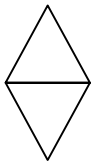
Este es un problema para trabajar en clase dos aspectos básicos en Matemáticas:

- La estrategia de contar (todos los problemas de ¿Cuántos hay? Son en realidad problemas de contar).
- Desarrollo de la capacidad de visión espacial.

Para contar con corrección es preciso tener en cuenta dos reglas fundamentales:

- Contar todas las figuras, sin dejarme ninguna.
- No contar ninguna figura dos veces.

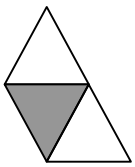
Para generar todas las figuras partiremos del único di-amante posible:



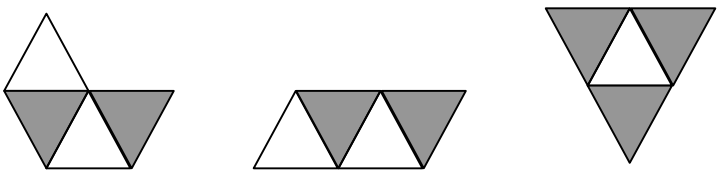
Para formar los tri-amantes añadiremos un triángulo equilátero en cada uno de los lados posibles de la figura.
La eliminación de las figuras que nos salgan iguales requiere una cierta habilidad de visión espacial y es un ejercicio de gran interés para la formación del alumno.

Los resultados ahora no son difíciles de obtener:

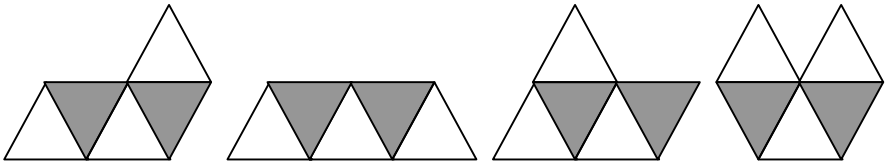
- Hay un único Tri-amante:



- Hay tres tetra-amantes:



- Y finalmente hay cuatro diferentas pentamantes:



- **Solución - Fase 1 - (12/14) - SIEMPRE EXACTO**

Basta calcular el menor número múltiplo de 10 que sea también múltiplo de 9, 7 y 8. Esto es: 9 x 8 x 7 x 5 = 2520.

Luego los números pedidos son:

2521, 2522, 2523, 2524, 2525, 2526, 2527, 2528 y 2529

- **Solución - Fase 2 - (12/14) – FUMAR PERJUDICA SERIAMENTE LA SALUD**

De 3 puros hay x cajas, de 6 puros y cajas y de 8 puros z cajas.

Como en total hay 215 puros resulta

$$3x + 6y + 8z = 215 \quad (1)$$

No se fuma los de 8 ni x - y de tres por lo que:

$$x - y + 8z = 85 \quad (2)$$

- Operando (1)+ 6.(2). obtenemos: $x = \dfrac{730 - 56z}{9}$
- Operando (1)- 3.(2), obtenemos $y = \dfrac{16z - 40}{9}$

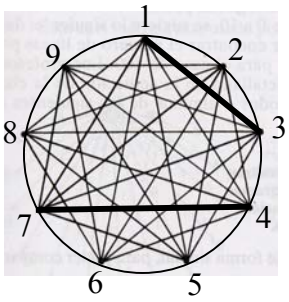
Del sistema (1)-(2) sólo interesan las soluciones z+; hay que probar los valores de z entre 3 y 12 y únicamente para z = 7 se obtienen valores positivos enteros para x e y.

Resumiendo x = 37, y = 8, z = 7.

- **Solución - Fase 2 - (12/14) - DISEÑO LINEAL**

Estudiamos el caso sencillo que presenta el enunciado del problema como ejemplo, este estudio puede ayudarnos en los casos complicados que tenemos que resolver.

Para ello tomamos una circunferencia, dibujamos los nueve puntos, numerándolos, y llamando a cada segmento con los números que etiquetan sus extremos. En la imagen siguiente remarcamos los segmentos 1-3 y la 4 –7:



A continuación construimos una tabla, en la que anotamos los números correspondientes a los puntos y señalamos los segmentos que se generan, teniendo en cuenta que el segmento 1-3 y el 3-1 son el mismo, de esta forma obtenemos:

		Puntos								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
Puntos	1									
	2	s								
	3	s	s							
	4	s	s	s						
	5	s	s	s	s					
	6	s	s	s	s	s				
	7	s	s	s	s	s	s			
	8	s	s	s	s	s	s	s		
	9		s	s	s	s	s	s	s	

Contando por columnas tenemos:

$$\text{número de segmentos} = 6 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 6 + \frac{(6+1)\cdot 6}{2} = 27$$

Utilizando este método podemos resolver el caso de una circunferencia con 16 puntos, puesto que la tabla que se obtendría sería similar, y el resultado numérico el siguiente:

$$\text{sº_seg} = 13 + 13 + 12 + 11 + \ldots + 2 + 1 = 13 + \frac{(13+1)\cdot 13}{2} = 104$$

El caso de 100 puntos es ahora sencillo:

$$\text{sº_seg} = 97 + 97 + 96 + 95 + \ldots + 2 + 1 = 97 + \frac{(97+1)\cdot 97}{2} = 4850$$

Incluso podemos dar una fórmula general, para el cado en el que una circunferencia tenga *n* puntos:

$$s^o_seg = n + n + (n-1) + \ldots + 2 + 1 = n + \frac{(n+1)\cdot n}{2} = \frac{n^2 - 3n}{2}$$

Para resolver la última cuestión basta con igualar la fórmula obtenida a la cantidad de líneas propuestas:

$$\frac{n^2 - 3n}{2} = 170$$

Obteniendo una ecuación de segundo grado: $n^2 - 3n - 340 = 0$, cuyas soluciones son: 20 y –17. La solución negativa es inaceptable, por lo que podemos concluir que necesitamos 20 puntos.

OTRA FORMA DE ABORDAR EL PROBLEMA:

Este problema se resuelve de forma sencilla utilizando la combinatoria.

Todas las líneas que podemos hacer son las combinaciones de n puntos tomados de dos en dos; a esta cantidad hay que restarle n puntos puesto que el problema nos pone la restricción de que no podemos unir los puntos más próximos quedando:

$$C_{n,2} - n = \frac{n!}{(n-2)!.2!} - n = \frac{n^2 - 3n}{2}$$

Por lo que solamente hay que sustituir n por 16 y veremos que hacen falta 104 líneas.

Para n = 100 necesitaremos 4850 líneas.

Para saber cuantos puntos había si se han trazado 170 líneas basta con hacer $\frac{n^2 - 3n}{2} = 170$ de donde n=20

- **Solución - Fase 2 - (12/14) - LÁGRIMA CIRCULAR**

Si unimos los centros de los círculos pequeños obtenemos un cuadrado de lado 2. Su diagonal por tanto será $2\sqrt{2}$, por lo que el diámetro del círculo mayor será $2 + 2\sqrt{2}$ y su superficie $S = \pi\left(1 + \sqrt{2}\right)^2$.

La superficie del "diamante" central será el área de ese cuadrado de lado 2 menos el área de un círculo pequeño o sea 4-π.

Por tanto si restamos este "diamante" central al área del círculo grande tendremos la superficie de cuatro lágrimas por lo que la superficie de una sola será:

$$S = \frac{1}{4}\left(\pi\left(1+\sqrt{2}\right)^2 - \left[4-\pi\right]\right)$$

Lo que simplificando nos lleva al resultado siguiente:

$$S = \left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\pi - 1$$

- **Solución - Fase Final - (12/14) - PARTIDA SOLIDARIA**

Sean x, y, z las cantidades del primero, segundo y tercer jugador respectivamente, al principio del juego.

Supongamos que la primera partida la pierde el primer jugador, en la segunda pierde el segundo y en la tercera pierde el tercero, el saldo del primer jugador en cada instante será:

Primera partida: x – y – z
Segunda partida: 2 . (x – y – z)
Tercera partida: 4 . (x – y – z)

Como 4 . (x – y – z) = 200, tenemos que x = y + z + 50, es decir, podemos deducir que el primer jugador tiene la misma cantidad que los otros dos, más 50 euros.

Partamos ahora de esta situación y veamos que ocurre con el segundo jugador:

	1er Jugador	2do Jugador
Inicio:	y + z + 50	y
Primera partida:	50	2y
Segunda partida:	100	2y – 50 – 2z
Tercera partida:	200	4y – 100 – 4z

Es decir que 4y – 100 – 4z = 200, de donde se obtiene que y = z + 75. Se deduce entonces que el segundo jugador tenía tanto dinero como el tercero más 75 euros.

Partamos ahora de los dos descubrimientos realizados y reproduzcamos el proceso:

	1er Jugador	2do Jugador	3er Jugador
Inicio:	y + z + 50	z + 75	z
Primera partida:	50	2z + 150	2z
Segunda partida:	100	100	4z
Tercera partida:	200	200	4z – 200

Es decir, que 4z – 200 = 200, de donde se deduce que z = 100.

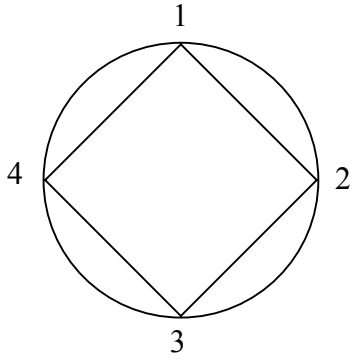
Por lo tanto y = z + 75 = 175.

La solución es, en consecuencia:

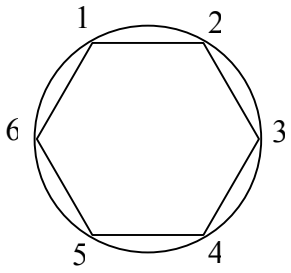
Primer jugador: 325 €
Segundo jugador: 175€
Tercer jugador: 100€.

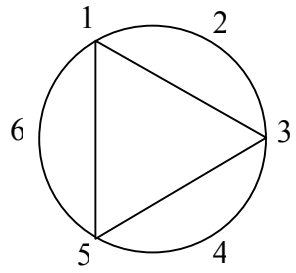
- **Solución - Fase Final - (12/14) - PUNTOS EN LA CIRCUNFERENCIA**

(1) Con cuatro puntos solamente obtenemos una figura, el cuadrado:

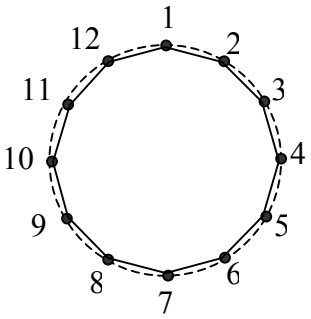
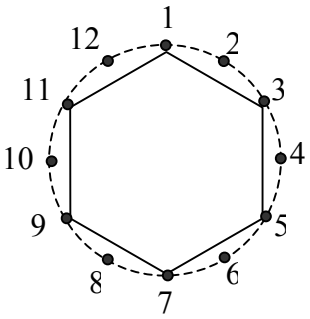
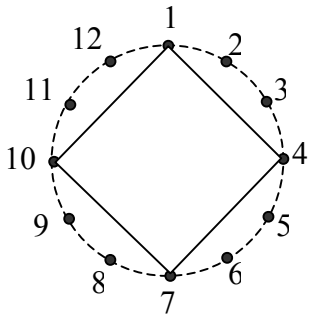
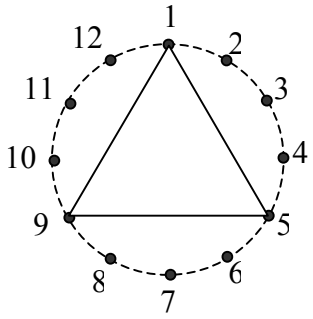


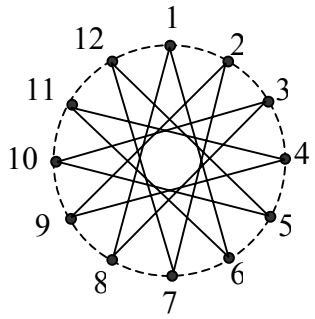
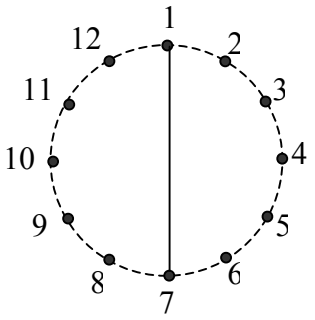
(2) Con seis puntos obtenemos un hexágono regular y un triángulo:





(3) Con doce puntos el estudio es más largo, en la siguiente tabla se resume el resultado, indicando la figura obtenida en función del número de huecos que se dejan:

Número de huecos	Figura	Imagen
1	$\frac{12}{1} = 12$ *lados* _____ Dodecágono	
2	$\frac{12}{2} = 6$ *lados* _____ Hexágono	
3	$\frac{12}{3} = 4$ *lados* _____ Cuadrado	
4	$\frac{12}{4} = 3$ *lados* _____ Triángulo	

5	*mcm(12,5) = 60* $\frac{60}{5} = 12$ *puntas* Estrella de 12 puntas	
6	$\frac{12}{6} = 2$ Diámetro	
7	12 – 7 = 5; Igual que el caso de 5 huecos	
8	12 – 8 = 4; Igual que el caso de 4 huecos	
9	12 – 9 = 3; Igual que el caso de 3 huecos	
10	12 – 10 = 2; Igual que el caso de 2 huecos	
11	12 – 11 = 1; Igual que el caso de 1 huecos	
12	Un punto	

(4) Con 60 puntos el estudio es excesivamente largo, pero con la información que tenemos, obtenida en el estudio anterior, veremos que ocurre en los diferentes casos que pueden darse, en función de los huecos, teniendo en cuenta que los casos de p huecos, con $p>30$, se pueden referir al correspondiente caso de $60 - p$ huecos.

- Caso p huecos, con p divisor de 60: Como p divide a 60 tenemos que $\frac{60}{p} = n$, lo que dará lugar a un polígono de n lados

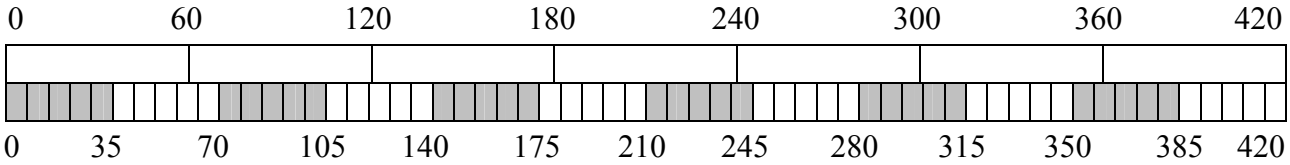
Así tendremos :

Número de huecos	Polígono de
1	60 lados
2	30 lados
3	20 lados
4	15 lados
5	Dodecágono
6	Decágono
10	Hexágono
12	Pentágono
15	Cuadrado
20	Triángulo
30	Diámetro
60	Punto

- Caso *p* huecos, con *p* no divisor de 60:

Veamos que ocurre en el caso de 7:

Como *mcm(60,7)=420*, la situación que se produce es la representada en la imagen siguiente:

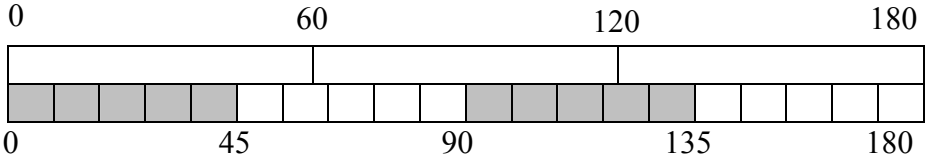


Si dibujásemos la circunferencia y las líneas, la primera coincidencia se produciría al cerrarse la estrella de 60 puntas.

Esto ocurrirá siempre que *mcm(60,p) = 60p*, luego tendremos que con 7, 11, 13, 17, 19, 23 y 29 obtendremos una estrella de 60 puntas.

Veamos que sucede en el caso de 9:

Ahora *mcm(60,9)=180*, la situación es la representada a continuación:



Si dibujásemos la circunferencia y las líneas, la primera coincidencia se produciría al cerrarse la estrella de 20 puntas, precisamente el resultado de dividir 180 entre 9.

Esta situación se reproducirá cada vez que *mcm(60,p) < 60p*, luego tendremos:

Número de huecos	Polígono de
8	*mcm(60,8) = 120;* $\frac{120}{8} = 15$ *puntas* ——— Estrella de 15 puntas
9	*mcm(60,9) = 180;* $\frac{180}{9} = 20$ *puntas* ——— Estrella de 20 puntas
14	*mcm(60,14) = 420;* $\frac{420}{14} = 30$ *puntas* ——— Estrella de 30 puntas
16	*mcm(60,16) = 240;* $\frac{240}{16} = 15$ *puntas* ——— Estrella de 15 puntas
18	*mcm(60,18) = 180;* $\frac{180}{18} = 10$ *puntas* ——— Estrella de 10 puntas
21	*mcm(60,21) = 420;* $\frac{420}{21} = 20$ *puntas* ——— Estrella de 20 puntas
22	*mcm(60,22) = 660;* $\frac{660}{22} = 30$ *puntas* ——— Estrella de 30 puntas

24	*mcm(60,24) = 120;* $\frac{120}{24} = 5$ *puntas* ——————— Estrella de 5 puntas
25	*mcm(60,25) = 300;* $\frac{300}{25} = 12$ *puntas* ——————— Estrella de 12 puntas
26	*mcm(60,26) = 780;* $\frac{780}{26} = 30$ *puntas* ——————— Estrella de 30 puntas
27	*mcm(60,27) = 540;* $\frac{540}{27} = 20$ *puntas* ——————— Estrella de 20 puntas
28	*mcm(60,28) =420;* $\frac{420}{28} = 15$ *puntas* ——————— Estrella de 15 puntas

(5) Generalización: para una cantidad de puntos, *k*, podemos utilizar el estudio hecho para *k*= 60 y en función del número de huecos dejado en cada paso, *p*, tendremos:

- Caso $E[k/2] < p < k$: la figura se corresponderá con la generada para $k - p$.
- Caso $p \le E[k/2]$: En el caso de valores
  - Si *p* divisor de *k*: $\frac{k}{p} = n$, con lo que se generará un polígono de *n* lados
  - Si *p* no divide a *k*: estrella de *n* puntas, siendo :

$$n = \frac{mcm(k, p)}{p}$$

- **Solución - Fase Final - (12/14) - EL REPARTO DE CROMOS**

Como cada número de estampas ha de ser divisible por todos los menores, el menor de todos dividirá a los restantes y por tanto a su suma, es decir a 2879. (en caso de no conocer esta propiedad, el alumno puede sacar factor común y proseguir el razonamiento)

El asunto está en que 2879 es primo, luego el que menos "estampicas" tiene, ha de tener UNA.

Quedan 2878 para repartir, y como 2878 = 2 x 1439, el segundo tendrá DOS, con lo que quedan para repartir, 2876, y así sucesivamente hasta llegar a la solución, que es:

1, 2, 4, 8, 16, 32 y 2816.

- **Solución - Fase 1 - (14/16) - SALVAMANTELES MEXICANO**

Considero el rectángulo formado por los círculos rojos.

Si llamo x a la altura de los círculos rojos y llamo y a la base de los círculos rojos, tendré x.y círculos rojos (1).

La altura de círculos blancos será dos unidades mayor que la de círculos rojos o sea x + 2 por lo que habrá un total de círculos blancos 2.(x + 2) + 2y, es decir, 2x + y + 4 círculos blancos (2).

Puesto que las cantidades (1) y (2) deben ser iguales, tendremos:

$$x.y = 2x + 2y + 4$$

luego, x.y – 2y = 2x + 4, y por tanto y. (x – 2) = 2x + 4, quedando:

$$y = \frac{2x+4}{x-2}$$

Dando valores naturales a x solamente obtenemos valores naturales para y con :

- x = 3, y = 10. En este caso habrán, 30 círculos de cada color.
- x = 4, y = 6. Y tendremos así 24 círculos de cada color.

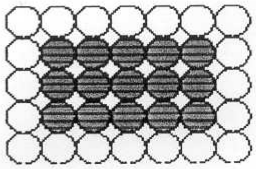
Añadimos en este problema la solución aportada por José Alfonso González Fernández de 4º ESO B del IES Maestro Juan Rubio de La Roda.

OLIMPIADA MATEMATICA

OLIMPIADA. PRIMERA FASE.
NIVEL 14 – 16. PROBLEMA Nº 1

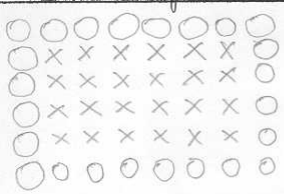
SALVAMANTELES MEJICANO

Me regalaron un tapete mejicano con la forma rectangular. Hay 20 círculos blancos y 15 rojos.

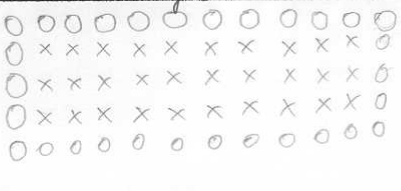


¿Me pregunto si seria posible construir un tapete con esta forma donde el numero de círculos rojos y blancos sean iguales?.

24 blancos
24 rojos



30 blancos
30 rojos



Sí se puede hacer y además es fácil hacerlo sin cuentas. Sabiendo que cada fila o columna que aumentas en el interior, en el exterior hay dos círculos más. Siendo así, puedes añadir círculos a las filas y columnas hasta que tengas el mismo número dentro que fuera.

- **Solución - Fase 1 - (14/16) - TRES SOMBREROS**

El razonamiento es como sigue:

"El sentado en la tercera silla solo podrá contestar "sí" cuando vea dos sombreros negros. Por haber respondido "no", es obvio que los dos sombreros que ve no son ambos negros.

Supongamos ahora que mi sombrero fuese negro. El hombre sentado en el centro ve que es negro. Tan pronto como esta persona oiga decir "no" al sentado tras él, sabrá que su sombrero es blanco, pues de lo contrario, el tercero vería dos sombreros negros y contestaría "sí".

Por consiguiente, si mi sombrero fuese negro, la persona sentada tras de mí contestaría afirmativamente. Pero en la realidad contesta que "no".

Ello demuestra que la persona sentada detrás de mí está viendo en mi cabeza un sombrero blanco. Por tanto, la hipótesis inicial es falsa, y mi sombrero, blanco.

- **Solución - Fase 1 - (14/16) - RUBIAS**

Abordaremos este problema desde los siguientes supuestos:

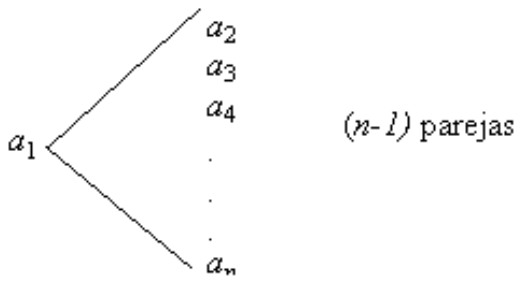
- En todo caso nos referimos a alumnos y alumnas.
- La palabra pareja hace referencia a dos personas.
- El observador ve lo que ve y extrapola la relación observada a todas las posibles parejas que puedan formarse con alumnos de esa clase.

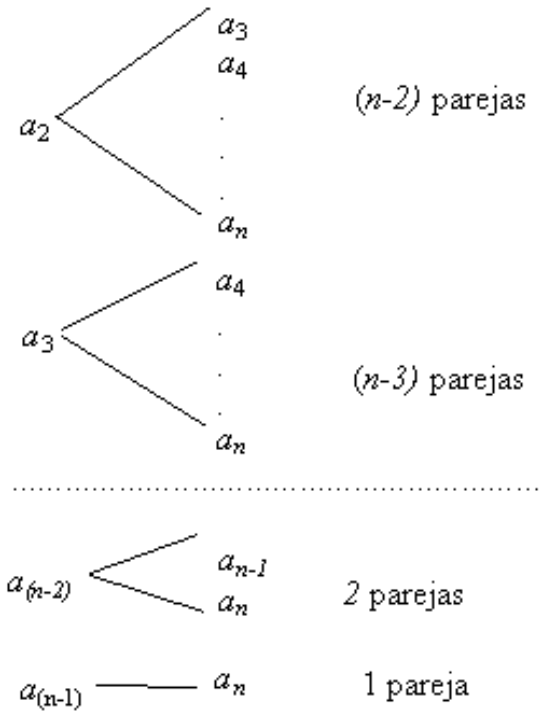
Sea *n* el número de alumnos en la clase y el número de alumnos rubios *m*. Los pasos que seguiremos para obtener el resultado son:

1. Obtendremos la cantidad de parejas que pueden formarse en la clase.
2. A continuación la cantidad de parejas cuyos dos componentes sean personas rubias.
3. Aplicaremos la relación entre ambos valores que se desprende de la observada.
4. Deduciremos el resultado a partir de la ecuación que resulta creando dos tablas de valores.

El siguiente razonamiento permite obtener la cantidad de parejas que pueden formarse en la clase:

Dado un conjunto de *n* elementos, formamos las parejas:





Por lo tanto el número de parejas vendrá dado por la suma de la progresión aritmética:

$$1+2+3+\ldots+(n-1)=\frac{(n-1)+1}{2}\cdot(n-1)=\frac{n\cdot(n-1)}{2}$$

Naturalmente el resultado sería inmediato aplicando conocimientos de combinatoria.

Por lo tanto hay:

- $\frac{n\cdot(n-1)}{2}$ parejas de alumnos.
- $\frac{m\cdot(m-1)}{2}$ parejas cuyos componentes son ambos rubios.

La relación entre ambos tipos de parejas que observa quién propone el problema es de 2 a 1, es decir, de cada tres parejas dos cumplen la condición de que sus dos componentes son personas rubias. Por lo tanto tendremos:

$$\frac{m\cdot(m-1)}{2}\cdot 3=\frac{n\cdot(n-1)}{2}\cdot 2 \quad\Rightarrow\quad m\cdot(m-1)\cdot 3=n\cdot(n-1)\cdot 2$$

Damos a continuación algunos valores a la variable *n* para encontrar el valor de la parte derecha de la expresión, y algunos también a *m* para encontrar algunos de la parte izquierda, buscando valores que nos den la igualdad:

Dando valores a *n*:

n	1	2	3	4	5	6	7	8
2.n.(n-1)	0	4	12	24	40	60	84	112

Dando valores a *m*:

m	1	2	3	4	5	6	7	8
3.m.(m-1)	0	6	18	36	60	90	126	168

Observamos una coincidencia para *n=6* y *m=5*, es decir una solución será una clase con 6 alumnos de los que 5 son rubios.

Este resultado nos indica que el curso al que nos referimos puede corresponder a una optativa de Bachillerato en un centro pequeño.

Ante el enunciado de este problema se pueden establecer otras suposiciones iniciales, a partir de las cuales atacar su resolución, por ejemplo:

- Las parejas de alumnos son fijas, es decir, cada pareja está formada por dos alumnos "inseparables".
- Las parejas no son fijas y el observador contabiliza una sola vez cada una de las parejas diferentes que ve.
- Las parejas no son fijas y el observador contabiliza cada pareja tantas veces como la ve.

El estudio del problema bajo el prisma aportado por estas interpretaciones, y cualquiera otra que pudiera hacerse, quedan al cuidado del lector que tenga tiempo y ganas para ello.

- **Solución - Fase 1 - (14/16) - CIRCULOS Y TANGENCIAS**

Si R es el radio de la circunferencia mayor, podemos deducir fácilmente que R/4 es el de la menor, veamos como:

> El centro de la primera circunferencia es el baricentro del triángulo, luego desde este centro a la base del triángulo hay una distancia de R/2, por lo tanto también (R – R/2) = R/2 será el diámetro de la circunferencia menor, es decir R/4 su radio.

Por lo tanto el cociente de las longitudes de estas dos circunferencias será:

$$\frac{2\pi R}{2\pi \frac{R}{4}} = 4$$

Es decir la longitud de la primera circunferencia es cuatro veces mayor que la de la segunda.

- **Solución - Fase 1 - (14/16) - FIGURA SOMBREADA**

Si observamos la figura 1 vemos cual ha sido la construcción de la zona sombreada del problema.

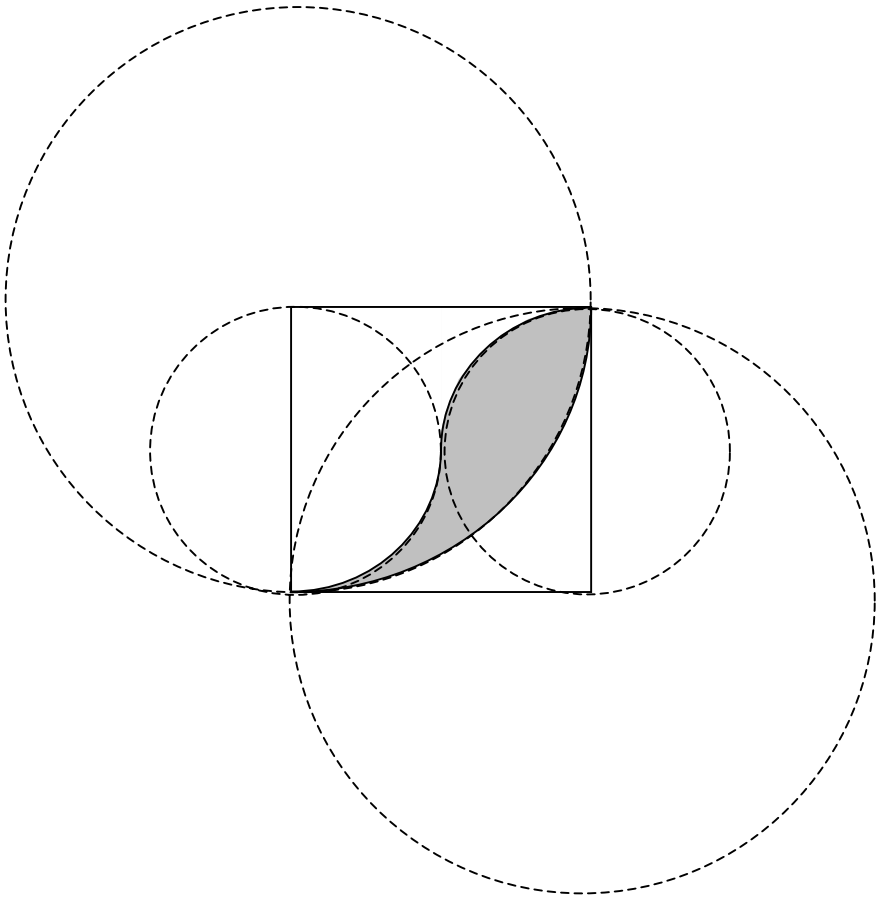


Figura 1

Y es claro que la zona sombreada es la mitad de la sombra de forma de hoja de la figura 2.

Para calcular esta área haremos:

- el área del cuadrado menos $\frac{1}{4}$ del área del circulo de radio 10 cm es: $10^2 - (1/4\pi\ 10^2)$, es decir, 21.46 cm^2.
- El área de la hoja es por tanto: $10^2 - 2\ (21.46)$, es decir 57.08 cm^2

La solución al problema es, como hemos razonado antes $\frac{57.08}{2}$, o lo que lo mismo, 28.54 cm

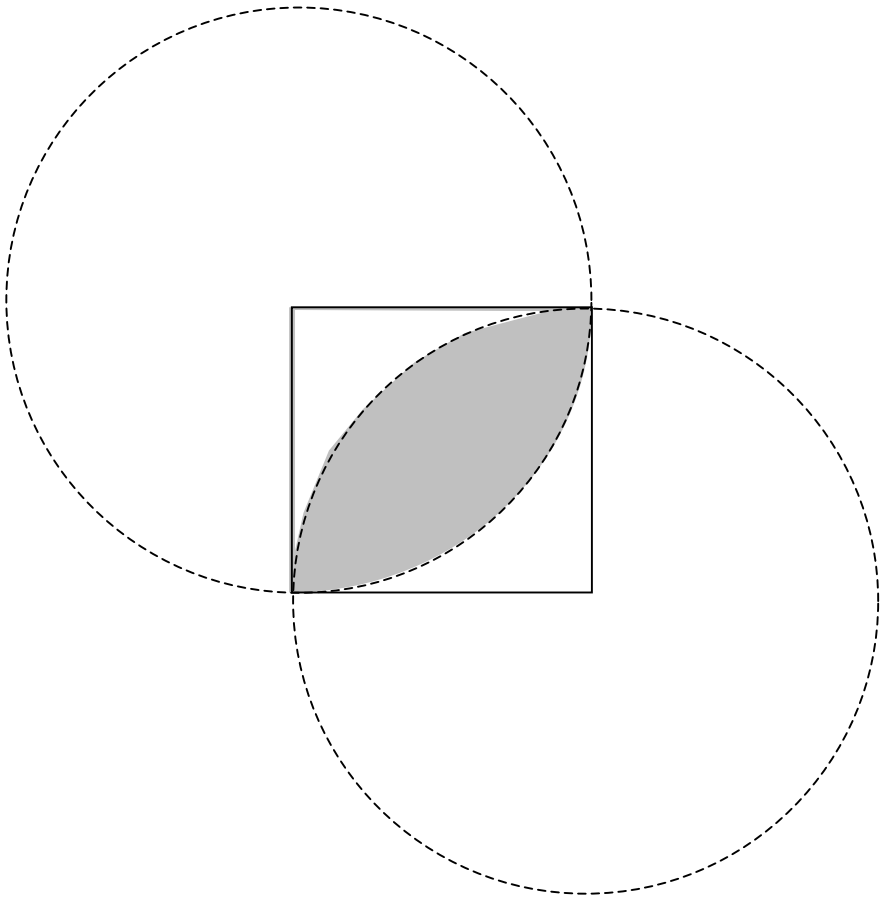


Figura 2

- **Solución - Fase 1 - (14/16) - CAPICUAS**

Un capicúa de 4 cifras tendrá la forma ABBA, es decir, tenemos que formar todos los números de la AB, que son 100.

Cada cifra aparecerá 10 veces y, al sumarlos, resultará:

$$10 . (0+1+2+...+9) = 450.$$

A no podrá tomar el valor 0, ya que entonces el número no tendrá cuatro cifras, por lo que habrá que excluir lo números de la forma 0,01,02,...,09.

Si los disponemos en columna para su suma, tendremos cuatro, dos que suman 450 y otras dos que suman 405.

Dado el valor posicional de las cifras, el total sumará :

$$450 + 4050 + 40500 + 450000 = 495000$$

Como el resultado ha sido 490776, el número que falta es el 4224.

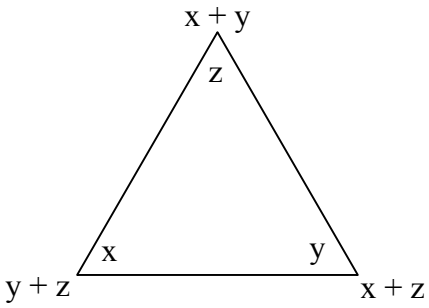
- **Solución - Fase 2 - (14/16) - NÚMEROS INVISIBLES**

Caso del triángulo.

Si sumamos los valores de los dos vértices adyacentes y a ese resultado le resto el valor del vértice que quiero hallar obtengo el doble del valor oculto del vértice buscado.

Por ejemplo si quiero saber el valor del vértice superior debo hacer:

$$(y + z) + (x + z) - (x + y) = 2z$$

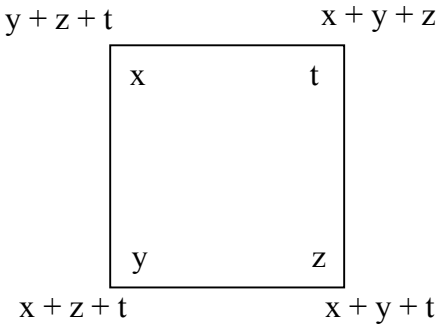


Caso del cuadrado.

Para conocer el valor de un vértice del cuadrado debo sumar los otros tres vértices visibles y a ese resultado restarle el doble del valor que aparece en el vértice buscado, así lo que obtengo es el triple de dicho valor.

Por ejemplo, Si quiero saber el valor del vértice superior derecho debo hacer:

$$(x + y + t) + (x + z + t) + (y + z + t) - 2 \cdot (x + y + z) = 3t$$



Caso general de la primera parte del enunciado.

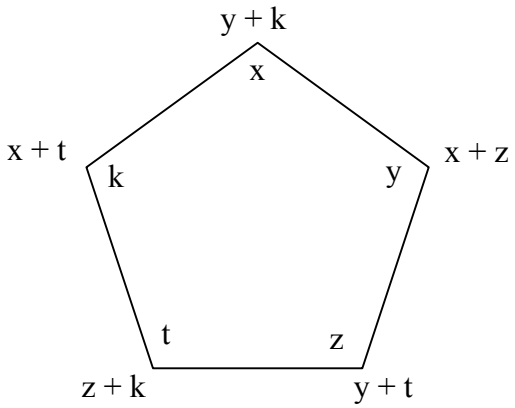
Por inducción podríamos decir que para un polígono de 137 vértices deberíamos de sumar los 136 valores visibles restantes, restar 135 veces el valor visible que hay en el vértice buscado y el resultado obtenido habrá que dividirlo por 136 para saber el número secreto.

Caso del pentágono

Ahora lo que hay que hacer es sumar el valor del vértice que buscamos con los adyacentes y restar los otros dos obteniendo el doble del valor secreto.

Por ejemplo si quiero saber el valor invisible del vértice superior debo hacer:

$$(y + k) + (x + t) + (x + z) - (z + k) - (y + t) = 2x$$



- **Solución - Fase 2 - (14/16) - LÁGRIMA CIRCULAR**

  Ver pagina 19.

- **Solución - Fase 2 - (14/16) - CAMINOS**

Podemos empezar por casos más sencillos:

```
    1
  1 2 1          hay 3 caminos 1-2

      1
    1 2 1
  1 2 3 2 1      hay  7 caminos 1-2-3
```

En el triángulo de 6 filas indicamos a continuación el número de caminos 1-2-3-4-5-6 que hay desde cada uno en el lado izquierdo:

1 camino	→						1					
5 caminos	→					1	2	1				
10 caminos	→				1	2	3	2	1			
10 caminos	→			1	2	3	4	3	2	1		
5 caminos	→		1	2	3	4	5	4	3	2	1	
1 camino	→	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

en este lado hay en total $1+5+10+10+5+1 = 2^5$ caminos.

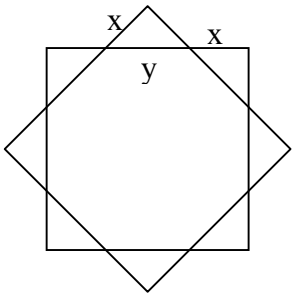
En el otro lado del triángulo ocurrirá lo mismo 2^5 caminos, luego, en total habrá $2 \cdot 2^5 - 1$ (repetimos el primer camino), es decir:

$$2^6 - 1$$

En general en un triángulo como éste pero de n filas habrá $2^n - 1$ caminos de la forma $1 - 2 - 3 - \ldots n$

- **Solución - Fase Final - (14/16) - COLUMNAS DE GAUDÍ**

Al ser una rotación de 45º de un cuadrado se genera un octógono estrellado con todos sus lados iguales e iguales a x:



Para calcular su área basta con sumar al área del cuadrado (1 m^2) las áreas de los cuatro triángulos rectángulos que se nos generan.

Tenemos que :

$$(1)\ 2x + y = 1$$

$$(2)\ 2x^2 = y^2 \text{ por ser triángulos rectángulos}$$

despejamos en (1) $y = 1 - 2x$ y sustituimos en (2) quedando la ecuación de segundo grado:

$$(3)\ 2x^2-4x+1 = 0$$

Resolvemos y obtenemos:

- $x_1=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y_1=-\sqrt{2}$. Que no es válida, obviamente.

- $x_2=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y_2=\sqrt{2}-1$. Que si es correcta.

Ahora calculamos la superficie de los cuatro triángulos rectángulos:

$$S = 4.\frac{x^2}{2} = 2x^2 = 2.\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 3-2\sqrt{2} \quad m^2$$

que sumados al metro cuadrado de área del cuadrado nos da la superficie total del octágono que es $4-2\sqrt{2}$ m^2.

Por último el volumen será:

$$V = 40.\left(4-2\sqrt{2}\right) = 160-80\sqrt{2} \quad m^3 \cong 46{,}863 \quad m^3$$

- **Solución - Fase Final - (14/16) – PUNTOS EN LA CIRCUNFERENCIA**

  Ver página 21.

- **Solución - Fase Final - (14/16) - COPO DE NIEVE**

Si partimos de un triángulo equilátero de área A:

- En la primera iteración obtenemos 3 triángulos de área A/9 cada uno.
- En la segunda iteración obtenemos 12 triángulos de área $A/9^2$.
- En la tercera iteración obtenemos 48 triángulos de área $A/9^3$.
- En la cuarta iteración obtenemos 192 triángulos de área $A/9^4$.

Y así sucesivamente, de manera que si sumamos todas las áreas parciales (número de triángulos por área de cada uno), tendremos la siguiente progresión:

$$3\cdot\frac{A}{9}, \quad 3\cdot\frac{4A}{9^2}, \quad 3\cdot\frac{4^2A}{9^3}, \quad ....., \quad 3\cdot\frac{4^{(N-1)}A}{9^N}$$

cuyo primer termino es $a_1= 3\cdot\frac{A}{9}$ y cuya razón es r = 4/9.

Si tenemos en cuenta la suma de los términos de una progresión geométrica ilimitada y decreciente es $S = \frac{a_1}{1-r}$, entonces dicha suma es:

$$\frac{3A}{9} : \frac{5}{9} = \frac{3A}{5}$$

Si a esto le añadimos el área del triángulo inicial obtenemos:

$$\frac{3A}{5} + A = \frac{8A}{5}$$

que es el área del "copo de nieve" que perseguíamos, en función del área del triángulo de partida A.

Dado que el área de un triángulo equilátero en función del lado es:

$$A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$

entonces el área del "copo de nieve" en función del lado es:

$$\frac{2\sqrt{3}}{5} l^2$$