EL CÁLCULO SEGÚN EULER

Eduardo Tellechea Armenta

"Calculaba sin esfuerzo aparente,
como otros hombres respiran o como
las águilas se sostienen en el aire..."

Dominique Francois Arago

(1786-1853)

INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS INFINITESIMAL

Leonhard Euler nació en Brasilea, Suiza, el 15 de abril de 1707. En el año de 1720 conoció a Jean Bernoulli, quien debido a la muerte de Leibniz y el retiro de Newton de la actividad científica, era considerado como el más destacado matemático del momento. A mediados de 1722 se graduó de bachiller y dos años después obtuvo el grado de Maestro. En 1726 publicó su primer trabajo que tituló "*Constructio linearum isochronarum in medio quocunque resistente*". Esta memoria contribuyó a aumentar la gran admiración de Johann Bernoulli hacia él, ya que ahí se muestra claramente el estilo que siempre lo acompañó, el cual es descrito con mucha claridad en la siguiente expresión de Nicolás Caritat de Condorcet (1743-1794), el famoso matemático y revolucionario francés:

> *"Cuando publicaba una memoria sobre un asunto nuevo, exponía con sencillez el camino que había recorrido, haciendo observar sus dificultades y vericuetos, y luego de hacer seguir a sus lectores la marcha de su espíritu durante los primeros ensayos, les enseñaba cómo había logrado encontrar el camino más fácil, lo que demuestra que prefería la instrucción de sus discípulos a la satisfacción que pudiera producirle el asombro de ellos, y creía no hacer bastante por la ciencia si no agregaba a las verdades nuevas con que la enriquecía, la sincera exposición de las ideas que le habían conducido a su descubrimiento"* .

Este estilo no sólo enseña que se puede ser un gran científico y a la vez escribir con mucha claridad, sino que también muestra una serie de elementos positivos de su personalidad, ya que lo que un hombre escribe es el mejor reflejo de los aspectos más significativos de su manera de ser.

En 1748, Euler publicó en Lausana, Suiza, el primero de sus tres grandes tratados sobre cálculo: *Introductio in Analysi Infinitorum*. Esta obra, una de las más importantes en la historia del cálculo infinitesimal y de la geometría analítica, recoge resultados que había escrito en memorias anteriores, presenta nuevos aportes y desarrolla algunos de los principales conceptos que sobre el tema habían obtenido sus predecesores, como Newton, Leibniz y los Bernoulli. La obra está integrada por dos libros; fue traducida al francés en

1785 y al alemán en 1788. Actualmente existe una traducción al inglés, editada por Springer Verlag en 1988.

ALGUNOS RESULTADOS DE ESTA OBRA

1. En el capítulo VI introdujo el concepto de logaritmo, diciendo que si a > 1, el logaritmo de x en base a, es el exponente z tal que $a^z = x$, siendo esta la primera vez que se presentaba el logaritmo interpretado como un exponente.

2. A continuación analizaremos algunos importantes resultados obtenidos por Euler, en cuyos desarrollos podemos darnos cuenta de que no se preocupaba por determinar para qué valores son o no convergentes las series que obtuvo.

   En el capítulo VII introduce el número e de la siguiente manera:
   Como $a^0 = 1$, entonces para un valor ξ infinitamente pequeño, escribe:
   $$a^{\xi} = 1 + k\xi .$$
   Si x es un número positivo, $\frac{x}{\xi}$ es un número infinitamente grande; por tal razón lo identifica con un número N de valor infinito y entonces como $\frac{x}{\xi} = N$,
   $$a^x = a^{N\xi} = (a^N)^{\xi} = (1+k\xi)^N .$$
   Aplicando luego la serie binomial, obtiene
   $$a^x = (1+\frac{kx}{N})^N \qquad \text{-------------------------} \quad \text{(I)}$$
   $$=1+N(\frac{kx}{N})+\frac{N(N-1)}{2}(\frac{kx}{N})^2+\ldots+\frac{N(N-1)\ldots(N-n+1)}{n!}(\frac{kx}{N})^n+\ldots$$
   $$= 1+\frac{k}{1!}x+\frac{N-1}{N}\frac{k^2}{2!}x^2+\ldots\frac{N-1}{N}\;\frac{N-2}{N}\ldots\frac{N-n+1}{N}\;\frac{k^n}{n!}x^n+\ldots$$
   Como N es infinitamente grande, considera que
   $$1=\frac{N-1}{N}=\frac{N-2}{N}=\ldots=\frac{N-m}{N}$$
   y, por lo tanto,
   $$a^x = 1+\frac{x}{1!}k+\frac{x^2}{2!}k^2+\ldots+\frac{x^n}{n!}k^n+\ldots \qquad \text{------------} \quad \text{(II)}$$
   Luego sustituye x por 1 y define el valor de e como el valor de a para el cual $k = 1$; es decir,
   $$e = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots$$

obteniendo así nuestra familiar representación en serie del número *e*.

Remplazando en (I) se obtiene

$$e^x = (1+\frac{x}{N})^N, \qquad \text{------------------------} \quad \text{(III)}$$

en donde N es infinitamente grande. Esta última expresión actualmente la interpretamos como la conocida fórmula

$$e^x = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n$$

de donde obtenemos el número *e* expresado como

$$e = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n.$$

También, si k = 1, la ecuación (II) se transforma en

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots,$$

lo que hace posible expresar al número *e* como una serie:

$$e = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m!}$$

3. En el Capítulo VIII, Euler define y prueba algunas de las propiedades más conocidas de las funciones trigonométricas, como

$$\sin^2 x+\cos^2 x = 1 \quad \text{y} \quad \sin(a+b) = \sin a\cos b+\sin b\cos a.$$

También presenta la identidad de De Moivre, la cual expresamos modernamente en la forma

$$(\cos\theta \pm i\sin\theta)^n = \cos n\theta \pm i\sin n\theta.$$

4. Su resultado más conocido acerca del estudio de exponentes imaginarios es la ecuación

$$e^{\pi i} = -1,$$

que relaciona las constantes más importantes de la matemática.

Aunque Newton ya había encontrado el desarrollo en series de potencias de las funciones seno y coseno, Euler las obtuvo por otro camino, veámoslo: Sea ξ un número infinitamente pequeño y N infinitamente grande (entero positivo); por la identidad de De Moivre, tenemos que:

$$\cos N\xi = \frac{1}{2}[(\cos\xi + isen\,\xi)^N + (\cos\xi - isen\,\xi)^N]$$

y

$$senN\xi = \frac{1}{2i}[(\cos\xi + isen\,\xi)^N - (\cos\xi - isen\,\xi)^N].$$

Utiliza a continuación el desarrollo binomial para obtener:

$$\cos N\xi = \cos^N \xi - \frac{N(N-1)}{2!}\cos^{N-2}\xi\,\sin^2\xi + \ldots \qquad \text{y}$$

$$\sin N\xi = N\cos^{N-1}\xi\sin\xi - \frac{N(N-1)(N-2)}{3!}\cos^{N-3}\xi\,\sin^3\xi + \ldots;$$

y como ξ es muy pequeño, identifica a cos ξ con cero y a sen ξ con ξ ; también, como N es muy grande, supone que N = N - 1 = N - 2 = ... Además, considera que ξ = N ξ y obtiene los hoy tan conocidos desarrollos en serie:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots, \qquad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

5. En este mismo capítulo demuestra que

$$\ln(1+x) = \lim_{n\to\infty} n[(1+x)^{\frac{1}{m}} - 1]$$

y también que

$$\ln(1+y) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{y^n}{n}$$

La manera de hacerlo es la siguiente:

Tomando $y = a^x - 1$, entonces $1 + y = a^x = a^{N\xi} = (1+k\xi)^N$, ------- (IV)
de donde

$$1 + k\xi = (1+y)^{\frac{1}{N}} \quad\Rightarrow\quad \xi = \frac{(1+y)^{\frac{1}{N}} - 1}{k} \quad\Rightarrow\quad \log_a(1+y) = N\xi$$

y, por lo tanto,

$$\log_a(1+y) = \frac{N}{k}[(1+y)^{\frac{1}{N}} - 1] \quad\Rightarrow\quad \ln(1+y) = N[(1+y)^{\frac{1}{N}} - 1] \qquad \text{-------- (V)}$$

Esta última expresión la identificamos ahora como:

$$\ln(1+y) = \lim_{n\to\infty} n[(1+y)^{\frac{1}{n}} - 1]$$

Claramente, si 1 + y = z, y m =1/n, la expresión anterior se transforma en

$$\ln z = \lim_{n\to\infty}\frac{z^m - 1}{m}$$

y utilizando nuevamente la serie binomial, obtenemos:

$$(1+y)^{\frac{1}{N}} = 1 + \frac{1}{N}y + \frac{1/N(1/N-1)}{2!}y^2 + \frac{1/N(1/N-1)(1/N-2)}{3!}y^3 + \ldots$$

pero como N es infinitamente grande, tomamos $1/N - k = -k \quad \forall k \in Z$, y entonces

$$N[(1+y)^{1/N} - 1] = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - ... + (-1)^{n+1}\frac{y^n}{n} + ...$$

Finalmente, remplazando en (V), obtenemos:

$$\ln(1+y) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{y^n}{n}.$$

Como podemos apreciar, muchos de los pasos que acabamos de ver requieren de una sólida justificación matemática, pero aunque Euler reconocía la necesidad de ser cauteloso al tratar con procesos infinitos, sacrificó esa cautela en pro de resultados prácticos. Algunas veces inclusive llegó a resultados falsos como, por ejemplo, sustituir $x = 2$ en la serie geométrica $\frac{1}{1+x} = 1 + x + x^2 + x^2 + \ldots$, obteniendo el absurdo: $-1 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + ...$

Fue hasta principios del siglo XIX cuando Abel logró corregir muchos de los errores cometidos por Euler en el manejo de las series, dándoles la solidez necesaria para la adquisición de rigurosidad científica.

6. En el capítulo IV define lo que él entiende por función, de la siguiente manera: "*Una función de cantidad variable es una expresión analítica formada de cualquier manera por esta cantidad variable y por números o cantidades constantes*". Por supuesto que esta definición difiere de la que actualmente utilizamos; sin embargo, en su época tuvo un gran éxito ya que la *Introductio* es el primer trabajo matemático que se escribió, en donde el concepto de función juega un papel central, y trajo como consecuencia un tratamiento del cálculo infinitesimal independiente de la geometría. Siete años después, en el prólogo de sus *Institutiones calculi differentialis***,** logra dar una definición de función que es similar a la que conocemos actualmente. Al respecto escribió: " *Algunas cantidades en verdad dependen de otras, si al ser combinadas las últimas, las primeras también sufren cambio, entonces las primeras se llaman funciones de las últimas. Esta denominación es bastante natural y comprende cada método mediante el cual una cantidad puede ser determinada por otras. Así, si x denota una cantidad variable, entonces todas las cantidades que dependen de x en cualquier forma, están determinadas por x y se les llama funciones de x*"

7. Los capítulos IV, XIII y XVII, están destinados al estudio de algunas series, en especial series de potencias, y sus relaciones con los productos infinitos; por ejemplo, partiendo de la serie

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

o su equivalente, para $x \neq 0$,

$$\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\dots ,$$

si $z = x^2$, el lado derecho de esta última serie se transforma en

$$1-\frac{z}{3!}+\frac{z^2}{5!}-\frac{z^3}{7!}+\frac{z^4}{9!}\dots$$

Cuando sen$x$ = 0, esta serie puede concebirse como un polinomio de grado infinito. Sea $P(z)$, como se describe abajo, el polinomio de grado n asociado a la serie

$$P_n(z)=1-a_1z+a_2z^2-a_3z^3+\dots+(-1)^n a_n z^n$$

$$=(-1)^n a_n\left[z^n-\frac{a_{n-1}}{a_n}z^{n-1}+\dots+(-1)^{n-1}\frac{a_1}{a_n}z+(-1)^n\frac{1}{a_n}\right];$$

haciendo un poco de teoría de ecuaciones y utilizando el teorema de factorización completa para polinomios, Euler demuestra que si $r_1, r_2, r_3, \dots r_n$ son las raíces del polinomio, se dan las siguientes relaciones entre los coeficientes y las raíces:

$$(-1)^{n-1}\frac{a_1}{a_n}=(-1)^{n-1}\sum_{j=1}^{n}\frac{\prod_{i=1}^{n}r_i}{r_j} \quad \text{y} \quad (-1)^n\frac{1}{a_n}=(-1)^n\prod_{i=1}^{n}r_i\ .$$

Estas dos ecuaciones se transforman en

$$a_1=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{r_j} \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{a_n}=\prod_{i=1}^{n}r_i\ ;$$

sustituyendo en la expresión para $P_n(z)$, obtenemos (sin desarrollo)

$$1-a_1z+a_2z^2+\dots+(-1)^n a_n z^n=\left(1-\frac{z}{r_1}\right)\left(1-\frac{z}{r_2}\right)\dots\left(1-\frac{z}{r_n}\right).$$

Como las raíces de la ecuación infinita

$$senx=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots$$

son $\pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots$, las raíces de la ecuación

$$\frac{senx}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\dots$$

(o bien, si tomamos $z = x^2$, las raíces de

$$\frac{sen\sqrt{z}}{\sqrt{z}}=1-\frac{z}{3!}+\frac{z^2}{5!}-\frac{z^3}{7!}+\dots)$$

serán $\pi^2, 4\pi^2, 9\pi^2, 16\pi^2, \dots$

Combinando los resultados anteriores se obtiene:

$$\frac{senx}{x}=\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{16\pi^2}\right)\dots$$

y si hacemos que $n \to \infty$ en la expresión $a_1 = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{r_j}$, tomando en cuenta que $r_j = (j\pi)^2$ y $a_1 = \frac{1}{3!}$, se obtiene

$$\frac{1}{6} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(j\pi)^2} = \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \frac{1}{16\pi^2} + \ldots,$$

de donde

$$\frac{1}{\pi^2}\left[1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots\right] = \frac{1}{6} \quad \text{o} \quad \frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{6},$$

y finalmente se obtiene la ecuación buscada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Otros resultados obtenidos en forma similar por Euler, relativos a series numéricas, son:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

UNA ANÉCDOTA

Euler fue un hombre de profundas convicciones religiosas, y llegó incluso a pensar en poder encontrar una demostración algebraica de la existencia de Dios. Era tal el prestigio de que gozaba, que sus contemporáneos pensaron que sí la había encontrado. En cierta ocasión, aprovechando estos rumores, pudo salir airoso en un "debate" que sostuvo con el famoso filósofo francés Denis Diderot (1713-1784), acerca de la existencia de Dios. La anécdota es la siguiente:

Conocedor Euler del pensamiento de Diderot al respecto, así como también del desconocimiento total que éste tenía de las matemáticas, resolvió retarlo para que refutara, ante la presencia de la zarina Catalina II, una prueba que él dijo poseer referente a la existencia de Dios. A ello, Diderot inocentemente accedió. La expectación era enorme, ya que se enfrentaban públicamente dos titanes del pensamiento; de ahí que no sólo concurrió la nobleza, sino también lo más granado de la Academia de San Petersburgo. El "debate" lo inició Euler, acercándose a Diderot y diciéndole en tono fuerte y convincente:

"Señor, $\frac{a+b^n}{n} = x$, y por lo tanto, Dios existe. Replique".

Como es obvio, nada pudo responder Diderot, y el silencio en que permaneció sólo vino a romperse con la risa burlona de los que sí entendían de matemáticas. Diderot pidió permiso a Catalina para retirarse y se marchó inmediatamente a Francia. Euler tomó así desquite de las burlas a que había sido sometido en Berlín, por el también filósofo francés Voltaire (1694-1778).

EL MÁS PROLÍFICO EN LA HISTORIA DE LA MATEMÁTICA

Para tener una idea de la gran obra de Euler, diremos que desde 1911 se viene trabajando en la publicación de su obra completa, pero hasta la fecha no se vislumbra la posibilidad de que puedan terminarla en breve tiempo. Hasta 1945, sólo se habían publicado 72 volúmenes, y desde 1967, las academias de Ciencias de Suiza y de la ex-URSS, unieron esfuerzos para poder producir una obra con la correspondencia científica de Euler.

Los cálculos más pesimistas, afirman que publicó como mínimo 760 trabajos de investigación, y a su muerte dejó inéditos muchos de sus artículos. Aun en la actualidad no se conocen cerca de 3000 páginas de sus escritos. El volumen de su creación científica es superior al de cualquier otro matemático. La variedad y cantidad de algoritmos que creó, no han podido ser superados por nadie, No hubo rama de la Matemática de su época en la que no hubiera trabajado, y en la mayoría de ellas dejó su huella creadora. Por los motivos que acabamos de mencionar, Leonhard Euler es considerado como el matemático más prolífico de todos los tiempos.

Por cualquier camino que sigamos nos encontramos con él, ya sea en su producción científica o en las notaciones que introdujo. Recordemos que a él se debe la expresión $f(x)$, las notaciones $sen\theta$, $cos\theta$, el símbolo i para designar la raíz cuadrada de –1; el uso de la letra π, de la letra e, la introducción de los llamados diagramas de Euler-Venn, y la del símbolo Σ.

REFERENCIAS

[1] Aguilar Quiroz, Gonzalo (2001). *Un resultado de Leonhard Euler relativo a series infinitas*. Miscelánea Matemática No.33, editada por la Sociedad Matemática Mexicana, México.

[2] Castro Chadid, Ivan (1996). *Leonhard Euler*. Grupo Editorial Iberoamérica, México.

[3] Euler, Leonhard (1988). *Introduction to Analysis of the Infinite. Book I.* Translated by John Blanton. Springer Verlag, New York.

[4] Euler, Leonhard (1990). *Introduction to Analysis of the Infinite. Book II.* Translated by John Blanton. Springer Verlag, New York.