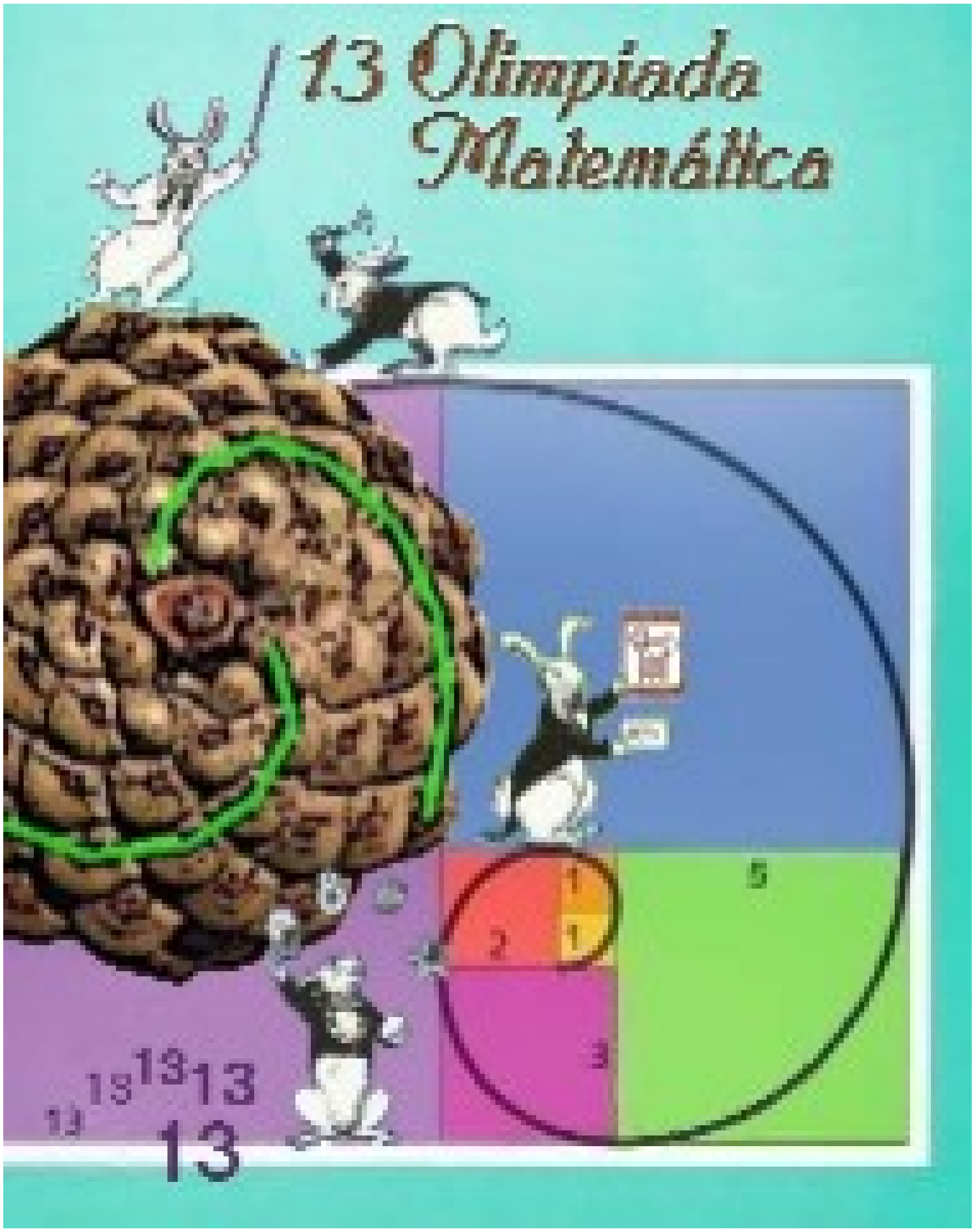


Enunciados y Soluciones a los Problemas

ISBN 84-689-0947-5
Depósito legal Albacete 129-2005

XIII Olimpiada

Hellín 2002

Nivel 12/14

Primera Fase

<u>F.1 (12/14) Problema 1.</u> DIVISIÓN CON SUERTE

¿Cuánto suman los primeros 100 dígitos que aparecen después de la coma al hacer 1/13? (1 dividido entre13) .

<u>F.1 (12/14) Problema 2.</u> MELONES

Un agricultor lleva melones en el maletero de su coche. Encuentra a tres amigos y les da, al primero, la mitad de las melones más dos; al segundo, la mitad de los que le quedan más dos y, al tercero, la mitad de los sobrantes más dos. Aún sobró un melón. ¿Cuántos llevaba al principio?

<u>F.1 (12/14) Problema 3.</u> PARTES IGUALES

Dividir un cuadrado en tres , cuatro, cinco, ... partes iguales. ¿Para qué casos existe más de una solución? Si en lugar de dividir el cuadrado en partes iguales tan sólo se requiere que las partes sean equivalentes, ¿existen otras soluciones?

<u>F.1 (12/14) Problema 4.</u> CORTAR EL PASTEL

Queremos dividir un pastel que tiene forma cilíndrica en partes iguales. Con un corte hacemos dos partes iguales y con dos cortes podemos hacer cuatro partes iguales.

- *¿Cómo lo hacemos para lograr ocho partes iguales con tan sólo tres cortes?*
- *¿Cuántas partes iguales se pueden hacer, como máximo, con 4, 5, 6... cortes?*

<u>F.1 (12/14) Problema 5.</u> UNA FAMILIA GATUNA

Las diferentes ramas de la familia Felinos se han reunido en una fiesta familiar. Jugando con unas balanzas han visto que:

- *4 gatos y 3 gatitos pesan 15 kg*

- *3 gatos y 4 gatitos pesan 13 kg*

¿Cuanto pesa cada gato y cada gatito por separado?

<u>F.1 (12/14) Problema 6.</u> EMBALDOSAR CON HEXÁGONOS

Se tiene un hexágono regular en el plano.

- *Operación 1: Se rodea colocando alrededor hexágonos iguales a él. Hay 1 + 6=7 hexágonos.*

- *Operación 2: Se rodea esta estructura con hexágonos iguales. Ahora hay 1+6+2x6=19 hexágonos.*

Se repite esta operación.

- *¿Cuántos hexágonos hay después de la operación 4?*

- *¿Puedes decir cuántos hay después de la operación 100? ¿Cuántos hay después de la operación n?*

Después de la operación n, queremos poner dos pesetas en cada vértice de orden 2 (es decir donde se corten dos aristas), y tres en cada uno de orden 3. ¿Cuántas pesetas en total necesitamos?

Segunda Fase

<u>F.2 (12/14) Problema 1.</u> VÉRTICES DE UN CUBO

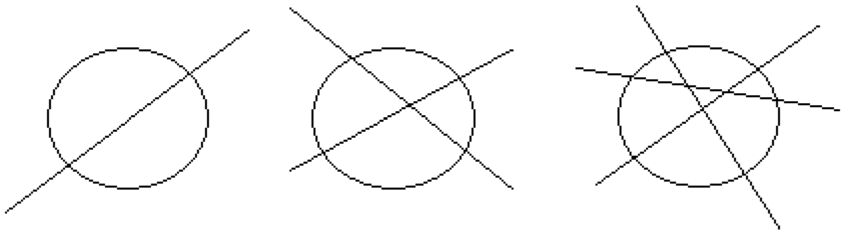
Numera los vértices de un cubo con los números del 1 al 8 de forma que, una vez hecho, los vértices de cada cara sumen lo mismo. Deduce primero cuánto tiene que valer esa suma. Cuéntanos qué estrategia has seguido.

<u>F.2 (12/14) Problema 2.</u> COMIDA RÁPIDA

Santiago Loso es capaz de comerse una tarta en 6 minutos. Carmelo Cotón es capaz de hacerlo en 9 minutos, y Evaristo "Kentavisto" lo hace lo hace en 15 minutos... Mira tu que "grassía" tiene la "cosssa". ¿Cuánto crees que tardarán en comérsela los tres juntos?.

<u>F.2 (12/14) Problema 3.</u> CORTANDO UN PASTEL

Se tiene un brazo de gitano de forma cilíndrica y se desean hacer ***n*** *cortes perpendiculares a sus bases de tal forma que se obtengan la* *mayor cantidad posible de raciones. Se sabe que un corte determina dos raciones; al hacer dos determinamos cuatro; con tres determinamos siete, como se muestra en la figura.*



La pregunta es ¿cuál es el número máximo de raciones que se pueden tener realizando n cortes de esta forma?.

Fase Final

<u>F.F (12/14) Problema 1.</u> LOS TRES SOMBREROS

Tres delincuentes, muy avispados e inteligentes, se encuentran ante un juez generoso que les propone el siguiente trato:

- *Aquí tengo tres sombreros blancos y dos negros, sin que vean el color, voy a poner un sombrero encima de la cabeza de cada uno de ustedes. Quién acierte el color de su sombrero quedará libre.*

Como es evidente, cada uno ve el somb rero de los otros dos, pero no el suyo. Por supuesto tampoco se les permite hablar entre ellos.

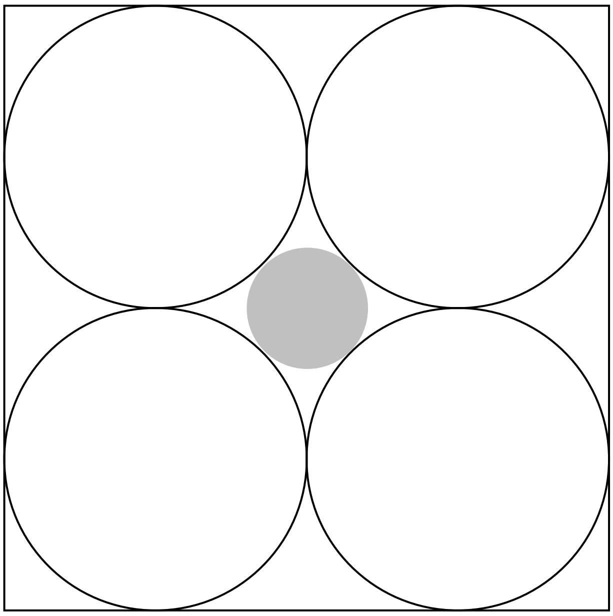
Una vez que el juez les ha colocado los sombreros, los presos se quedan u momento pensado y al cabo de un rato le dicen al juez:

- *Los tres tenemos el sombrero blanco.*

¿Cómo lo averiguaron sin lugar a duda?

<u>F.F (12/14) Problema 2.</u> CINCO FICHAS

Cuatro fichas circulares iguales se to can entre sí, tal y com o se ve en la figura. Averigua el radio de la mayor ficha con forma circular que puede colocarse en el hueco que dejan las cuatro.



<u>F.F (12/14) Problema 3.</u> BESOS Y ABRAZOS

Los Gómez y los López son familias num erosas, amigas entre sí, y todos muy efusivos. Un día se encuentr an por casualidad, paseando por el parque, y enseguida se produce entre el los el habitual intercambio de efusivos saludos. Los hombres de las respectivas familias se abrazan, las mujeres entre ellas y los hombres con las mujeres se besan. Al final del múltiple saludo se han intercambiado 35 abrazos y 42 besos.

¿Cuántos hombres y cuántas mujeres hay en cada familia?

Nivel 14/16

Primera Fase

<u>F.1 (14/16) Problema 1.</u> EL MODELO DE LA TORRE EIFFEL

La torre Eiffel de París tiene 300 metros de altura y está construida enteramente de hierro; su peso to tal es de 8.000.000 kg. Deseo encargar un modelo exacto de dicha torre, tambié n de hierro y que pese sólo 1 kg. ¿Qué altura tendrá? ¿Será mayor o menor que la de un vaso?

<u>F.1 (14/16) Problema 2.</u> EL FACTOR 3

Sabemos que 100 factorial (100!) es la cantidad que se obtiene del siguiente modo

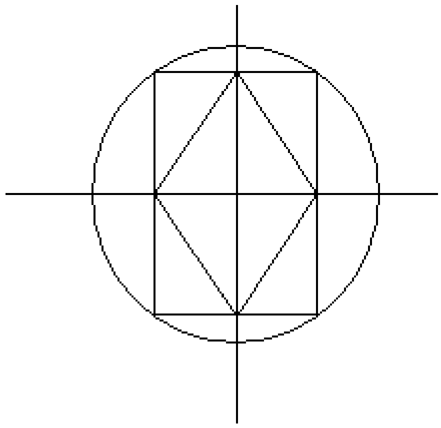
$100! = 100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot \ \ldots \ \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

Calcular el exponente de la potencia máxima de 3 que sea divisor de 100!

Resolver este problema para el factorial de n.

<u>F.1 (14/16) Problema 3.</u> UN ROMBO CURIOSO

En una circunferencia hemos inscrito un rectángulo y en él un rombo, tomando los puntos medios de los lados del rectángulo. Si el diámetro del círculo es de 10 cm, ¿cuánto mide el perímetro del rombo?



<u>F.1 (14/16) Problema 4.</u> BLANCO, RUBIO O CASTAÑO

Tres personas, de apellidos Blanco, Rubio y Castaño, se conocen en una reunión.

Poco después de hacerse las presentaciones, la dama hace notar:

- *"Es muy curioso que nuestros apellidos sean Blanco, Rubio y Castaño, y que nos hayamos reunido aquí tres personas con ese color de cabello".*
- *"Sí que lo es -dijo la persona que tenía el pelo rubio-, pero habrás observado que nadie tiene el color de pelo que corresponde a su apellido."*
- *"¡Es verdad!" -exclamó quien se apellidaba Blanco.*

Si la dama no tiene el pelo castaño, ¿de qué color es el cabello de Rubio?.

<u>F.1 (14/16) Problema 5.</u> TRES BOLAS

Para adjudicar un premio entre tres estudiantes se prepara una bolsa con dos bolas negras y una bola blanca. Los tres van sacando, por orden, una bola que no devuelven. Quien saque la bola blanca gana.

¿Quién lleva más ventaja: el primero, el segundo o el tercero?

<u>F.1 (14/16) Problema 6.</u> DIVIDIR TRIÁNGULOS

a) *¿Es posible dividir un triángulo equilátero en 4 triángulos equiláteros?*

b) *¿Es posible dividir un triángulo equilátero en 5 triángulos equiláteros?*

c) *Demostrar que cualquier triángulo equilátero se puede dividir en n triángulos equiláteros, para cualquier $n>5$.*

Segunda Fase

<u>F.2 (14/16) Problema 1.</u> RECTAS EN UN CUADRADO

En un cuadrado ABCD tenemos una recta que corta a los lados opuestos AB y CD en los puntos M y N . Trazamos ahora otra recta perpendicular a la anterior que corta a los otros dos lados AD y BC en los puntos P y Q. Demostrar que los segmentos MN y PQ tienen la misma longitud.

<u>F.2 (14/16) Problema 2.</u> EL VIAJE

Varias personas deciden realizar un viaje, para lo que alquilan un vehículo por 522 € . Convienen en pagar cada uno según el gasto que se hiciese. En el trayecto tres de ellos deciden quedarse. Los que terminaron el viaje tuvieron que pagar 29 € más que los que se quedaron.

¿Cuántas personas comenzaron el viaje?.

<u>F.2 (14/16) Problema 3.</u> NÚMEROS LECOS

Hartos de números perfectos que dan lugar a conjeturas, damos la primicia de los Lecos. "Un número Leco es aquel cuyo número de divisores (sin contar el 1) coincide con la última cifra del número". ¿Cuál es el primer número?.

Fuera de ser unos números complicados, son muy fáciles de encontrar si los clasificamos por la última cifra.

- ¿Cuáles son los números Lecos acabados en 1 (orden 1)?.

- ¿Y los acabados en 2 (orden 2)?

Para hallar los acabados en 3 hay que pensar un poco más, pero sigue siendo fácil, pues todos son muy semejantes entre sí... ¿Cuántos hay de orden 3, entre los 100 primeros números?.

Investiga los números L ecos que habría de orden 4, 5, etc. y si puedes trata de encontrar una regla general.

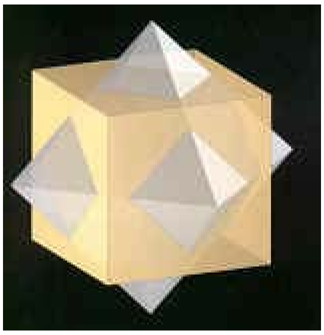
Fase Final

<u>F.F (14/16) Problema 1.</u> EL AÑO GAUDÍ

Este año se celebra el 150 aniversario del nacimiento del genial arquitecto Antoni Gaudí*, impulsor de la renovación del lenguaje arquitectónico a través de la corriente que se llamó modernismo catalán.*

En muchas de sus obras observamos maclas formadas con los poliedros regulares y la esfera, como los pináculos de los campanarios en las fachadas del Nacimiento y de la Pasión de la Sagrada Familia.

La imagen de la macla del cubo y el octaedro, es también un ejemplo de la dualidad entre los dos poliedros. Aumentando y disminuyendo mentalmente el tamaño del octaedro se obtienen las dos figuras sobre las que te vamos a preguntar.

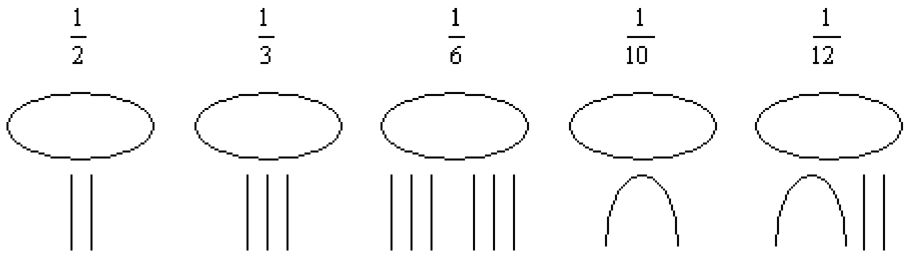


DISMINUIR: ¿Que relación hay entre el volumen del cubo y del octaedro cuando los vértices del octaedro están justamente en el centro de las caras del cubo?

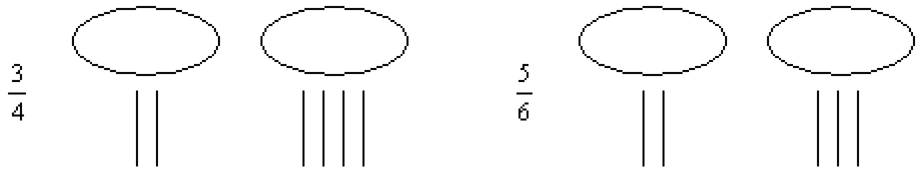
AUMENTAR: ¿ Que relación hay entre el volumen del cubo y del octaedro cuando las aristas del octaedro cortan justamente por los puntos medios de las aristas del cubo?

<u>F.F (14/16) Problema 2.</u> FRACCIONES EN EGIPTO

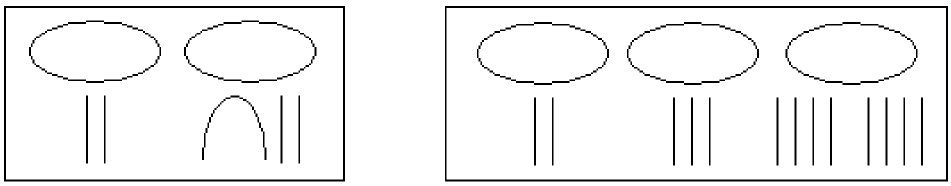
En Egipto se usaban fracciones con numerador igual a la unidad, que se representaban así:



Las fracciones con numerador distinto de la unidad las expresaban como suma de fracciones del tipo anterior:



- *¿Qué fracciones son las siguientes?:*



- *¿Cómo escribían los egipcios las fracciones siguientes?*

$$\frac{4}{7}, \frac{5}{8} \quad y \quad \frac{5}{9}$$

- *¿Podrías encontrar una manera de expresar cualquier fracción como suma de fracciones egipcias diferentes?*

<u>F.F (12/14) Problema 4.</u> CORTANDO UN QUESO

Tenemos un trozo de queso en forma de paralelepípedo rectángulo. Queremos hacer n cortes de cualquier forma, pero de modo que determinen la mayor cantidad posible de raciones.

Se sabe que con un corte se determinan dos raciones y con tres ocho. ¿Cuál es el número máximo de raciones que se tendrán realizando n cortes?

Soluciones

- **Solución - Fase 1 - (12/14) - DIVISIÓN CON SUERTE**

  Haciendo la división de 1 entre 13 se obtiene:

  $$1:13=0.07692307692307...$$

  de manera que hay seis cifras, cuya suma es 27, que se repiten indefinidamente.
  Por tanto para calcular la suma pedida basta con calcular cuantos grupos de seis se pueden hacer con 100 elementos, es decir, dividir 100 entre 6, así se obtiene que $100 = 16*6+4$.

  Por lo tanto debemos sumar 16 veces 27 y añadir la suma de los cuatro primeros dígitos que se repiten, en consecuencia el resultado será:

  $$16*27 + (0+7+6+9) = 432 + 22 = 454$$

- **Solución – Fase 1 – (12/14) – MELONES**

  Al primer amigo le dimos:

  la mitad + 2

  Por lo tanto quedaron:

  todo – (la mitad + 2) = todo – la mitad – 2 = la mitad – 2

  Al segundo amigo le dimos:

  la mitad de (la mitad – 2) + 2 = un cuarto – 1 + 2 = un cuarto + 1

  Por lo que quedaron:

  (la mitad – 2) – (un cuarto + 1) = un cuarto –2 – 1 = un cuarto – 3

  Por último, al tercer amigo le dimos:

  la mitad de (un cuarto – 3) + 2= un octavo – 1.5 +2 = un octavo + 0.5

  Y entonces quedaron:

  (un cuarto – 3) – (un octavo + 0.5) = un octavo – 3.5

Es decir, que un octavo del total de melones menos tres y medio es igual a 1:

$$\frac{\textit{total de melones}}{8} - 3.5 = 1$$

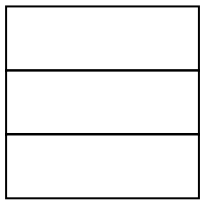
operando se obtiene

$$\frac{\textit{total de melones}}{8} = 4.5$$

es decir que el *total de melones* = 8*4.5 = 36

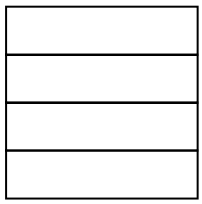
- **Solución - Fase 1 - (12/14) - PARTES IGUALES**

Tres partes iguales:



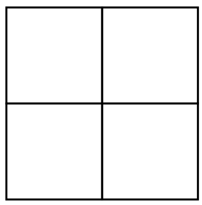
Fácil, usando 1*3 = 3

Cuatro partes iguales:

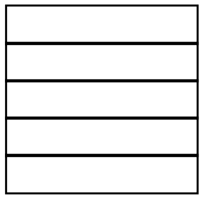


También sencillo, usando ahora 1*4 = 4

Aunque también podríamos haber usado 2*2 = 4

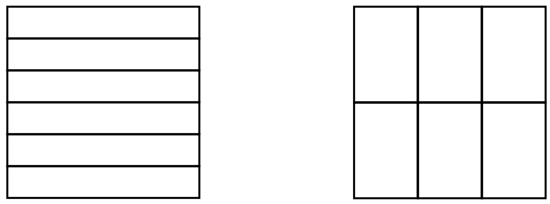


Para cinco partes también es fácil, usando 1*5 = 5



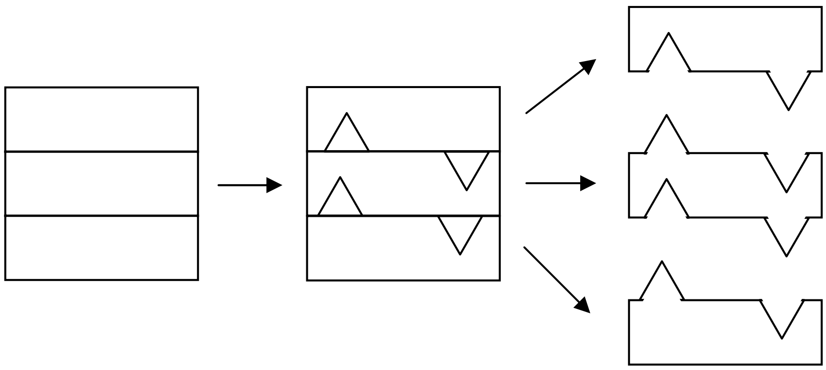
Si ahora lo intentamos para el caso de seis partes, vemos que hay posibilidades ya que: 1*6 = 6 y 2*3 = 6...

XIII OLIMPIADA



Como vemos, existe más de una solución en el caso de que el número de partes en las que queremos dividir el cuadrado no sea primo.

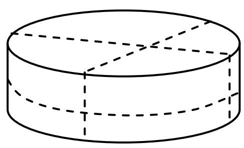
Veamos que ocurre con la división del cuadrado en tres partes en el caso de partes equivalentes, es decir, del mismo tamaño:



Por el procedimiento que ves en la figura hemos obtenido tres piezas equivalentes en las que dividir el cuadrado, aplicándolo con figuras diferentes al triángulo se obtendrán resultados diferentes, prueba a utilizar este procedimiento en otros casos.

- **Solución - Fase 1 - (12/14) - CORTAR EL PASTEL**

a) Podemos conseguir ocho partes iguales haciendo uso de dos cortes verticales y uno horizontal, tal y como se muestra en la figura:



b) El número de partes iguales que se obtienen al hacer una cierta cantidad de cortes depende de la cantidad de cortes verticales y de cortes horizontales que se den, de manera que el número de trozos obtenido será:

$$\text{nº de trozos} = 2 * (\text{cortes v}) * (\text{cortes h} + 1)$$

siendo sencillo construir la siguiente tabla:

cortes v / cortes h	1	2	3	4	5	6	7
1	4	8	12	16	20	24	28
2	6	12	18	24	30	36	42
3	8	16	24	32	40	48	56
4	10	20	30	40	50	60	70
5	12	24	36	48	60	72	84
6	14	28	42	56	70	84	98
7	16	32	48	64	80	96	112

de forma que, ordenando por el número de cotes obtenemos la tabla:

nº cortes							
2	4						
3	6	8					
4	8	12	12				
5	10	16	18	16			
6	12	20	24	24	20		
7	14	24	30	32	30	24	
8	16	28	36	40	40	36	28
....	....						

de donde se obtiene la secuencia de valores máximos:

4,8,12,18,24,32,40,...

si observamos como se obtiene cada término a partir del anterior tenemos:

$$4 \xrightarrow{+4} 8 \xrightarrow{+4} 12 \xrightarrow{+6} 18 \xrightarrow{+6} 24 \xrightarrow{+8} 32 \xrightarrow{+8} 40 \xrightarrow{+10} .....$$

si tomamos los términos impares: 4, 12, 24, 40, ... ; obtenemos la secuencia:

$$4 \xrightarrow{+8} 12 \xrightarrow{+12} 24 \xrightarrow{+16} 40 \xrightarrow{+20} .....$$

de modo que, la secuencia de valores que se suman en cada paso es:

término 1 = 8
término 2 = 8 + 4
término 3 = 8 + 4 + 4
término 4 = 8 + 4 + 4 + 4
....
término n = 8 + 4 + 4 + 4 + $\overset{n-1)}{.........}$+ 4

de donde podemos obtener los términos impares:

Término Impar 1 = 4
Término Impar 2 = 4 + (termino 1) = 4 + 8
Término Impar 3 = 4 + (termino 1) + (termino 2) = 4 + (8) + (8+4)
Término Impar 4 = 4 + (8) + (8+4) + (8+4+4)
Término Impar 5 = 4 + (8) + (8+4) + (8+4+4) + (8+4+4+4)
Término Impar 6 = 4 + (8) + (8+4) + (8+4+4) + (8+4+4+4) + (8+4+4+4+4)
....
Término Impar n = 4 + (8) + (8+4) + (8+4+4) + ...+ (8+4+4+$\overset{n-2)}{\dots\dots\dots}$+4)

reordenando los elementos de (Término Impar n) resulta que:

Termino Impar n = 4 + 8(n-1) + 4(n-2) + 4(n-3) + ... + 4

y dando la vuelta a esta expresión tenemos:

Termino Impar n = 4 + 8(n-1) + 4 + 4.2 + 4.3 + ... + 4.(n-3) + 4.(n-2)

sacando factor común y aplicando la fórmula de la suma de los n primeros números naturales obtenemos que (Término n) es:

$$4 + 8(n-1) + 4.\frac{1+(n-2)}{2}.(n-2)$$

ahora hay que hacer unas sencillas operaciones para obtener:

Termino Impar n = 2n(n + 1)

recordemos que esta fórmula se ha obtenido para términos impares, por ello tenemos que transformar la asignación de términos a valores de n, si llamamos k al valor que aplicamos, la correspondencia será:

Valor de k		Valor de n
1	....	1
3	....	2
5	....	3
7	....	4
...		...

luego $n = \frac{k+1}{2}$, y resulta entonces que:

$$\text{Termino k} = 2\ \frac{k+1}{2}\left(\frac{k+1}{2}+1\right), \text{ con k impar;}$$

haciendo ahora una sencilla operación obtenemos:

$$\text{Termino k} = \frac{(k+1)(k+3)}{2}, \text{ con k impar;}$$

podemos comprobar el funcionamiento de esta formula, pero sólo es válida para los términos impares de nuestra sucesión de números, pero, si nos fijamos bien, cada término par se obtiene sumando al término impar anterior el elemento correspondiente de la sucesión:

4, 6, 8, 10, ...

de forma que estos terminillos se obtiene así:

terminillo 1 = 4
terminillo 2 = 4 + 2
terminillo 3 = 4 + 2 + 2
terminillo 4 = 4 + 2 + 2 + 2
....
terminillo n = 4 + (n-1).2 = 2n+2

regresando entonces a nuestros Términos, resulta que:

Término 1 = Término Impar 1
Término 2 = Término Impar 1 + terminillo 1
Término 3 = Término Impar 2
Término 4 = Término Impar 2 + terminillo 2
Término 5 = Término Impar 3
Término 6 = Término Impar 3 + terminillo 3
Término 7 = Término Impar 4
Término 8 = Término Impar 4 + terminillo 4
....
Término (2n-1) = Término Impar n
Término (2n) = Término Impar n + terminillo n

es decir, que si tomamos un valor par, tendremos:

$$\text{Término k} = \text{Término(k-1)} + \text{terminillo}\left(\frac{k}{2}\right), \text{ con k par;}$$

sustituyendo las expresiones asociadas en cada caso obtenemos:

$$\frac{((k-1)+1)((k-1)+3)}{2}+4+\left(\frac{k}{2}-1\right).2$$

XIII OLIMPIADA

haciendo operaciones se obtiene:

$$\frac{k.(k+2)}{2}+2+k$$

y simplificando esta expresión:

$$\text{Término k} = \frac{(k+2)^2}{2}\text{, con k par;}$$

Resumiendo: con *k* cortes hechos sobre un pastel obtendremos, como máximo, un total de....

- $\dfrac{(k+1)(k+3)}{2}$ partes, si *k* es impar,
- $\dfrac{(k+2)^2}{2}$ partes, si *k* es par.

- **Solución - Fase 1 - (12/14) - UNA FAMILIA GATUNA**

Para abordar la resolución de este problema supondremos que todos los gatitos tienen el mismo peso y que lo mismo ocurre con todos los gatos.

Entonces resulta que:

$$\begin{aligned} 4\ gatos + 3\ gatitos &= 15 \\ 3\ gatos + 4\ gatitos &= 13 \end{aligned}$$

si en la segunda expresión sumamos un gato a cada miembro de la igualdad obtenemos:

$$4\ gatos + 3\ gatitos + gatito = gato + 13$$

es decir:

$$15 + gatito = gato + 13$$

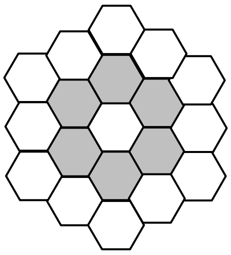
luego, tenemos que *gatito* + 2 = *gato*, es decir, un gato pesa dos kilos más que un gatito, tomando ahora la primera de las dos expresiones iniciales:

$$4\ (gatitos + 2) + 3\ gatitos = 15$$

operando resulta que 7 *gatitos* pesan 7 kilos, por lo tanto, cada *gatito* pesa 1 kilo, y como cada gato pesa dos kilos más que un gatito, un gato pesará 3 kilos.

- **Solución - Fase 1 - (12/14) - EMBALDOSAR CON HEXÁGONOS**

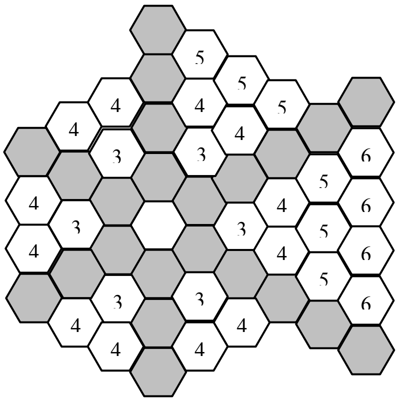
Veamos una introducción gráfica:



como puede apreciarse, la cantidad de hexágonos que se añade en cada paso es:

paso 1: 1
paso 2: 6
paso 3: 12

fijándonos en el modo de generación de una nueva capa, vemos que hay seis hexágonos que se introducen siguiendo la "línea" de los seis marcados en gris en la figura precedente, y entre cada par de estos seis se introduce uno en la tercera capa, dos en la cuarta, tres en le quinta, etc; esta distribución queda reflejada en la imagen siguiente, en la que se ha adjudicado a dada hexágono el número de la capa a la que corresponde:



por lo tanto, la cantidad de hexágonos que se añade en cada capa será:

Hpaso1------------1
Hpaso2------------6
Hpaso3------------6 + 6
Hpaso4------------6 + 6.2
Hpaso5------------6 + 6.3
Hpaso6------------6 + 6.4
... .
Hpaso$n$------------6 + 6.(n – 2)

Por lo tanto ya tenemos la respuesta a la primera pregunta: en el paso cuarto tendremos: 1 + 6 + 12 + 18 = 37 baldosas.

En el caso de 100 operaciones tendremos: 1 + 6 + 12 + 18 + ... hasta llegar a 100, se trata ahora de sumar lo hexágonos que se obtienen en todos esos pasos, es decir:

$$\text{Nº Hexágonos}(100) = 1 + 6 + 12 + \ldots + 594$$

lo cuál , en principio, no resulta difícil, aunque si pesado, vamos a intentar resolver el problema en general, para después aplica el resultado al caso 100, para ello utilizamos la fórmula que nos sirvió para definir los hexágonos que se añaden en cada paso:

$$\text{Nº Hexágonos}(n) = 1 + (6 + 6) + (6 + 6.2) + \ldots + (6 + 6(n - 2))$$

ahora agrupando los primeros operandos de cada paréntesis, que son seises, y sancando factor común seis en los segundos operandos tenemos:

$$1 + 6.(n - 2) + 6.(1 + 2 + \ldots + (n - 2))$$

y utilizando la fórmula de la obtención de la suma de los n primeros números naturales:

$$1 + 6.(n - 2) + 6.\ \frac{1 + (n - 2)}{2}.(n - 2)$$

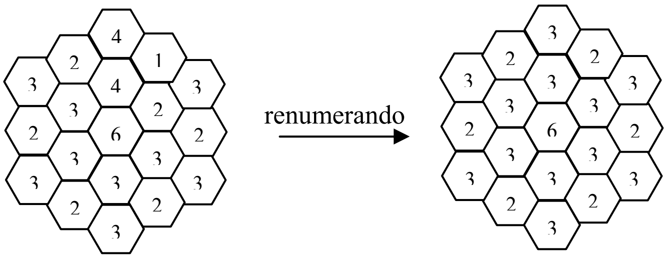
de donde, operando:

$$\text{Nº Hexágonos}(n) = 3.\ n^2 - 3.n + 1$$

cambiando ahora el valor 100 en esta expresión resulta que l número de hexágonos tras cien operaciones es: 3. 10000 – 300 + 1; lo que realizando las operaciones nos da un total de 27701 hexágonos.

Nos queda aún por resolver la cuestión del dinero en el caso de n operaciones, para ello en primer lugar determinaremos el número de vértices que hay en el paso n, así como cuántos son de orden dos y cuántos de orden tres. Para ello veremos cuántos vértices se añaden en cada paso.

En el primer paso hay 6 vértices. En el segundo cada nuevo hexágono incorpora cuatro vértices, pero en todos ellos excepto en el primero y el en el último, uno de esos cuatro vértices ya ha sido incorporado por el hexágono anterior, además, el último hexágono únicamente incorpora dos nuevos vértices, en total, en este segundo paso se incorporan 3 vértices por cada nuevo hexágono.
En la figura adjunta podemos ver el resultado de esta cuenta para el paso 3, cada hexágono ha sido marcado con el número de vértices que incorpora, para después sufrir una “renumeración”.

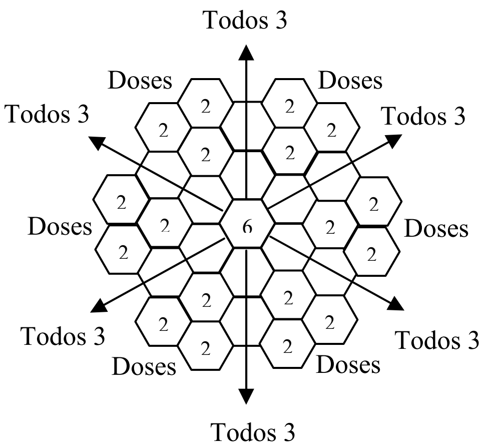


De forma que se disminuye en una unidad a los hexágonos con valor 4 y aumentando en esa unidad al correspondiente hexágono precedente:

Si avanzamos un paso más podemos observar la siguiente distribución de valores: 4, 2, 2, 3, 2, 2, 3, 2, 2, 3, 2, 2, 3, 2, 2, 3, 2, 1; y renumerando el cuatro y el uno obtenemos:

3, 2, 2, 3, 2, 2, 3, 2, 2, 3, 2, 2, 3, 2, 2, 3, 2, 2

En la serie siguiente tendremos: 3, 2, 2, 2, 3, 2, 2, 2, 3, 2, 2, 2, 3, 2, 2, 2, 3, 2, 2, 2, 3, 2, 2, 2; y extendiendo esta distribución, resulta que la



estructura general que aparece es la que puede observarse en la figura siguiente:
De esta forma las secuecias de la cantidad de vértices que se añaden en cada paso son:

Vpaso1: 6
Vpaso2: 3, 3, 3, 3, 3, 3.
Vpaso3: 3, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2.
Vpaso4: 3, 2, 2, 3, 2, 2, 3, 2, 2, 3, 2, 2, 3, 2, 2, 3, 2, 2.
Vpaso5: 3, 2, 2, 2, 3, 2, 2, 2, 3, 2, 2, 2, 3, 2, 2, 2, 3, 2, 2, 2, 3, 2, 2, 2.
... .
Vpaso*n*: 3, 2,..$^{n-2}$..,2, 3, 2,.$^{n-2}$..,2, 3, 2,.$^{n-2}$..,2, 3, 2,.$^{n-2}$..,2, 3, 2,.$^{n-2}$..,2, 3, 2,.$^{n-2}$..,2,

Luego, de forma similar a como obtuvimos el número de hexágonos, resulta que:

Vpaso1 ------------- 6
Vpaso2 ------------- 6.3
Vpaso3 ------------- $6.3 + 6.2$
Vpaso4 ------------- $6.3 + 6.2^2$
Vpaso5 ------------- $6.3 + 6.2^3$
Vpaso6 ------------- $6.3 + 6.2^4$
... .
Vpaso$n$ ------------- $6.3 + 6.2^{(n-2)}$

De este modo, la cantidad de vértices tras n operaciones, que denotaremos Vértices(n) será Vpaso1 + Vpaso2 + ...Vpaso$n$, es decir:

$$\text{Vértices}(n) = 6 + 6.3\,(n-1) + 6.(2 + 2^2 + \ldots + 2^{(n-2)})$$

es decir:

$$\text{Vértices}(n) = 6.3\,(n-1) + 6.(1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{(n-2)})$$

ahora bien, si llamamos $H = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{(n-2)}$; tenemos que:

$$2.H = 2 + 2^2 + \ldots + 2^{(n-2)} + 2^{(n-1)}$$

ahora, sumamos 1 a esta expresión, y resulta:

$$1+2H = H + 2^{(n-1)}$$

de donde resulta que $H = 2^{(n-1)} - 1$. Luego:

$$\text{Vértices}(n) = 6.3\,(n-1) + 6.(\,2^{(n-1)} - 1)$$

y operando llegamos a:

$$\text{Vértices}(n) = 3.2^n + 18.n - 24$$

En la última capa están los vértices de orden 2, y teniendo en cuenta que:

- por cada hexágono de la última capa que proviene de la línea “Todos 3” hay dos vértices de orden 2
- por cada uno de los hexágnos de la última capa que proviene de la zona “Doses” hay un vértica de orden 2

resulta que:

$$\text{Vértices\_orden2}(n) = 6.2 + 6.(n-2) = 6.n$$

y calculamos los vértices de orden 3 restando esta cantidad al númenro total de vértices:

$$\text{Vértices\_orden3}(n) = \text{Vértices}(n) - \text{Vértices\_orden2}(n)$$

sustituyendo:

$$\text{Vértices\_orden3}(n) = 3.2^n + 18.n - 24 - \ 6.n = 3.\ 2^n + 12.n - 24$$

Por tanto, la cantidad de pesetas que necesitamos es:

$$\text{Pesetas} = 2.(6.n) + 3.(\ 3.\ 2^n + 12.n - 24)$$

operando obtenemos:

$$\text{Pesetas} = 9.2^n \ + 48\ n - 72$$

- **Solución - Fase 2 - (12/14) - VÉRTICES DE UN CUBO**

En primer lugar deduciremos cuál tiene que ser el valor resultado de la suma de los números situados en los cuatro vértices de cada cara.

Para ello si suponemos que tenemos situados los números en los vértices y que sumamos las caras y después los resultados de estas seis sumas, cada vértice aparecerá tres veces y el resultado será 108, es decir:

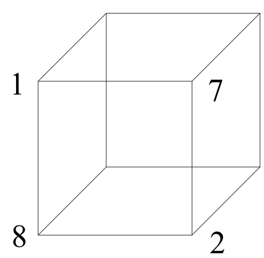
$$3.(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8) = 108$$

Como cada cara debe sumar una cantidad C, tendremos que:

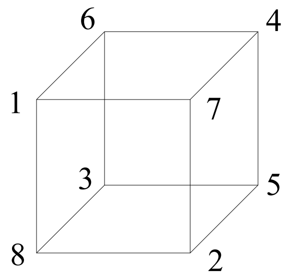
$$6.C = 108$$

luego la cantidad que deben sumar los cuatro vértices de cada cara es 18.

Teniendo en cuenta que las parejas de números que suman 9 (la mitad de 18) son: 1+8, 2+7, 3+6, y 4+5; podemos comenzar colocando el 1 y el 8 (por ejemplo), y después el 2 y el 7, evitando el 8 y el 7 en vértices consecutivos:



Por último, utilizando el método de ensayo y error, no es difícil colocar el resto de los números, siendo la siguiente una posible solución:

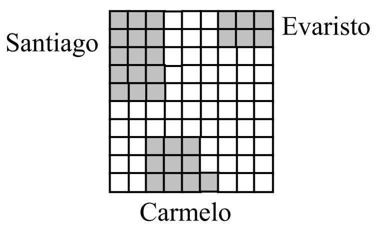


- **Solución - Fase 2 - (12/14) - COMIDA RÁPIDA**

Veamos en primer lugar cuánto comen los tres juntos en un minuto:

- Santiago Loso se come la tarta en 6 minutos, por tanto en un minuto se comerá la sexta parte, es decir, $\frac{1}{6}$ de tarta.
- Carmelo Cotón come la tarta en 9 minutos, por tanto en un minuto se comerá la novena parte, es decir, $\frac{1}{9}$ de tarta.
- Evaristo Ketanvisto se come la tarta en 15 minutos, por tanto en un minuto se comerá la quinceava parte, es decir, $\frac{1}{15}$ de tarta.

Como $6 = 3.2$; $9 = 3^2$ y $15 = 3.5$; el mínimo común múltiplo de 6, 9 y 15 es: $mcm(6,9,15) = 2.3^2.5 = 90$.
Luego, si partimos la tarta en 90 trozos iguales, Santiago se come $\frac{90}{6} = 15$ trozos en un minuto, Carmelo $\frac{90}{9} = 10$ trozos y Evaristo $\frac{90}{15} = 6$ trozos, tal y como se ilustra en la figura siguiente:



Por tanto, entre los tres se han comido 31 trozos en un minuto, por lo que podemos formar la siguiente tabla de proporciones:

1 minuto	31 trozos		60 segundos	31 trozos
2 minutos	62 trozos		6 segundos	3’1 trozos
3 minutos	93 trozos		0’6 segundos	0’31 trozos
			0’2 segundos	0’10333...

De los valores que podemos observar en la tabla se deduce que tardarán algo menos de 3 minutos, ya que en ese tiempo se comerían 93 trozos y la tarta tiene tan sólo 90.

Más concretamente, vemos que tardarían 6 segundos en comerse 3’1 trozos, es decir, como sobran tres trozos, tardarán en comerte la tarta algo más de 2 minutos y 54 segundos. Ese tiempo de más será lo que tarden en comerse la décima parte de un trozo de tarta, pero eso es muy poco, bastante menos de un segundo, porque según la tabla en 0’2 segundos se comen 0’10333.... trozos de tarta.

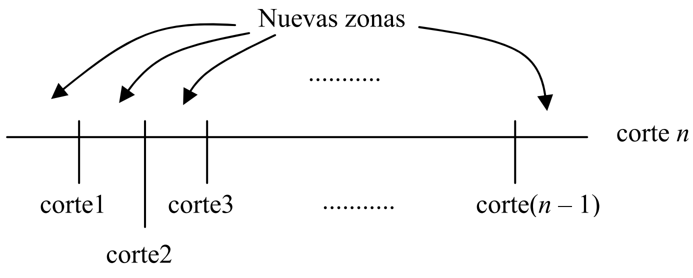
En resumen, podemos tomar como resultado válido 2 minutos y 54 segundos y decir que el resultado exacto será un poco más (siendo menor que 2 minutos y 55 segundos).
Si queremos una mayor proximidad podemos tomar como resultado válido 2 minutos y 54’2 segundos y añadir que el resultado exacto será un poco inferior a ese valor (siendo mayor que 2 minutos y 54’1 segundos).

- **Solución - Fase 2 - (12/14) – CORTANDO UN PASTEL**

Veamos cuál es la sucesión de trozos en función del número de cortes:

corte1-----------------2
corte2-----------------4
corte3-----------------7

Podemos observar que, para que el número de trozos obtenido con cada nuevo corte sea máximo, éste debe cortar a todos los cortes anteriores, es decir, que esquemáticamente la situación será:



es decir, que con el corte n aparecen n nuevar zonas, luego la sucesión será:

corte1-----------------2
corte2-----------------2 + 2
corte3-----------------2 + 2 + 3
....
corte n----------------2 + 2 + 3 + ...+ n

ahora, aplicando la fórmula de la suma de los n primeros números naturales, tenemos:

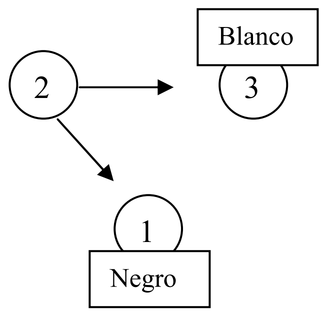
$$2 + 2 + 3 + ...+ n = 1 + (1 + 2 + 3 + ...+ n) = 1 + \frac{1+n}{2}.n$$

y operando:

$$\text{corte } n = \frac{n^2 + n + 2}{2}$$

- **Solución - Fase Final - (12/14) - LOS TRES SOMBREROS**

Pongámonos en la situación del primer reo, éste ve que los otros dos tienen sobre sus cabezas un sombrero Blanco, entonces puede razonar del modo siguiente:

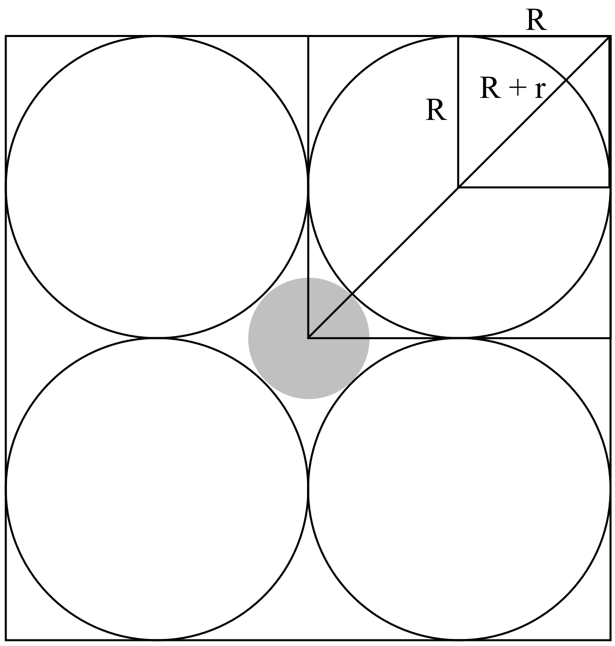


- Si sobre mi cabeza hubiera un sombrero negro entonces mi compadre 2 vería un sombrero blanco sobre 3 y uno negro sobre mi, tal y como se muestra en la figura adjunta.
- En ese caso 2, que es muy listo, pensaría....
  "Si yo tuviese un sombrero negro, mi compadre 3 adivinaría automáticamente que el suyo es blanco, puesto que el juez sólo tiene dos sombreros negros, pero no lo ha hecho ¡con lo listo que es!, la única explicación es que mi sombrero es Blanco"
- Igual podría razonar 3 y averiguar fácilmente el color de su sombrero.
- Pero... ¡ninguno de los dos lo ha hecho!, y la única explicación posible es que mi sombrero debe ser también Blanco

Partiendo de la hipótesis de que los tres delincuentes son igual de avispados, los tres habrán realizado este mismo razonamiento al mismo tiempo, lo que explica el hecho de que los tres le den al juez la respuesta correcta a la vez.

- **Solución - Fase Final - (12/14) - CINCO FICHAS**

Para resolver este problema supondremos que conocemos el valor del radio de las fichas circulares de mayor tamaño, llamémosle R.
Llamemos r al radio de la ficha circular pequeña que queremos situar entre las otras cuatro, a partir del dibujo inicial podemos obteber el siguiente:



de forma que aplicando el teorema de Pitágoras tenemos:

$$(R + r)^2 = 2.R$$

luego será: $R + r = \sqrt{2}\,.R$; de donde resulta que $r = R.\left(\sqrt{2} - 1\right)$.

- **Solución - Fase Final - (12/14) - BESOS Y ABRAZOS**

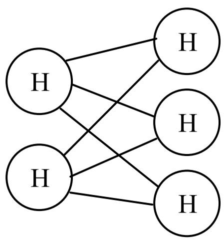
  Para abordar la resolución de este problema, nos plantearemos antes uno más sencillo, suponiendo que los López y los Gómez no son familias tan numerosas.

  <u>Caso sencillo</u>: supongamos que los Gómez son 2 Hombres y 3 Mujeres, y que los López son 3 Hombres y 2 Mujeres, lo que escribiremos así:

  $$\text{Gómez} = \{2H,3M\} \;;\; \text{López} = \{3H,2M\}$$

  Veamos la cantidad de abrazos y besos que nos salen en este caso:

  - Abrazos entre hombres: multiplicando el número de hombres de cada familia salen 6 abrazos, la imagen siguiente ilustra esta situación.



  - Abrazos entre mujeres: razonando como en el punto anterior salen otros 6.

- Besos entre hombres de los Gómez y mujeres de los López: 4.
- Besos entre mujeres de los Gómez y hombres de los López: 9.

<u>Caso general</u>: si suponemos ahora que Gómez = {xH,yM} ; López = {zH,tM}, el planteamiento será:

- Abrazos entre hombres: x.z
- Abrazos entre mujeres: y.t
- Besos entre hombres de los Gómez y mujeres de los López: x.t
- Besos entre mujeres de los Gómez y hombres de los López: y.z

de donde tendremos:

$$\left.\begin{array}{rcl} x.t + y.z & = & 42 \\ x.z + y.t & = & 35 \end{array}\right. \quad (1)$$

ahora sumando término a término estas dos expresiones:

$$x.z + y.t + x.t + y.z = 77$$

sacando factor común *x* del primer y tercer término e *y* del segundo y cuarto, y después (*z* + *t*) de los dos términos resultantes, obtenemos:

$$(x+y)(z+t) = 77$$

ahora como 77=7.11, únicamente hay dos posibilidades coherentes:

$$\begin{array}{lcl} x+y=7 & \text{ó} & x+y=11 \\ z+t=11 & & z+t=7 \end{array}$$

Ahora restando término a término en la expresión (1) obtenemos:

$$x.t - x.z + y.z - y.t = 7$$

sacando factor común de modo similar a como se hizo anteriormente:

$$(x-y)(t-z) = 7$$

y como 7=1.7, únicamente hay dos posibilidades:

$$\begin{array}{lcl} x-y=1 & \text{ó} & x-y=7 \\ t-z=7 & & t-z=1 \end{array}$$

veamos ahora cuales son las combinaciones posibles para estas opciones:

Caso A: $\left.\begin{cases} x+y=7 \\ x-y=1 \end{cases}\right\}$ y $\left.\begin{cases} t+z=11 \\ t-z=7 \end{cases}\right\}$

tomando el primero de los sistemas, $\left.\begin{cases} x+y=7 \\ x-y=1 \end{cases}\right\}$, si sumamos término a término obtenemos:

$$2.x = 8$$

de donde: $x = 4$, $y = 3$.

tomando ahora el segundo sistema, $\left.\begin{cases} t+z=11 \\ t-z=7 \end{cases}\right\}$, si, de nuevo, sumamos término a término obtenemos:

$$2.t = 18$$

de donde: $t = 9$, $z = 2$.

Por lo tanto, una posible solución es: los Gómez son 4 hombres y 3 mujeres, mientras que los López son 9 hombres y 2 mujeres.

Caso B: $\left.\begin{cases} x+y=7 \\ x-y=7 \end{cases}\right\}$ y $\left.\begin{cases} t+z=11 \\ t-z=1 \end{cases}\right\}$

tomando el primero de los sistemas, $\left.\begin{cases} x+y=7 \\ x-y=7 \end{cases}\right\}$, si sumamos término a término obtenemos:

$$2.x = 14$$

de donde: $x = 7$, $y = 0$; solución que no puede darse bajo el supuesto de que el número de mujeres de la familia Gómez no puede ser cero, aunque, el supuesto del problema es que la familia es numerosa, hecho que se cumple al contar la familia con 8 miembros.

tomando ahora el segundo sistema, $\left.\begin{cases} t+z=11 \\ t-z=1 \end{cases}\right\}$, si, de nuevo, sumamos término a término obtenemos:

$$2.t = 12$$

de donde: $t = 6$, $z = 5$.

Por lo tanto, otra posible solución es: los Gómez son 7 hombres, mientras que los López son 6 hombres y 5 mujeres.

Caso C: $\left\{\begin{array}{c} x+y=11 \\ x-y=1 \end{array}\right\}$ y $\left\{\begin{array}{c} t+z=7 \\ t-z=7 \end{array}\right\}$

tomando el primero de los sistemas, $\left\{\begin{array}{c} x+y=11 \\ x-y=1 \end{array}\right\}$, si sumamos término a término obtenemos:

$$2.x = 12$$

de donde: $x = 6$, $y = 5$.

tomando el segundo de los sistemas, $\left\{\begin{array}{c} t+z=7 \\ t-z=7 \end{array}\right\}$, si sumamos término a término obtenemos:

$$2.t = 14$$

de donde: $t = 7$, $z = 0$; solución que no puede darse bajo el supuesto de que el número de mujeres de la familia López no puede ser cero.

Por lo tanto, otra posible solución es: los Gómez son 6 hombres y 5 mujeres, mientras que los López son 7 hombres.

Caso D: $\left\{\begin{array}{c} x+y=11 \\ x-y=7 \end{array}\right\}$ y $\left\{\begin{array}{c} t+z=7 \\ t-z=1 \end{array}\right\}$

tomando el primero de los sistemas, $\left\{\begin{array}{c} x+y=11 \\ x-y=7 \end{array}\right\}$, si sumamos término a término obtenemos:

$$2.x = 18$$

de donde: $x = 9$, $y = 2$.

tomando ahora el segundo sistema, $\left\{\begin{array}{c} t+z=7 \\ t-z=1 \end{array}\right\}$, si, de nuevo, sumamos término a término obtenemos:

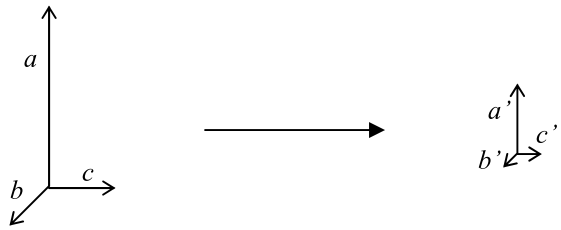
$$2.t = 8$$

de donde: $t = 4$, $z = 3$.

Por lo tanto, otra posible solución es: los Gómez son 9 hombres y 2 mujeres, mientras que los López son 4 hombres y 3 mujeres.

- **Solución - Fase 1 - (14/16) - EL MODELO DE LA TORRE EIFFEL**

  Tenemos un sólido de 300 metros de altura, para hacer el modelo exacto debemos reducir de forma proporcional las tres dimensiones del mismo:



  por lo tanto existirá una constante k, tal que:

$$a = k.a'$$
$$b = k.b'$$
$$c = k.c'$$

  Además, al estar hecho torre y modelo del mismo material, la reducción de peso será proporcional a la reducción de volumen, de forma que, el volumen de la torre será ocho millones de veces mayor que el volumen del modelo, es decir:

$$8000000.a'.b'.c' = a.b.c$$

  sustituyendo en esta expresión las anteriores tenemos:

$$8000000 = k^3$$

  luego k = 200, aplicando ahora que la altura de la torre es de 300 metros, tenemos:

$$200.a' = 300$$

  luego $a' = \frac{3}{2}$ = 1'5 metros, altura en todo caso superior a la de un vaso normal.

- **Solución - Fase 1 - (14/16) - EL FACTOR 3**

  El número primo 3 dividirá a 100! tantas veces como divida a sus factores, por lo tanto podemos empezar por obtener los múltiplos de 3 que son factores de 100!:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	.....	99	100
(3x)		1			2			3			4			5			.....	33	

la cantidad de múltiplos de 3 que tiene 100! como factores es igual al cociente de la división de 100 entre 3, por lo tanto al menos 3^{33} divide a 100!.
Repetimos ahora el proceso para 33, y tenemos la tabla:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	.....	33
(3x)		1			2			3			4			5			.....	11

en este caso hay 11 múltiplos de 3, es decir que de los 33 múltiplos de 3 que tiene 100! como factores, 11 de ellos contienen al 3 como factor doble, en consecuencia al menos $3^{33+11} = 3^{44}$ divide a 100!.
Volvemos a repetir el proceso para 11, y tenemos:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
(3x)		1			2			3		

así, de los 33 múltiplos de 3 que tiene 100! como factores, 3 de ellos contienen al 3 como factor triple, en consecuencia al menos $3^{33+11+3} = 3^{47}$ divide a 100!.
Ya queda únicamente repetir el proceso para 3, y tenemos:

1	2	3
(3x)		1

y podemos concluir que de los 33 múltiplos de 3 que tiene 100! como factores, 1 de ellos contiene al 3 como factor de grado cuatro, por lo tanto $3^{33+11+3+1} = 3^{48}$ divide a 100!, luego 48 es el exponente de la potencia máxima de 3 que divide a 100!.

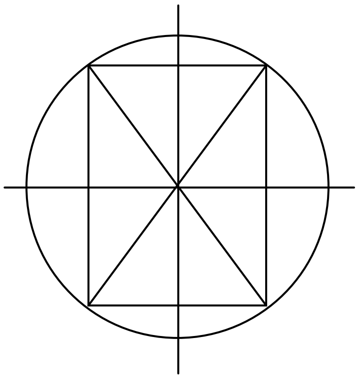
En general, dado $n!$, realizaremos sucesivas divisiones por 3, de modo que:

$$\begin{array}{rll} n &= 3 \,.\, c_1 + r_1 & (0 \le r_1 \le 2) \\ c_1 &= 3 \,.\, c_2 + r_2 & (0 \le r_2 \le 2) \\ c_2 &= 3 \,.\, c_3 + r_3 & (0 \le r_3 \le 2) \\ c_3 &= 3 \,.\, c_4 + r_4 & (0 \le r_4 \le 2) \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ c_{k-1} &= 3 \,.\, c_k + r_{k-1} & (0 \le r_{k-1} \le 2) \\ c_k &= 3 \,.1 + r_k & (0 \le r_k \le 2) \end{array}$$

sea $h = c_1 + c_2 + c_2 + c_2 + ... + c_{k-1} + c_k + 1$, entonces 3^h divide a $n!$ y h es el exponente de la potencia máxima de 3 que divide a $n!$.

- **Solución - Fase 1 - (14/16) - UN ROMBO CURIOSO**

Una idea para resolver este problema puede ser repetir el dibujo del enunciado quitando el rombo y añadiendo las diagonales del rectángulo:



por lo tanto, como el diámetro del círculo es de 10 cm, la suma de las longitudes de las dos diagonales del rectángulo será de 20 cm, pero esa longitud coincide con el valor del perímetro del rombo.

- **Solución - Fase 1 - (14/16) - BLANCO, RUBIO O CASTAÑO**

En primer lugar, atendiendo a quienes hacen las anotaciones tenemos que:

- la dama y la persona que tiene el pelo rubio son personas distintas.
- la persona que tiene el pelo rubio y Blanco son personas distintas.

Además según dice la dama en la primera de las anotaciones podemos construir la siguiente tabla, y atendiendo a lo que dijo la persona que tiene el pelo rubio podemos marcar en ella los casos que no pueden darse:

Color de Pelo / Apellido	pelo Blanco	pelo Rubio	pelo Castaño
Blanco	no	no	
Rubio		no	
Castaño		no Dama	no

Por último, se nos dice que la dama no tiene el pelo castaño, lo que nos lleva a la tabla siguiente:

Color de Pelo / Apellido	pelo Blanco	pelo Rubio	pelo Castaño
Blanco	no	no Dama	no Dama
Rubio		no	no Dama
Castaño		no Dama	no

De modo que la dama tiene el pelo blanco y puede ser Rubio ó Castaño.
Pero si la dama fuese Castaño, Castaño tendría el pelo blanco y la tabla se completaría así:

Color de Pelo / Apellido	pelo Blanco	pelo Rubio	pelo Castaño
Blanco	x	o	x
Rubio	x	x	o
Castaño	o	x	x

lo cuál es una contradicción con que el sr. Blanco y la persona que tiene el pelo rubio son personas distintas.
En consecuencia la dama es Rubio, quedando la tabla así:

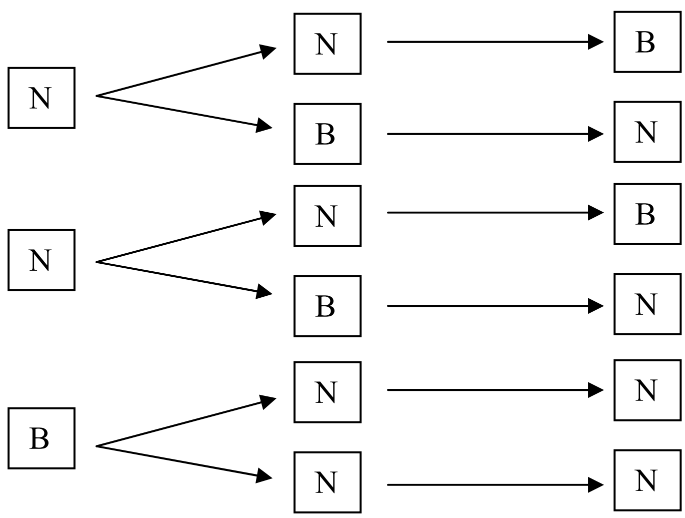
Color de Pelo / Apellido	pelo Blanco	pelo Rubio	pelo Castaño
Blanco	x	x	o
Rubio	o	x	x
Castaño	x	o	x

Es decir que Rubio tiene el pelo Blanco.

- **Solución - Fase 1 - (14/16) - TRES BOLAS**

Para atacar este problema desarrollaremos un diagrama en el que veremos cuales son todos los resultados que pueden darse, suponiendo que se extraen las tres bolas, contando después la cantidad de situaciones en que gana cada uno de los estudiantes, veremos si el orden de la extracción beneficia a alguno de ellos:

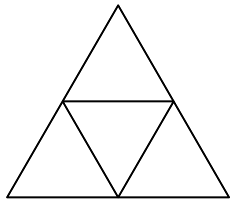
el primero saca... el segundo saca... el tercero saca...



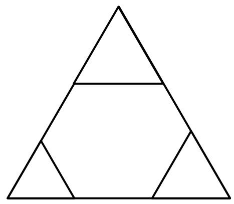
Vemos que cada estudiante ganaría en dos de seis posibles resultados, podemos por tanto concluir que ninguno de ellos juega con ventaja.

- **Solución - Fase 1 - (14/16) - DIVIDIR TRIÁNGULOS**

  Primer Apartado: la figura siguiente ilustra la solución.



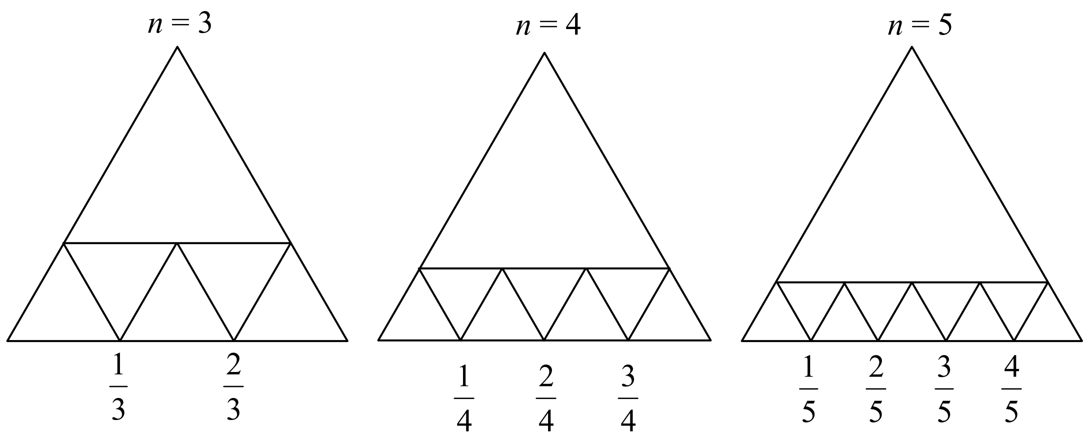
Segundo Apartado: al dividir un triángulo equilátero en otros debemos tener en cuenta que cada vértice pertenecerá a un triángulo equilátero interior distinto, y que dos de esos tres “triangulillos” no pueden tener como longitud de su lado un valor superior a la mitad del lado del triángulo de partida, la situación será similar a:



pero el polígono interior que se forma tras la división no puede ser dividido en dos triángulos equiláteros.

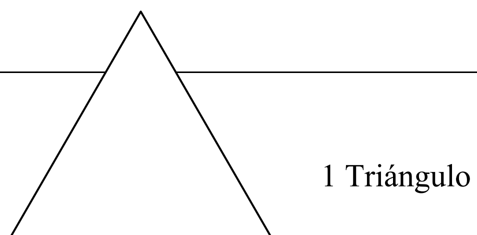
Tercer Apartado: abordaremos este apartado planteando dos casos.

- Caso 2.*n* con *n*>2: empezaremos dando valores y obteniendo gráficamente el resultado.

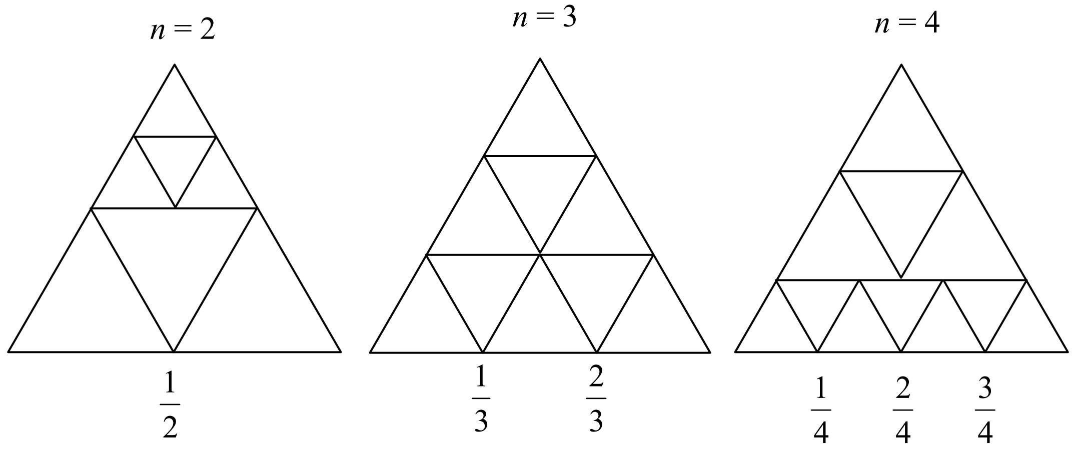


así, hemos dividido el triángulo en 6, 8 y 10 triángulos equiláteros respectivamente.

En general, la división en 2*n* triángulos, con *n*>2, será:

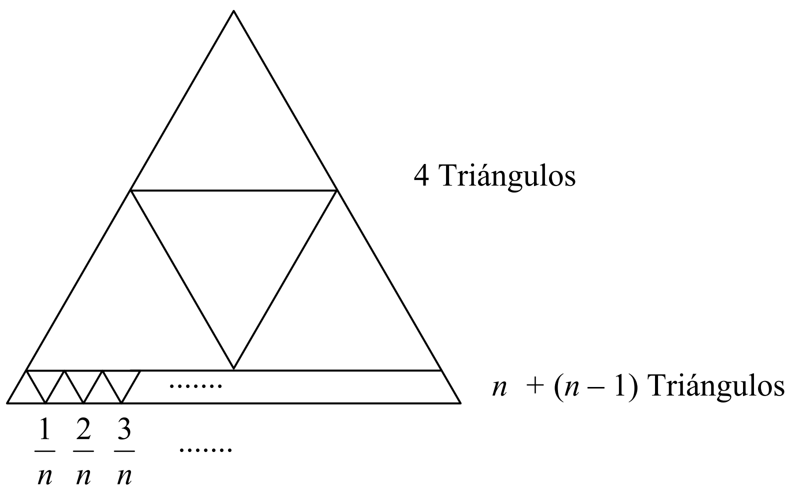


- Caso $(2.n + 3)$ con $n>1$: empezaremos dando valores a n y obteniendo gráficamente el resultado.



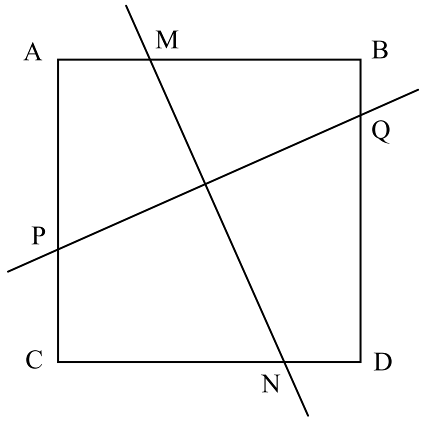
así, hemos dividido el triángulo en 7, 9 y 11 triángulos equiláteros respectivamente.

En general, la división en $(2.n + 3)$ triángulos, con $n>1$, será:

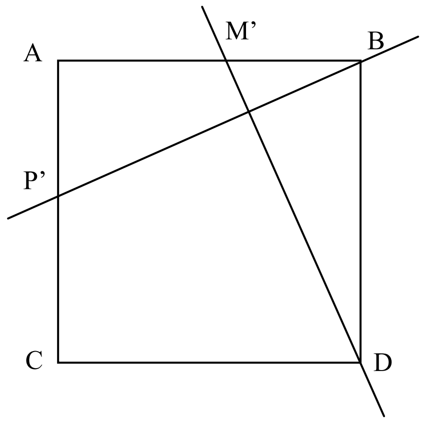


- **Solución - Fase 2 - (14/16) - RECTAS EN UN CUADRADO**

Realizamos el dibujo que se define en el enunciado:



para comprobar que los segmentos MN y PQ tienen la misma longitud, basta con mover las rectas que los contienen hasta los vértices D y B respectivamente:



los triángulos rectángulos BAP’ y DBM’ son iguales, ya que, por ser las rectas que contienen a los segmentos DM’ y BP’ perpendiculares, los ángulos de los vértices D y B son iguales, por lo tanto ambos triángulos tienen los tres ángulos iguales, por lo que son semejantes, pero además los lados AB y BD son iguales.
Por lo tanto las hipotenusas de ambos triángulos miden lo mismo, es decir, los segmentos MN y PQ tienen la misma longitud.

- **Solución - Fase 2 - (14/16) - EL VIAJE**

Supongamos que viajan n personas, y que las tres que se quedaron pagaron x euros, entonces resulta que $(n - 3)$ personas pagan $(x + 29)$ euros , como en total se pagaron 522 €, tenemos la siguiente ecuación:

$$(n - 3).(x + 29) + 3.x = 522$$

operando obtenemos:

$$n.(x + 29) = 609$$

ahora bien, resulta que 609 = 3.7.29; y podemos obtener el conjunto de sus divisores que será:

Divisores de 609 = {1, 609, 3, 203, 7, 87, 29, 21}

luego los casos posibles que pueden darse son:

- $n = 3$, $x + 29 = 203$; no puede ser porque el número de personas que viajan debe ser mayor que 3 puesto que, según el enunciado, tres pasajeros se quedaron en el trayecto, pero el viaje finalizó.
- $n = 203$, $x + 29 = 3$; no puede ser, 209 personas no caben en un vehículo alquilado convencional, además la cantidad a pagar por las personas que se quedan en el trayecto sería negativa.
- $n = 21$, $x + 29 = 29$; este caso es inaceptable ya que el número de viajeros es excesivo para un vehículo alquilado convencional, además, las personas que se quedan en el trayecto no pagarían nada.
- $n = 29$, $x + 29 = 21$; no puede ser porque la cantidad a pagar por las personas que se quedan en el trayecto sería negativa.
- $n = 7$, $x + 29 = 87$.
- $n = 87$, $x + 29 = 7$; no porque la cantidad a pagar por las personas que se quedan en el trayecto sería negativa.

luego sólo un caso es razonable, $n = 7$ y $x + 29 = 87$, es decir que comenzaron el viaje 7 personas, las tres que se apearon durante el trayecto pagaron 58 € y las cuatro que llegaron al final del viaje pagaron 87 € cada una.

- **Solución - Fase 2 - (14/16) - NÚMEROS LECOS**

En primer lugar estudiamos los lecos de orden 1, y resulta que son todos los números primos acabados en 1.

Además podemos concluir que 11 es el primer leco, ya que desde 2 hasta 10, la cantidad de divisores, exceptuando el 1, de cada número no coincide con el valor de la última cifra.

Para estudiar los lecos de orden 2 podemos razonar de la manera siguiente: todo número acabado en 2 es par y por tanto tiene al 2 como divisor, si tuviera algún divisor más, junto con el propio número y sin contar el 1 tendría tres divisores, por lo tanto, el único divisor de un leco de orden 2 es 2, el único número que cumple esta condición es el propio 2, que no es leco de orden 2, por lo tanto no hay lecos de orden 2.

Estudiamos ahora los lecos de orden 3: dado x, número leco de orden 3, la descomposición en factores primos de x será:

$$x = a^{r1} \,.\, b^{r2} \,.\, c^{r3} \,.\, d^{r4} \ldots\ldots\ldots \quad \text{con } (a, b, c, d, \ldots, \text{ distintos de } 1)$$

donde (r1 + 1).(r2 + 1).(r3 + 1) .... es igual al número de divisores, contando el 1, y en este caso resultará que:

$$(r1 + 1).(r2 + 1).(r3 + 1) \ldots\ldots = 4$$

las posibilidades de descomposición de 4 son: $4= 2^2$ y 4=1.4.

Teniendo en cuenta la siguiente tabla de las posibles terminaciones de los productos de números primos, donde marcamos la terminación 3:

	1	2	3	5	7	9
1	1	2	**3**	5	7	9
2		4	6	0	4	8
3			9	5	1	7
5				5	5	5
7					9	**3**
9						1

veamos que ocurre para cada una de las posibilidades para la descomposición:

- 4 = 2.2 ; implica que r1 = 1 y r2 = 1,
  como x acaba en 3, resulta que, consultando la tabla tendremos las opciones siguientes:

  $x = a.b$; con a y b primos acabados en 1 y 3 respectivamente
  $x = a.b$; con a y b primos acabados en 7 y 9 respectivamente

- 4 = 1.4 ; por tanto r1=3
  como x acaba en 3, consultando la tabla puede ocurrir:

  a^2 acaba en 1 y a en 3, luego a acaba en 1, cosa que no puede ocurrir, ó en 9, también imposible.
  a^2 acaba en 3, cosa que no puede suceder, y a en 1
  a^2 acaba en 7, imposible, y a en 9
  a^2 acaba en 9 y a en 7, luego, a acaba en 3, imposible, ó en 7.

  lo que implica que $x = a^3$ con a primo acabado en 7.

En resumen, los lecos de orden 3 serán:

$x = a.b$; con a y b primos acabados en 1 y 3 respectivamente
$x = a.b$; con a y b primos acabados en 7 y 9 respectivamente

$x = a^3$ con a primo acabado en 7

Ahora determinamos los lecos de orden 3 que hay entre los 100 primeros número y que son:

según la primera opción...

	11	31	41	...
3	33	93	123	
13	143	403	533	
...				

según la segunda opción...

	7	17	37	...
19	133	323	703	
...				

según la tercera opción...

	7	17	37	...
a^3	343	4913	50653	

luego los únicos números lecos de orden 3 menores que 100 son 33 y 93.

A continuación estudiaremos la forma de los números lecos de órdenes superiores. En todos los casos utilizaremos que la descomposición en factores primos de x será:

$$x = a^{r1} \,.\, b^{r2} \,.\, c^{r3} \,.\, d^{r4} \,.......... \text{ con } (a, b, c, d, ..., \text{distintos de } 1)$$

donde (r1 + 1).(r2 + 1).(r3 + 1) .... es igual al número de divisores, contando el 1.

<u>Orden 4</u>: sea x un número Leco de orden 4, con

$$x = a^{r1} \,.\, b^{r2} \,.\, c^{r3} \,.\, d^{r4} \,..........$$

en este caso resultará que:

$$(r1 + 1).(r2 + 1).(r3 + 1) \,.......= 5$$

Teniendo también en cuenta la siguiente tabla de las posibles terminaciones de los productos de números primos, donde marcamos la terminación 4:

	1	2	3	5	7	9

1	1	2	3	5	7	9
2		**4**	6	0	**4**	8
3			9	5	1	7
5				5	5	5
7					9	3
9						1

veamos que sucede con la única posibilidad para los exponentes de la descomposición en números primos que es:

- 5 = 1.5 ; lo que implica r1 = 4
  como x acaba en 4, consultando la tabla puede ocurrir...

  $x = a^4$ con a primo de modo que, a^2 acaba en 2 con a primo de donde se deduce que a acaba en 2, y es primo, luego a es 2. Pero $2^4 = 16$, que no acaba precisamente en 4.

En consecuencia, no hay números Lecos de orden 4

<u>Orden 5</u>: sea x un número Leco de orden 5, con

$$x = a^{r1} \,.\, b^{r2} \,.\, c^{r3} \,.\, d^{r4} \,..........$$

en este caso resultará que:

$$(r1 + 1).(r2 + 1).(r3 + 1) \,.......= 6$$

Teniendo también en cuenta la siguiente tabla de las posibles terminaciones de los productos de números primos, donde marcamos la terminación 5:

	1	2	3	5	7	9
1	1	2	3	**5**	7	9
2		4	6	0	4	8
3			9	**5**	1	7
5				**5**	**5**	**5**
7					9	3
9						1

veamos que ocurre para cada una de las posibilidades para la descomposición:

- 6 = 2.3   lo que implica....   r1 = 1 y r2 = 2
  como x acaba en 5, resulta que, consultando la tabla tendremos $x=a.b^2$, a y b primos con las posibilidades:

a acabado en 1 y b^2 en 5, es decir, b acabado en 5, luego b=5.
a acabado en 5, luego a=5, y b^2 en 1, es decir:
  a=5 y b acabado en 1.
  a=5 y b acabado en 9.
a acabado en 3 y b^2 en 5, es decir, b acabado en 5, luego b=5.
a acabado en 5 y b^2 en 3, imposible.
a acabado en 5 y b^2 en 5, imposible.
a acabado en 5 y b^2 en 7, imposible.
a acabado en 7 y b^2 en 5, es decir, b acabado en 5, luego b=5.
a acabado en 5, luego a=5, y b^2 en 9, es decir:
  a=5 y b acabado en 3.
  a=5 y b acabado en 7.
a acabado en 9 y b^2 en 5, es decir, b acabado en 5, luego b=5.

Es decir, que el resultado en este caso será

$x = 5.b$ con b primo acabado en 1, 3, 7 ó 9.
$x = 25.a$ con a primo acabado en 1, 3, 7 ó 9.

- 6 = 1.6 lo que implica.... r1 = 5
  como x acaba en 5, consultando la tabla puede ocurrir $x = a^5$ con a primo acabado en 5, luego $x = 5^5 = 3125$

En resumen, los lecos de orden 5 serán:

$x = 5.b$ con b primo acabado en 1, 3, 7 ó 9.
$x = 25.a$ con a primo acabado en 1, 3, 7 ó 9.
$x = 3125$

<u>Orden 6</u>: sea x un número Leco de orden 6, con

$$x = a^{r1} . b^{r2} . c^{r3} . d^{r4} ....$$

en este caso resultará que: (r1 + 1).(r2 + 1).(r3 + 1) ....= 7
Teniendo también en cuenta la tablas siguientes:

Terminaciones de productos de primos

	1	2	3	5	7	9
1	1	2	3	5	7	9
2		4	6	0	4	8
3			9	5	1	7
5				5	5	5
7					9	3
9						1

Terminaciones de potencias cuartas de primos

	1	4	5	9
1	1			
4		6		
5			5	
9				1

Terminaciones de potencias cuartas por cuadrados de primos

	1	5	6
1	1	5	6
4	4	0	4
5	5	5	0
9	9	5	4

observamos que hay un sola posibilidad:

- 7 = 1.7 lo que implica.... r1 = 6
  como x acaba en 6, resulta, consultando las tablas, que el cuadrado de un primo puede acabar en 1, 4, 5 ó 9, su potencia cuarta puede acabar en 1, 5 ó 6, y su potencia sexta puede acabar en 6 si su potencia cuarta acaba en 6 y su cuadrado en 1, opción que es imposible.

Por lo tanto no hay números lecos de orden 6.

<u>Orden 7</u>: sea x un número Leco de orden 7, con

$$x = a^{r1} . b^{r2} . c^{r3} . d^{r4} ....$$

en este caso resultará que: (r1 + 1).(r2 + 1).(r3 + 1) ....= 8

Teniendo también en cuenta la siguiente tabla de las posibles terminaciones de los productos de números primos, donde marcamos la terminación 7:

	1	2	3	5	7	9
1	1	2	3	5	**7**	9
2		4	6	0	4	8
3			9	5	1	**7**
5				5	5	5
7					9	3
9						1

veamos que ocurre para cada una de las posibilidades para la descomposición:

- 8 = 2.4 lo que implica.... r1 = 1 y r2 = 3,
  como x acaba en 7, resulta que, consultando la tabla tendremos $x=a.b^3$ con a y b primos tales que:

  a acabado en 1 y b^3 en 7, luego...
  ... b acaba en 7 y b^2 en 1, cosa imposible.
  ... b acaba en 1 y b^2 en 7, imposible.
  a acabado en 7 y b^3 en 1, luego...
  ... b acaba en 1 y b^2 en 1, y puede ocurrir:
  b acaba en 1.
  b acaba en 9, imposible.
  ... b acaba en 7 y b^2 en 3, imposible.
  ... b acaba en 3 y b^2 en 7, imposible.
  ... b acaba en 9 y b^2 en 9, y puede ocurrir:
  b acaba en 3, imposible.
  b acaba en 7, imposible.
  a acabado en 3 y b^3 en 9, luego...
  ... b acaba en 1 y b^2 en 9, imposible

... b acaba en 9 y b^2 en 1, y puede ocurrir:
b acaba en 1, imposible
b acaba en 9.
a acabado en 9 y b^3 en 3, luego...
... b acaba en 1 y b^2 en 3, imposible.
... b acaba en 3 y b^2 en 1, imposible.
... b acaba en 9 y b^2 en 7, imposible.
... b acaba en 7 y b^2 en 9, y puede ocurrir:
b acaba en 3, imposible.
b acaba en 7.

Es decir, que el resultado en este caso será $x = a.b^3$, a y b primos con...

a acabado en 7 y b en 1
a acabado en 3 y b en 9
a acabado en 9 y b en 7

- 8 = 1.8 lo que implica.... r1 = 7
como $x = b^7$ acaba en 7, consultando la tabla puede ocurrir....

b	b^2	b^6	b^7	
1	1	1	1	caso no válido
2	4	4	8	caso no válido
3	9	9	7	posible
5	5	5	5	caso no válido
7	9	9	3	caso no válido
9	1	1	9	caso no válido

Luego en este caso será x = b^7 con b primo acabado en 3.

En resumen, los lecos de orden 7 serán:

$x = a.b^3$; a y b primos, a acabado en 7 y b en 1
$x = a.b^3$; a y b primos, a acabado en 3 y b en 9
$x = a.b^3$; a y b primos, a acabado en 9 y b en 7
$x = b^7$ con b primo acabado en 3

Orden 8: sea x un número Leco de orden 8, con

$$x = a^{r1} . b^{r2} . c^{r3} . d^{r4} ....$$

en este caso resultará que: (r1 + 1).(r2 + 1).(r3 + 1) ....= 9
Teniendo también en cuenta la tablas siguientes:

Terminaciones de productos de primos	Terminaciones de potencias cuartas de primos	Terminaciones de potencias cuartas por cuadrados de primos

	1	2	3	5	7	9
1	1	2	3	5	7	9
2		4	6	0	4	8
3			9	5	1	7
5				5	5	5
7					9	3
9						1

	1	4	5	9
1	1			
4		6		
5			5	
9				1

	1	5	6
1	1	5	6
4	4	0	4
5	5	5	0
9	9	5	4

veamos que ocurre para cada una de las posibilidades para la descomposición:

- 9 = 1.9 por lo tanto r1 = 8,
  como $x = a^8$, con a primo, acaba en 8, consultando la tabla, resulta que el cuadrado de a^4 acaba en 8, lo cuál no puede ser.

- 9 = 3.3 lo que implica r1 = 2 y r2 = 2, siendo $x = a^2.b^2$, pudiendo ocurrir...
  ... a^2 acaba en 1 y b^2 en 8, imposible.
  ... a^2 acaba en 2, lo que no puede ser, y b^2 en 4.
  ... a^2 acaba en 2, lo que no puede ser, y b^2 en 9.
  ... a^2 acaba en 3, lo que no puede ser, y b^2 en 6.
  ... a^2 acaba en 4 y b^2 en 7, imposible.
  ... a^2 acaba en 6 y b^2 en 8, imposible.

Podemos por tanto concluir que no hay números Lecos de orden 8.

<u>Orden 9</u>: sea x un número Leco de orden 9, con

$$x = a^{r1} . b^{r2} . c^{r3} . d^{r4} ....$$

en este caso resultará que: (r1 + 1).(r2 + 1).(r3 + 1) ....= 10

Teniendo también en cuenta la siguiente tabla de las posibles terminaciones de los productos de números primos, donde marcamos las terminaciones de cuadrados en 1 y 9:

	1	2	3	5	7	9
1	**1**	2	3	5	7	9
2		4	6	0	4	8
3			**9**	5	1	7
5				5	5	5
7					**9**	3
9						**1**

veamos que ocurre para cada una de las posibilidades para la descomposición:

- 10 = 2.5 ; luego r1 = 1 y r2 = 4,

como $x = a\ .b^4$, con a y b primos, acaba en 9, consultando la tabla tendremos:

> a acaba en 1y b^4 en 9, luego b^2 acaba en 3, cosa que no puede suceder, ó en 7, que también es imposible.
> a acaba en 9 y b^4 en 1, y puede ocurrir...
> ...b^2 acaba en 1, luego b acaba en 1 ó en 9.
> ...b^2 acaba en 9, luego b acaba en 3 ó en 7.

Luego en este caso será $x = a\ .b^4$ con a primo acabado en 9 y b primo acabado en 1, 3, 7 ó 9.

- 10 = 1.10 ; lo que implica que r1 = 9,
  como $x = a^9$ acaba en 9, consultando la tabla puede ocurrir....

  ... si a acaba en 1, entonces a^9 acabará en 1, caso no válido.
  ... si a acaba en 2, a^8 acabará en 4 y a^9 en 8, caso no válido.
  ... si a acaba en 3, a^8 acabará en 9 y a^9 en 7, caso no válido.
  ... si a acaba en 4, a^8 acabará en 6 y a^9 en 4, caso no válido.
  ... si a acaba en 5, a^8 acabará en 5 y a^9 en 5, caso no válido.
  ... si a acaba en 6, a^8 acabará en 6 y a^9 en 6, caso no válido.
  ... si a acaba en 7, a^8 acabará en 9 y a^9 en 3, caso no válido.
  ... si a acaba en 8, a^8 acabará en 4 y a^9 en 6, caso no válido.
  ... si a acaba en 9, a^8 acabará en 1 y a^9 en 1.

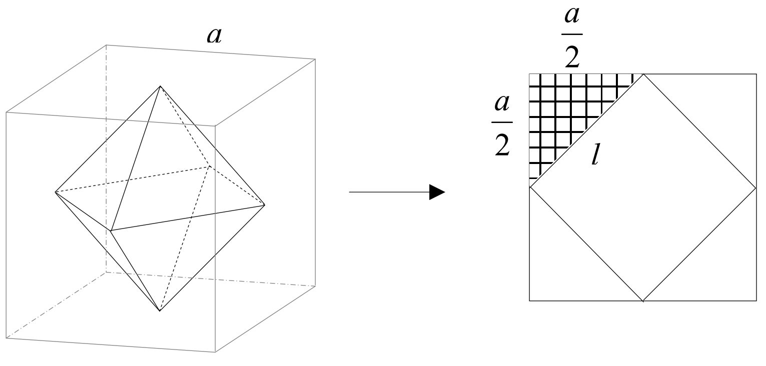
  Luego en este caso será $x = a^9$ con a primo acabado en 9.

En resumen, los lecos de orden 9 serán:

$x = a.b^4$, con a y b primos, a acabado en 9 y b en 1, 3, 7, ó 9.
$x=a^9$, con a primo acabado en 9.

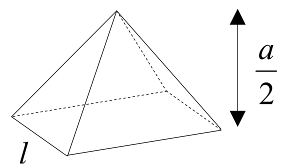
- **Solución - Fase Final - (14/16) - EL AÑO GAUDÍ**

<u>Disminuir</u>: para resolver este problema realizados el dibujo del tetraedro dentro del cubo y extraemos el corte plano central.



aplicando el teorema de Pitágoras sobre el triángulo rectángulo marcado en la figura tenemos que $l^2 = 2.\left(\frac{a}{2}\right)^2$, y operando $l = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

Entonces, si tomamos la mitad del tetraedro, es decir, la pirámide cuadrangular de la figura, su base tendrá como área l^2 y su altura será $\frac{a}{2}$, y por tanto: $V_{\text{pirámide}} = \frac{l^2 . \frac{a}{2}}{3}$.



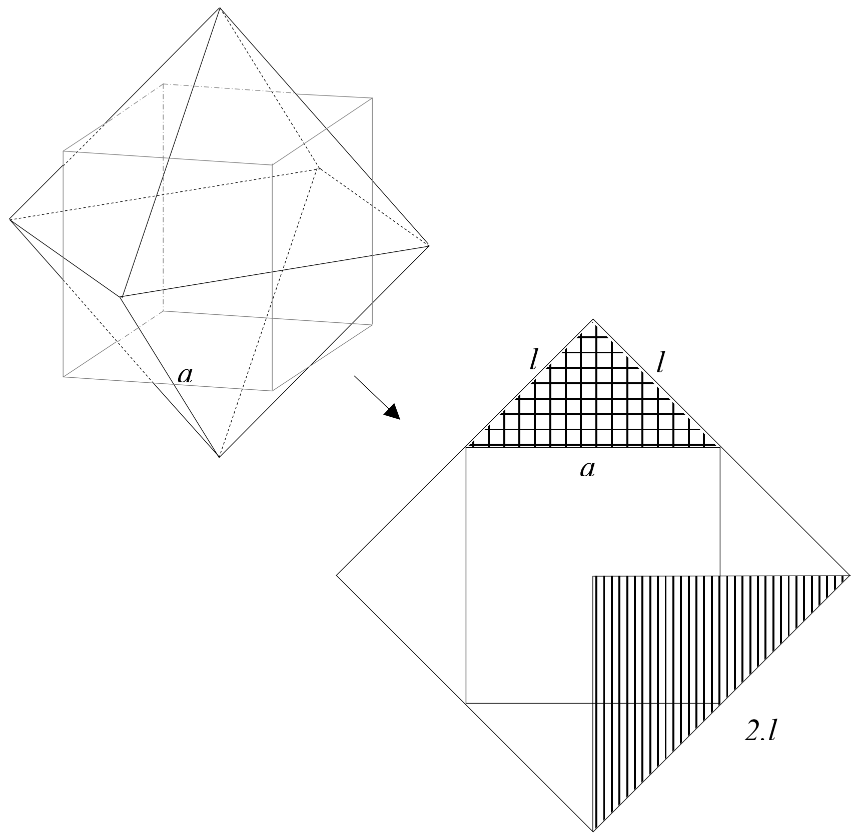
El volumen del tetraedro será entonces: $V_{\text{tetraedro}} = \frac{l^2 . a}{3}$

ahora sustituyendo en esta expresión el valor del l en función de a, y operando, resulta:

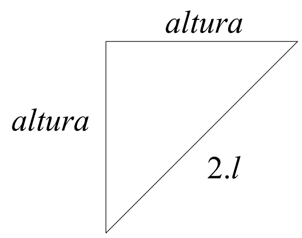
$$V_{\text{tetraedro}} = \frac{a^3}{6}$$

Por lo tanto, resulta que $V_{\text{tetraedro}} = \frac{1}{6} . V_{\text{cubo}}$.

Aumentar: razonamos como antes, usando para ello el dibujo de la figura y su sección central.



aplicando de nuevo el teorema de Pitágoras sobre el triángulo rectángulo marcado con cuadritos en la figura, tenemos que $a^2 = 2.\ l^2$, es decir, $l = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$, si tomamos la mitad del tetraedro, es decir, una la pirámide cuadrangular, resulta que el lado de su base será $2.l = \dfrac{2}{\sqrt{2}}.a$, y por lo tanto el área de la base $2.a^2$.



Para hallar la altura de la pirámide volvemos a aplicar el teorema de Pitágoras, ahora al triángulo rectángulo marcado con rayas en la figura anterior, y cuya reproducción vemos en la figura adjunta, por tanto, $(2.l\ )^2 = 2.\ altura^2$, y haciendo operaciones obtenemos:

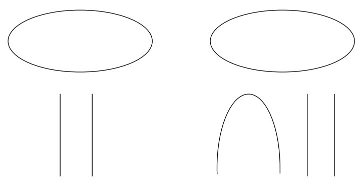
$$altura = \sqrt{2}.l = a$$

Así resulta que $V_{\text{pirámide}} = \dfrac{2.a^2.a}{3} = \dfrac{2.a^3}{3}$. El volumen del tetraedro será entonces: $V_{\text{tetraedro}} = \dfrac{4}{3}.a^3$, por lo tanto, resulta que:

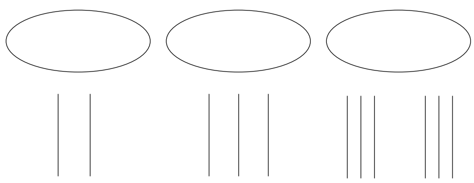
$$V_{\text{tetraedro}} = \frac{4}{3}.V_{\text{cubo}}.$$

- **Solución - Fase Final - (14/16) - FRACCIONES EN EGIPTO**

  Apartado a: este apartado es muy sencillo.



$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{12} = \frac{7}{12}$$



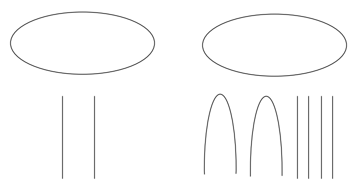
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{7}{6}$$

Apartado b: obtendremos una descomposición para cada número utilizando un método que depende en gran medida de la relación existente entre numerador y numerador, pero que, con respecto al método general que estudiaremos en al apartado c, simplifica la obtención de la descomposición.

Número $\frac{4}{7}$: el denominador es primo, para obtener la descomposición en este caso multiplico por 2 numerador y denominador, buscando la descomposición sobre $\frac{8}{14}$, para ello sumo los números siguientes:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{7}+\frac{1}{14}=\frac{7+2+1}{14}=\frac{10}{14}$$

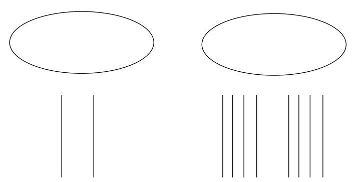
la diferencia 10 – 8 = 2 divide a 14, siendo el sumando aportado al numerador por la fracción $\frac{1}{7}$, no tenemos por tanto más que suprimir esa fracción y obtenemos: $\frac{4}{7}=\frac{8}{14}=\frac{1}{2}+\frac{1}{14}$; gráficamente:



Número $\frac{5}{8}$: en este caso el denominador no es primo y podemos probar de nuevo el método anterior, para ello hacemos la suma:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{4+2+1}{8}=\frac{7}{8}$$

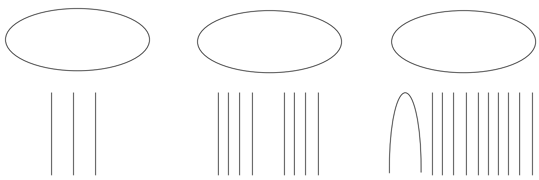
la diferencia 7 – 5 = 2 divide al denominador, correspondiendo esta cantidad al sumando aportado por $\frac{1}{4}$, lo quitamos y obtenemos $\frac{5}{8}=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$; gráficamente:



Número $\frac{5}{9}$: en este caso el denominador no es primo, no obstante multiplicaremos por 2 numerador y denominador, buscando la descomposición sobre $\frac{10}{18}$, para ello sumo los números siguientes:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{18}=\frac{9+6+3+2+1}{18}=\frac{21}{18}$$

la diferencia 21 – 10 = 11, como 11 = 9 + 2, los sumandos implicados son los aportados al numerador por las fracciones $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{9}$, suprimiendo esas dos fracciones obtendremos la descomposición: $\frac{5}{9}=\frac{10}{18}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{18}$; gráficamente:



<u>Apartado c</u>: para abordar este apartado tenderemos en cuenta que: $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n.(n+1)}$, de donde: $\frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n.(n+1)}$.

Esta igualdad permite obtener dos fracciones egipcias diferentes a partir de una, de tal manera que, dado $\frac{m}{n}$, podemos descomponerlo de la forma:

$$\frac{m}{n}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+..^{m)}..+\frac{1}{n}$$

así, podemos mantener el primer sumando y cambiar todos los demás, quedando:

$$\frac{m}{n}=\frac{1}{n}+\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n.(n+1)}\right)+\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n.(n+1)}\right)+..^{m-1)}..+\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n.(n+1)}\right)$$

ahora podemos mantener los tres primeros sumandos y cambiar el resto, teniendo en cuenta que:

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n.(n+1)}=\left(\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+1).(n+2)}\right)+\left(\frac{1}{n.(n+1)+1}+\frac{1}{(n.(n+1)+1).(n.(n+1))}\right)$$

de este modo se demuestra que podemos expresar cualquier fracción como suma de fracciones egipcias diferentes, no obstante el método es bastante tedioso y poco práctico, baste para ilustrar esta afirmación el resultado que se obtiene si se aplica a la primera de las fracciones cuya descomposición obtuvimos en el apartado anterior:

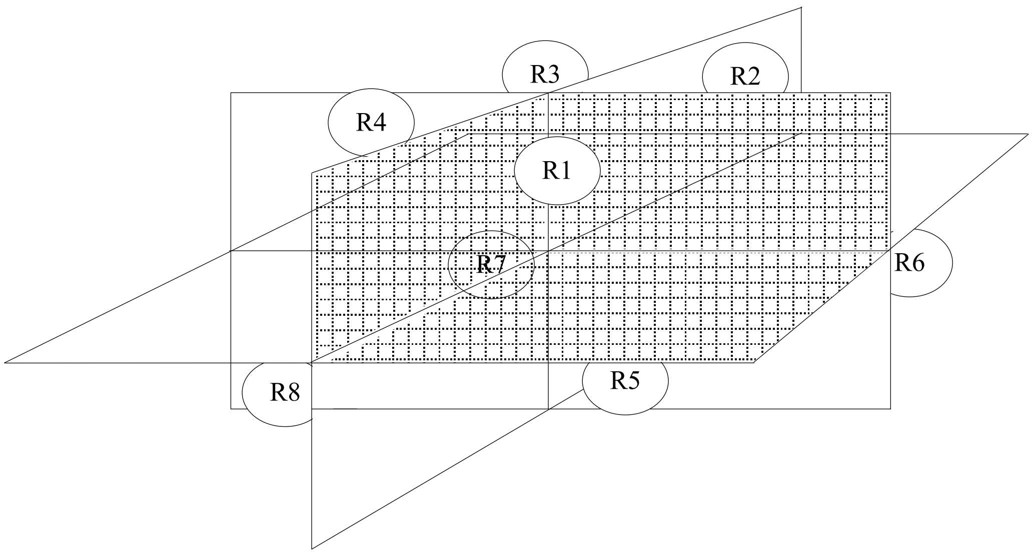
$$\frac{4}{7}=\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{56}+\frac{1}{9}+\frac{1}{72}+\frac{1}{57}+\frac{1}{3192}+\frac{1}{10}+\frac{1}{90}+\frac{1}{73}+\frac{1}{5256}+\frac{1}{58}+\frac{1}{3306}+\frac{1}{3193}+\frac{1}{10192056}.$$

- **Solución - Fase Final - (12/14) - CORTANDO UN QUESO**

Para simplificar el planteamiento realizaremos los cortes en el espacio, al final de todo el proceso ajustaremos las unidades de los cortes para adaptarlos a un queso.

Además supondremos que los tres primeros cortes son perpendiculares entre si, esto no afecta al razonamiento puesto que, se produzcan como se produzcan estos tres primeros cortes, si generan 8 raciones, es decir, 8 regiones en el espacio, pueden convertirse en perpendiculares mediante la aplicación de un giro adecuado a cada uno de ellos, como el resto de cortes serán definidos en base a estos, la inclinación entre ellos será un factor irrelevante.

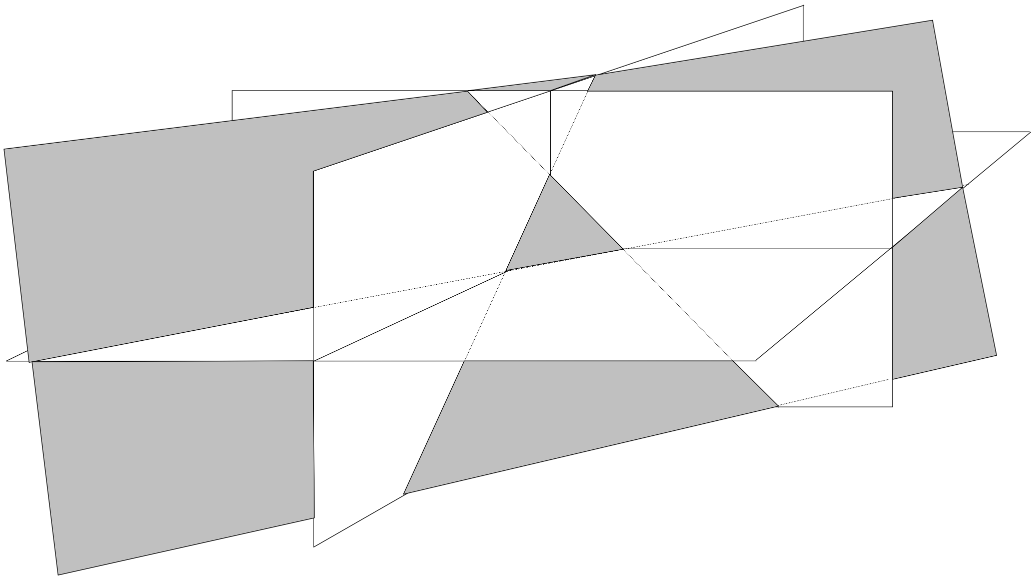
Numeraremos las regiones del espacio generadas por estos tres cortes, tal y como se puede ver en la figura.



XIII OLIMPIADA

Cada pareja de cortes genera una recta, de modo que , el corte siguiente generará una cantidad máxima de regiones en el espacio, raciones en el queso, si corta a la mayor cantidad posible de regiones ya existentes, hecho que se cumple cuando este nuevo corte interseca con todas las rectas formadas por los cortes anteriores tomados dos a dos en puntos distintos.

Así, el cuarto corte podemos tomarlo de forma que genere en la región 1 un tetraedro, tal y como se ve en la figura siguiente.

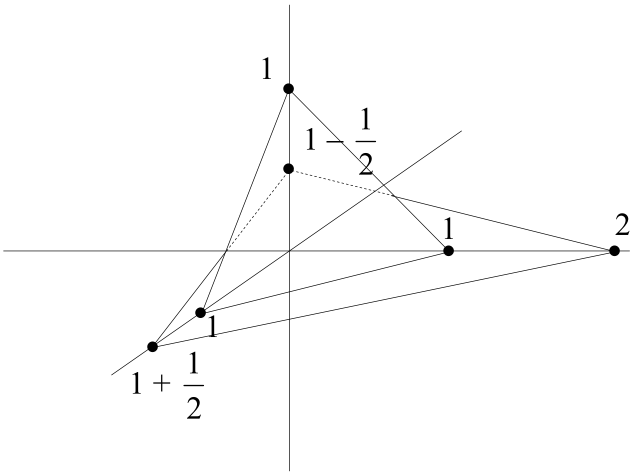


Tras este cuarto corte contamos las regiones que se forman dentro de cada una de las ocho regiones iniciales:

R1 .... 2 regiones
R2 .... 2 "
R3 .... 2 "
R4 .... 2 "
R5 .... 2 "
R6 .... 2 "
R7 .... 1 región
R8 .... 2 regiones

en total ahora hay 15 regiones.

Definimos el corte siguiente a partir del tetraedro formado en el corte anterior, para ello construiremos un nuevo tetraedro de forma que, la arista sobre el eje vertical mida la mitad que la correspondiente arista del tetraedro inicial, una de las aristas sobre uno de los ejes horizontales mida 1'5 veces lo que la arista inicial y la otra el doble, en la imagen siguiente se ilustra esta construcción tomando como unidad la longitud de la arista del tetraedro inicial:

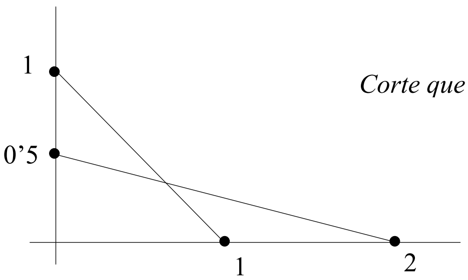


Formamos así el quinto corte, el cuál interseca con todas las rectas formadas por parejas de cortes precedentes en puntos distintos, dando lugar así a un número máximo de regiones.

Contamos las regiones que hay tras este corte dentro de cada una de las ocho regiones iniciales, ayudándonos para ello de dibujos planos que interpretan el paso del corte por cada una de las regiones iniciales:

- R1: contenía dos regiones, que se han dividido en dos regiones cada una, por lo tanto hay 2 + 2 regiones.

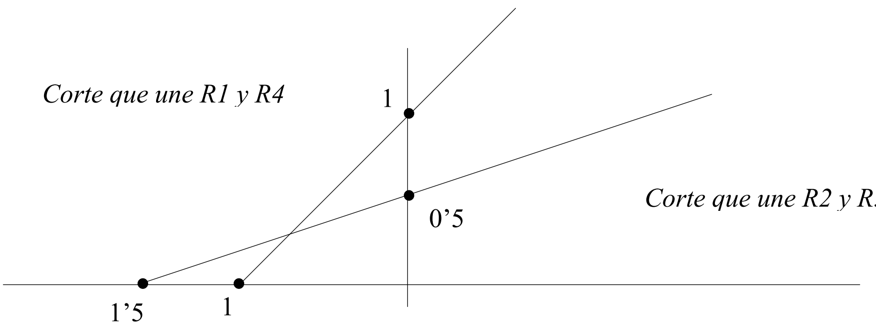
- R2: en esta región había dos que con este corte han sido divididas en dos, en consecuencia hay 2 + 2 regiones.



Corte que une R1 y R2

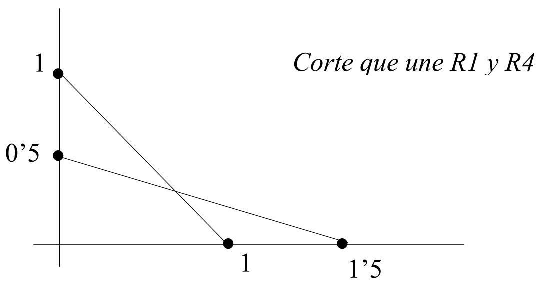
- R3: en esta región había dos que con este corte una de ellas ha sido dividida en dos, en consecuencia hay 2 + 1 regiones.

Corte que une R1 y R4

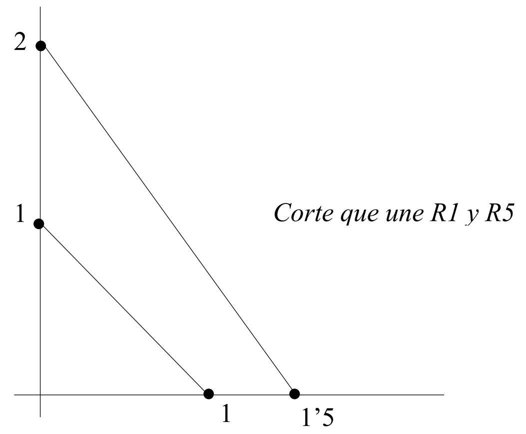


Corte que une R2 y R3

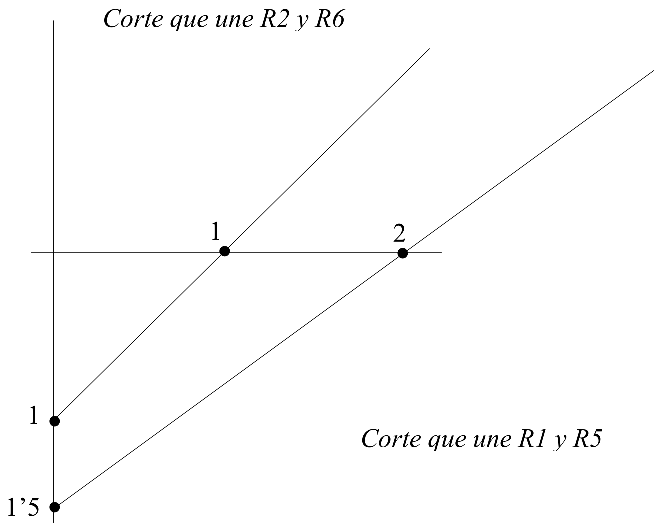
- R4: en esta región había dos que con este corte han sido divididas en dos, hay por tanto 2 + 2 regiones.



- R5: en esta región había dos que con este corte una de ellas ha sido dividida en dos, en consecuencia hay 2 + 1 regiones.

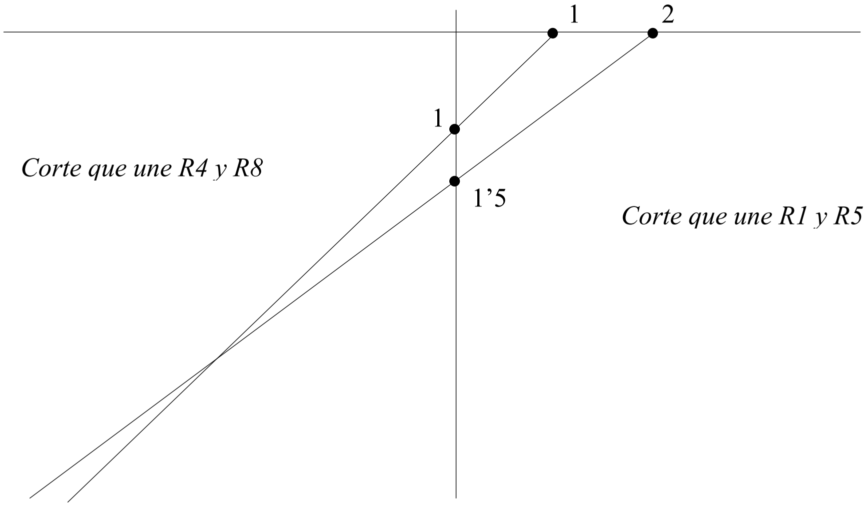


- R6: en esta región había dos, ahora una de ellas ha sido dividida en dos, por lo que hay 2 + 1 regiones.



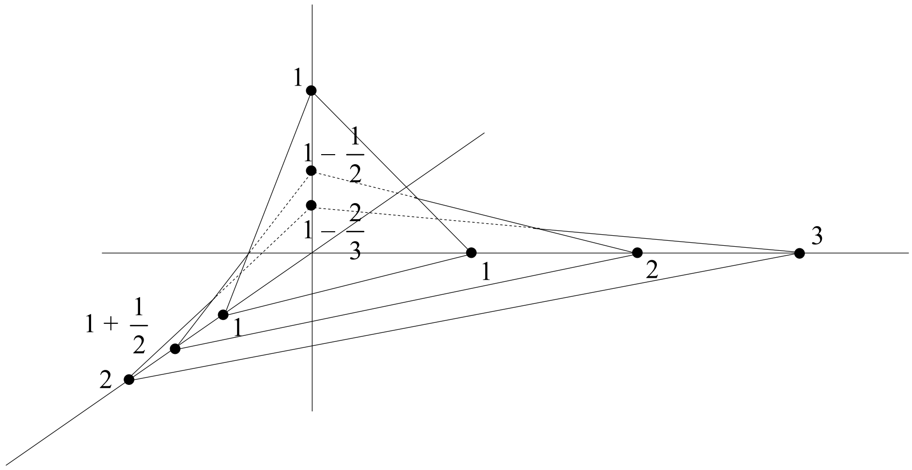
- R7: esta región no se ve alterada por el nuevo corte, en consecuencia sigue siendo una sola región.

- R8: en esta región había dos que con este corte han sido divididas en dos, hay por tanto 2 + 2 regiones.



En total, podemos contar 26 regiones tras este quinto corte.

Definimos el corte siguiente construyendo un nuevo tetraedro de tal y como se puede ver en la imagen:

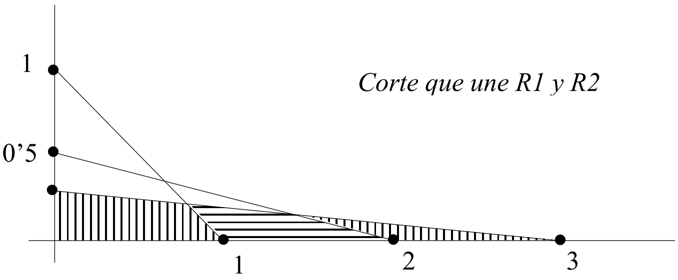


Este nuevo corte interseca en puntos distintos con todas las rectas formadas por parejas de cortes precedentes, dando lugar así a un número máximo de regiones.

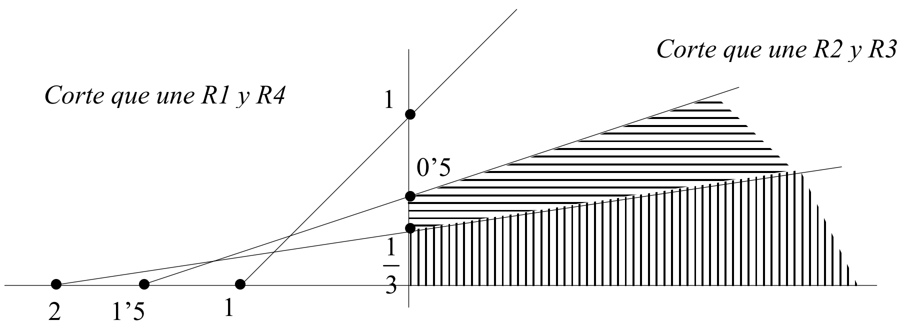
Contamos a continuación las regiones que hay tras este corte dentro de cada una de las ocho regiones iniciales, ayudándonos, igual que antes, de dibujos planos que interpretan el paso del corte por cada una de las regiones iniciales:

- R1: contenía cuatro regiones, que el nuevo tetraedro respeta, creando además tres regiones nuevas limitadas por él mismo una dentro del tetraedro inicial, otra dentro del segundo tetraedro y una tercera fuera de ambos, por lo tanto hay 2 + 2 + 3 regiones.

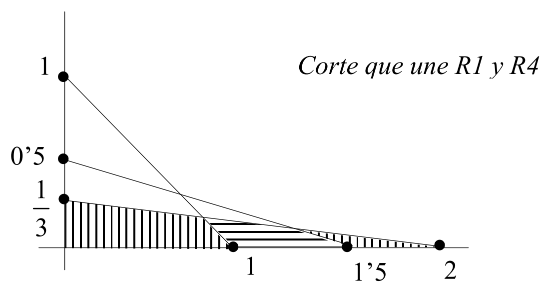
- R2: en esta región había cuatro regiones a las que el nuevo corte añade tres nuevas regiones, rayadas en la imagen, en consecuencia hay 2 + 2 + 3 regiones.



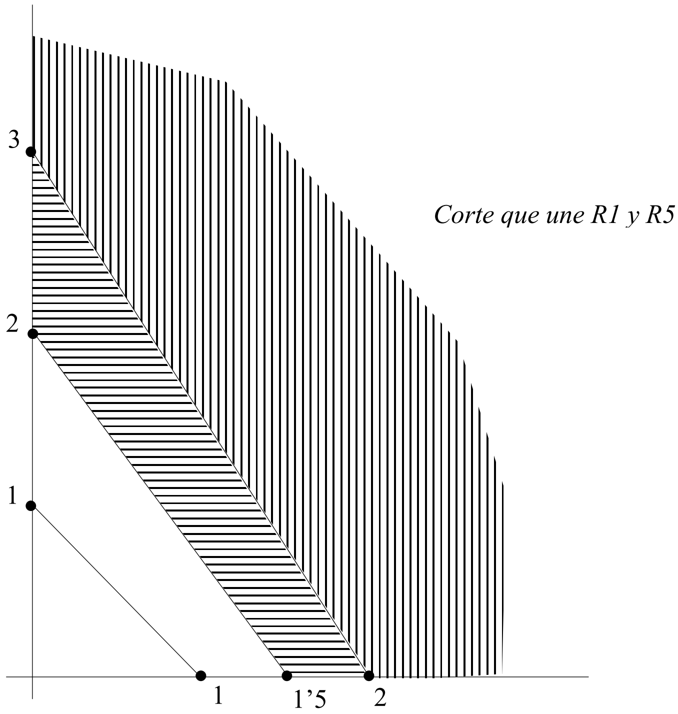
- R3: en esta región había tres, con este nuevo corte una de ellas ha sido dividida en dos, nuevas regiones que aparecen rayadas en la figura siguiente, en consecuencia hay 2 + 1 + 1 regiones.



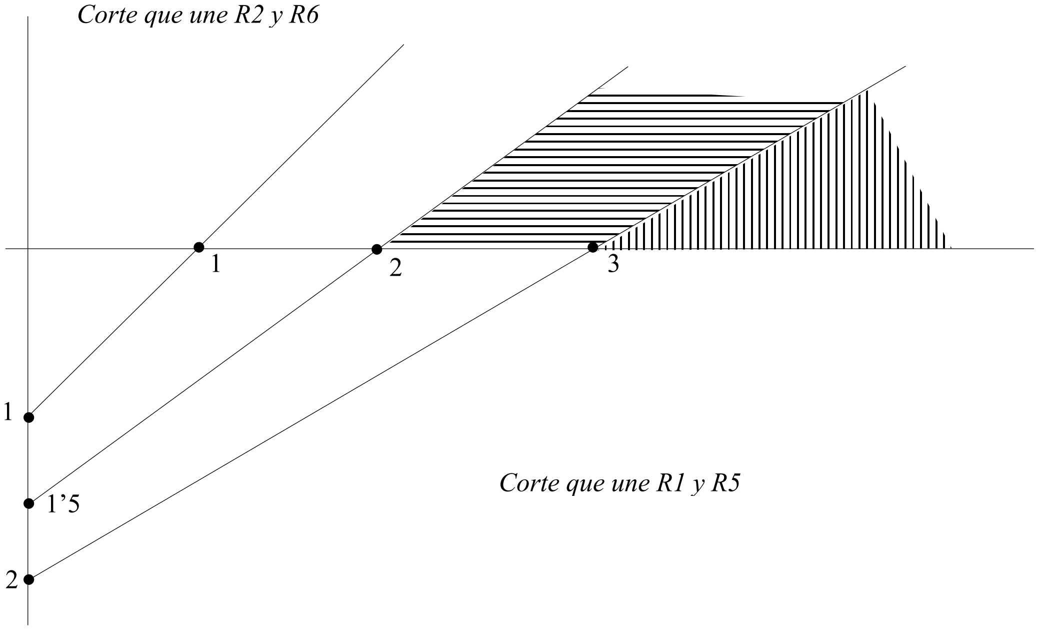
- R4: en esta región había cuatro regiones a las que el nuevo corte añade tres nuevas regiones, marcadas en la imagen, por lo que hay 2 + 2 + 3 regiones.



- R5: en esta región había tres, con este nuevo corte una de ellas ha sido dividida en dos, en consecuencia hay 2 + 1 + 1 regiones.



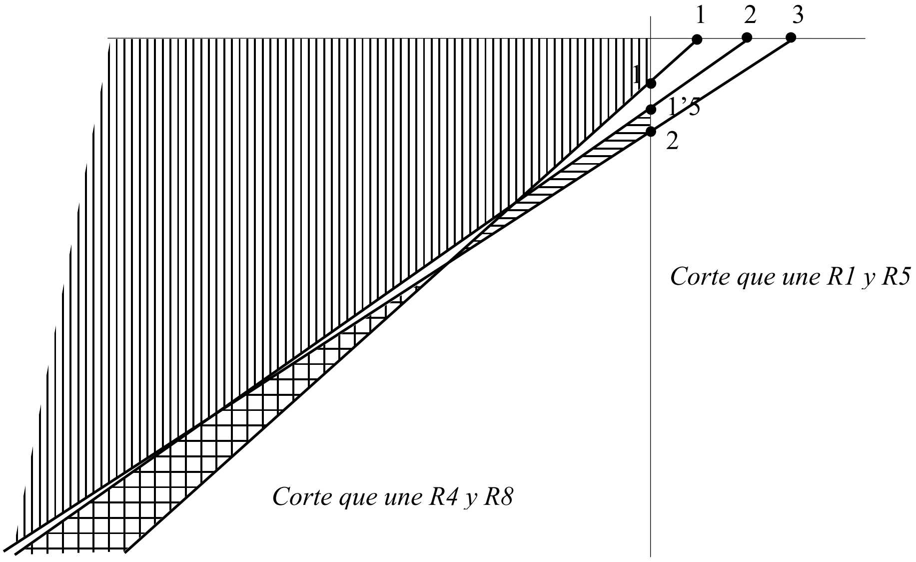
- R6: como en el caso anterior, en esta región había tres, con este nuevo corte una de ellas ha sido dividida en dos, por lo que habrá 2 + 1 + 1 regiones.



- R7: esta región no se ve alterada por el nuevo corte, en consecuencia sigue siendo una sola región.

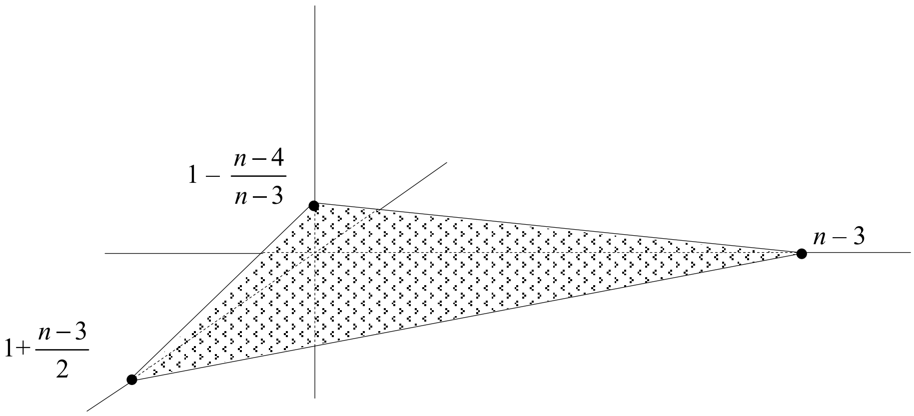
XIII OLIMPIADA

- R8: en esta región había cuatro regiones a las que el nuevo corte divide en dos a tres de esas regiones, en la imagen están marcadas tres de ellas, por lo que hay 2 + 2 + 3 regiones.



En total, podemos contar 41 regiones tras este corte.

En general, definimos el corte n-simo, para $n>3$, utilizando el tetraedro siguiente:



de modo que, contando el número de regiones contenidas en cada una de las regiones anteriores, tenemos:

- R1, R2, R4 y R7:

corte 4.......................... 1 + 1
" 5.......................... 1 + 1 + 2
" 6.......................... 1 + 1 + 2 + 3
" 7.......................... 1 + 1 + 2 + 3 + 4
....
" n.......................... $1 + 1 + 2 + 3 + 4 + ... + (n-3)$

ahora, utilizando la fórmula de la suma de los (n – 3) primeros números naturales, tenemos:

$$1 + 1 + 2 + 3 + 4 + ... + (n - 3) = 1 + \frac{(n-3)+1}{2}.(n-3)$$

de donde operando obtenemos $1 + \dfrac{(n-2)(n-3)}{2}$ regiones.

- R7: una región.
- R3, R5 y R8:

corte 4.......................... 2
“ 5.......................... 2 + 1 = 3
“ 6.......................... 3 + 1 = 4
“ 7.......................... 4 + 1 = 5
....
“ n.......................... (n – 2)

Reuniendo toda esta información, tenemos que el número total de regiones tras el corte n será:

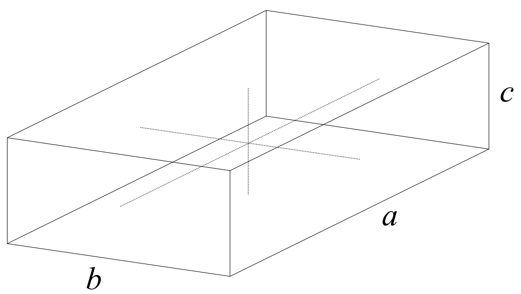
$$\left(1+\frac{(n-2)(n-3)}{2}\right).4+1+(n-2).3$$

y operando llegamos a que:

Nº de regiones tras el corte n = 5 + (n – 2).(2n – 3)

Para concluir debemos adaptar las unidades de este estudio general a las dimensiones del queso, que supongamos son como las de la imagen, siendo $a > b > c$, realizaremos los tres primeros cortes, haciendo que el punto de intersección de los tres cortes coincida con el centro del queso, ahora comenzamos a realizar el resto de cortes, tomando como unidad una longitud que verifique:

$$(n-3).unidad < \frac{a}{2}$$



siendo la relación:

$$unidad < \frac{a}{2(n-3)}$$

PROBLEMAS SELECCIONADOS, PROPUESTOS Y RESUELTOS POR LA COMISIÓN ORGANIZADORA DE LA XIII OLIMPIADA MATEMÁTICA

ANTONIO BUENO AROCA

ANTONIO DÍAZ CARRILLO

BERNARDINO DEL CAMPO LÓPEZ

JESÚS GARCÍA SEGOVIA

JUAN EMILIO GARCÍA GIMÉNEZ

JUAN MARTÍNEZ-TÉBAR GIMÉNEZ

RAMÓN CUENCA CUENCA

SANTIAGO TURÉGANO MORATALLA

SERAPIO GARCÍA CUESTA

VICENTE PASCUAL FIDALGO