EL NACIMIENTO DEL CÁLCULO

Martha Cristina Villalba y Gtz.

INTRODUCCIÓN

Ciertas prácticas didácticas –particularmente aquí en México- tienden a dejarnos la idea de que los avances de la ciencia -y de la cultura en general- se deben a hechos gloriosos y descubrimientos geniales llevados a cabo por personajes heroicos, privilegiados, en quienes descansa el mérito absoluto del desarrollo científico, artístico y tecnológico que sustenta la evolución de la cultura. Sin embargo, como resultado de un estudio más veraz, nos damos cuenta de que detrás de cualquier invento o descubrimiento existe, infaliblemente, la evolución de ideas que hacen su génesis posible. Un esfuerzo como el emprendido en este Seminario de Historia de las Matemáticas nos ofrece un espacio de reflexión acerca del enorme acervo de conocimiento que a través de los años se acumula, se desarrolla y evoluciona para dar lugar, en algún momento en particular y a través de algún personaje en especial, a la génesis de una idea "nueva" que por su circunstancia deviene en un descubrimiento importante para el estado actual de la ciencia y es, por lo tanto, reconocida como tal.

En particular, el nacimiento del cálculo -consignado en el siglo XVII- atribuido a Newton y Leibniz, nos permite ilustrar claramente lo dicho: Estos dos hombres han sido considerados como los inventores del cálculo en el sentido de que dieron a los procedimientos infinitesimales de sus predecesores inmediatos, Barrow y Fermat, la unidad algorítmica y la precisión necesaria para ser considerados como un método novedoso y de generalidad suficiente para su desarrollo posterior. A su vez, los procedimientos de Barrow y Fermat estuvieron elaborados a partir de visiones de hombres como Torricelli, Cavalieri, y Galileo; o Kepler, Valerio, y Stevin. Los alcances de las operaciones iniciales con infinitesimales que estos hombres lograron, fueron también resultado directo de las contribuciones de Oresme, Calculator, Arquímedes y Eudoxo. Finalmente el trabajo de estos últimos estuvo inspirado por problemas matemáticos y filosóficos sugeridos por Aristóteles, Platón, Zenón y Pitágoras. Sin la filiación de ideas como las de éstos y de muchos otros hombres más, el cálculo de Newton y Leibniz sería impensable.

Por otro lado, debe entenderse que el progreso de las ideas no se da en el tiempo a través de una trayectoria perfectamente delineada y preconcebida; existen muchos elementos que en el camino son descartados, reformulados o añadidos. Las concepciones filosóficas sobre la realidad, el papel de la ciencia, y en especial las concepciones sobre las características que debe reunir el conocimiento matemático para ser considerado como conocimiento científico, han determinado los enfoques asumidos en cada época, de tal manera que el impacto que tuvieron los personajes y las contribuciones consignadas en la historia difícilmente puede ser comprendida cabalmente si estas consideraciones no se toman en cuenta.

Con estas reflexiones en mente, la relación de algunas aportaciones que hicieron posible el nacimiento del Cálculo y que a continuación trataremos de resumir, tiene la finalidad de que cada uno de nosotros encuentre más interés en dar apoyo y mejores significaciones a cada uno de los conceptos que hasta ahora conforman nuestro conocimiento de esta disciplina. Este es, insisto, tan sólo un breve resumen de algunas aportaciones importantes –que posiblemente deje muchas sin considerar-, por lo tanto, no más que una invitación a una indagación más profunda sobre las ideas y los hechos presentados.

PERSONAJES Y CONTRIBUCIONES EN LA ANTIGÜEDAD

El trabajo prehelénico de los Egipcios y Babilonios, aunque tuvo una ausencia de generalidad y atención a las características esenciales sobre la naturaleza lógica del pensamiento matemático y su necesidad de pruebas deductivas, logró un acervo tal de cálculos y procedimientos concretos, que tuvo sin duda, una clara influencia en los trabajos iniciales de los filósofos y matemáticos griegos:

- **Tales de Mileto.** Fue quien inicialmente introdujo los métodos deductivos – no exentos de cierto empirismo y falta de generalidad- a través de procesos sistemáticos de abstracción, que ciertamente fueron la base para los **Pitagóricos**. Para ellos la perfecta consonancia de la realidad observada con la naturaleza de los conocimientos matemáticos les llevaron a pensar que las matemáticas estaban en la realidad última, en la esencia del universo y por lo tanto, "un entendimiento de los principios matemáticos debía preceder cualquier interpretación válida de la naturaleza". "Todo es número". "Dios es un Geómetra".

- **Zenón de Elea** (450 a. de C. aprox.), formuló un buen número de problemas (**paradojas**) basados en el **infinito**.
  Para los antiguos griegos, los números como tales eran razones de números enteros, por lo que no todas las longitudes eran números. (Existían magnitudes geométricas que no podían ser medidas por números; números como entidades discretas vs magnitudes geométricas continuas.)

- **Eudoxo** (408 a. de C. - 355 a. de C.) de Cnido, Asia Menor (Turquía).
  - **Método de Exhaución.** El método se llama así porque se puede pensar en expandir sucesivamente áreas conocidas de tal manera que éstas den cuenta ("dejen exhausta") del área requerida. Cobra importancia como recurso para hacer demostraciones rigurosas en geometría.

- **Arquímedes** (225 a.de C.) de Siracusa. Hizo una de las más significativas contribuciones griegas. Su primer avance importante fue mostrar que el área de un segmento de parábola es 4/3 del área de un triángulo con la misma base y vértice, y 2/3 del área del paralelogramo circunscrito. Éste es el primer ejemplo conocido de la adición de una serie infinita. Arquímedes utilizó el método de exhaución para encontrar una aproximación al área del círculo. Por supuesto, es un ejemplo temprano de integración, el cual condujo a aproximar valores de π . Entre otras "integrales" calculadas por Arquímedes, están el volumen y área de una esfera, volumen y área de un cono, área de una elipse, volumen de cualquier segmento de un paraboloide de revolución y de un segmento de un hiperboloide de revolución.

Por un lado, las paradojas de Zenón provocaron el escepticismo griego que más tarde plantea el cuestionamiento sobre la posibilidad de alcanzar el verdadero conocimiento, ya sea por la razón o la experiencia. Por otro lado, la ciencia aristotélica mostró que mediante la lógica y la observación es posible -al menos- conseguir una representación consistente del fenómeno estudiado; las matemáticas, por lo tanto, vienen a ser con Euclides un patrón idealizado de relaciones deductivas. Los postulados inducidos por la observación de la realidad, generan por la deducción una consistente y funcional interpretación de la naturaleza.

La dificultad lógica que enfrentaron los antiguos matemáticos griegos en sus intentos de expresar sus ideas intuitivas sobre razones o proporciones de líneas -que vagamente reconocían como continuas-, en términos de números -los que mantenían como discretos-, los involucró con un concepto lógicamente insatisfactorio (pero intuitivamente atractivo): el infinitesimal. La imposibilidad de enfrentarlo ampliamente originó que los problemas sobre la variación no fueran atacados cuantitativamente por los matemáticos griegos. Estos problemas fueron retomados hasta el siglo XIV por los filósofos escolásticos, y su discusión, cualitativa en gran parte, pero apoyada en demostraciones gráficas, hizo posible la introducción posterior de la geometría analítica y la representación sistemática de cantidades variables.

PERSONAJES Y CONTRIBUCIONES EN LOS SIGLOS XVI-XVII

Una época de avances hacia la formulación posterior del Cálculo como estudio de la variación, una época en la que se enfrentó la necesidad de herramientas matemáticas que no tenían más fundamento que la geometría arquimediana para tratar con los inconmensurables; método cuya visión de rigor había obstaculizado trabajar más libremente con los infinitésimos, relacionados a la variación y al continuo.

- **Johannes Kepler (1571-1630).** Nació en Leonberg, Sacro Imperio Romano, hoy Alemania. En su trabajo sobre el movimiento planetario, tuvo que encontrar el área de sectores de una elipse; para ello su método consistió en determinar las áreas como sumas de líneas. En cambio, en su trabajo *Nueva Geometría Sólida de los Barriles de Vino* calculó en forma exacta o aproximada el volumen de más de 90 sólidos de revolución, considerando el sólido compuesto de infinitos cuerpos infinitesimales de volúmenes conocidos.

- **Bonaventura Cavalieri (1598-1647).** Publicó su "*Geometria Indivisibilis Continuorum Nova*" en 1635 donde expone el principio que lleva ese nombre. Su método consiste en comparar proporcionalmente los indivisibles de volúmenes o áreas de cuerpos o figuras por encontrar, con los respectivos indivisibles de figuras o cuerpos cuyas áreas o volúmenes se conocen. Se puede referir este procedimiento en forma general como un método de "Suma de potencias de líneas", que aunque alejado del rigor, condujo a Cavalieri a un resultado correcto para $\sum_{A}^{B} x^k$ con *k=1,2,3,4,5,6,7,8,9.*

- **Pierre de Fermat (1601-1665).** Trata de encontrar pruebas más o menos rigurosas de la conjetura de Cavalieri. En su trabajo sobre curvas polinomiales $y = f(x)$, compara el valor de $f(x)$ en un punto x, con el valor $f(x+E)$, con E

como un intervalo cada vez más pequeño alrededor de x, de tal manera que encuentra el valor de $\frac{f(x+E)-f(x)}{E}$ antes de que $E=0$.

PERSONAJES Y CONTRIBUCIONES EN EL SIGLO XVII

Gilles Persone de Roberval (1602- 1675). Cálculo de tangentes como vectores de “velocidad instantánea”. Cicloide: su área es 3 veces la del círculo que la genera.

John Wallis (1616-1703). Escribió su *Arithmetica Infinitorum* en 1655. Abordó sistemáticamente, por primera vez, la cuadratura de las curvas de la forma $y=x^k$ donde k no es necesariamente un entero positivo. Su trabajo en la determinación de los límites implicados fue empírico. Tuvo una influencia decisiva en los primeros desarrollos del trabajo matemático de Newton.

Isaac Barrow (1630-1677). Maestro de Newton. Competente en árabe y griego, mejoró traducciones de textos griegos. Punto de vista conservador en matemáticas. Sus *“Lectiones Geométriae*”, publicadas en 1670, incluyen los procedimientos infinitesimales conocidos por él. La mayoría de los problemas presentados tratan tangentes y cuadraturas desde un punto de vista clásico (geométrico en lugar de analítico). Incluye su método del “triángulo característico” en el que implícitamente se toma a la recta tangente como la posición límite de la secante.
En su obra aparece localizado el Teorema Fundamental del Cálculo en el sentido de presentar el carácter inverso entre problemas de tangentes y áreas, en un sentido estrictamente geométrico, no como un algoritmo de cómputo.

NACE EL CÁLCULO

Isaac Newton (1643-1727). En 1687 fue publicada su obra magistral *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* en el cual se exponen, en diferentes pasajes, claras exposiciones del concepto de límite, idea básica del cálculo.

Ofrece tres modos de interpretación para el nuevo análisis:

- aquél en términos de **infinitesimales** usado en su *De analysi*, su primer trabajo *(1669, publicado en1711)*;
- aquél en términos de **fluxiones,** dado en su *Methodus Fluxionum et Serierum Infinitorum (1671, publicado en 1736)*, en la que parece apelar con mayor fuerza a su imaginación;
- aquél en términos de **razones primeras y últimas o límites,** dado particularmente en la obra *De Quadratura Curvarum* que escribió al final y publicó primero *(1704)*, visión que él parece considerar más rigurosa.

Notación utilizada:

Si *fluentes* x, y entonces *fluxiones* $\dot{x}$, $\dot{y}$. Si *fluentes* $\dot{x}$, $\dot{y}$ entonces *fluxiones* $\ddot{x}$, $\ddot{y}$.

Si *fluxiones* x, y entonces *fluentes* $\overset{|}{x}$, $\overset{|}{y}$. Si *fluxiones* $\overset{|}{x}$, $\overset{|}{y}$ entonces *fluentes* $\overset{||}{x}$, $\overset{||}{y}$.

Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716). Sus resultados en el cálculo integral fueron publicados inicialmente en 1684, y posteriormente en 1686 bajo el nombre de "C*alculus Summatorius".* Introduce los elementos diferenciales *dy ó dx* para expresar la "*diferencia* entre dos valores sucesivos" de una variable continua *y* ó *x.* Al tomar la *suma* de tales diferenciales de la variable se obtiene la variable misma, lo cual denota por $\int dx$.

El "triángulo diferencial" que había sido estudiado en varias formas –particularmente en los trabajos de Torricelli, Fermat y Barrow- es el antecedente más cercano al enfoque que ofrece Leibniz en su tratamiento de *sumas* y *diferencias* -aunque él mismo aseguró que la inspiración inicial la encontró al estudiar el tratado de Pascal "*Traité des sinus du quart de cercle*".
Sus obras dan cuenta de un método generalizado para abordar esas *sumas* y *diferencias*, además del tratamiento inverso de ambas operaciones, mediante el uso de un sistema de notación y terminología perfectamente acoplado a la materia que trata en sus bases lógicas y operativas.

Leibniz siempre se dio cuenta que estaba trabajando con una nueva materia. Se especula que Newton, hasta que supo de esta postura de Leibniz consideró él mismo su método de *fluxiones* como una nueva materia también y un modo de expresión matemática organizado más que simplemente una útil modificación de reglas anteriores.

El trabajo más importante de cálculo de Newton estuvo escrito de 1665 a 1676, pero ninguna de sus obras fue publicada durante ese tiempo. Se ha sugerido que la demora en la publicación de sus tres principales trabajos fue ocasionada por el hecho de que estaba insatisfecho con los fundamentos lógicos de la materia. En su monografía "*De Analysi per aequationes numero terminorum infinitas"* no hace explícito el uso de la notación fluxional ni de la idea. En su lugar usa lo infinitamente pequeño, tanto geométrico como analítico de manera similar a la que encontramos en Barrow y Fermat, y extiende su aplicabilidad por el uso del Teorema del Binomio. En este documento, Newton emplea la idea de un pequeño rectángulo indefinido o "momento" de área y encuentra la cuadratura de las curvas como sigue:

"Sea la curva a ser dibujada por la abscisa *x* y la ordenada *y*, el área es

$$z = \left(\frac{n}{m+n}\right) a x^{\frac{m+n}{n}}$$

Tomemos un "***o***", momento o incremento infinitésimo en la abscisa, siguiendo la notación de James Gregory. La nueva abscisa será entonces $x + o$ y el área incrementada será

$$z + o\, y = \left(\frac{n}{m+n}\right) a (x+o)^{\frac{m+n}{n}}$$

Si en esta expresión aplicamos el teorema del binomio, dividimos por ***o*** y entonces negamos los términos que aún contengan ***o***, el resultado será $y = a x^{\frac{m}{n}}$.

Esto es, si el área esta dada por $z = \left(\frac{n}{m+n}\right) a x^{\frac{m+n}{n}}$, la curva será $y = a x^{\frac{m}{n}}$.

Inversamente, si la curva es $y = a x^{\frac{m}{n}}$, el área será $z = \left(\frac{n}{m+n}\right) a x^{\frac{m+n}{n}}$ [1]

[1] Citado en Boyer Carl B. "The History of the Calculus and its Conceptual Development"

Ésta es una expresión para el área a la cual se llega, no por la determinación de la suma de áreas infinitesimales, ni a través de métodos equivalentes usados por los predecesores de Newton desde Antifón a Pascal. En su lugar, como vemos, fue obtenida por la consideración de incrementos momentáneos en el área en el punto en cuestión. En otras palabras, mientras que las cuadraturas previas habían sido encontradas a través del significado o equivalencia de la integral definida como límite de una suma, Newton determina la primera razón de cambio del área y desde ésta, encuentra la propia área a través de lo que ahora llamamos la Integral Indefinida de la función.

Por su parte, Leibniz se esforzó desde un principio en popularizar su "nuevo análisis" publicando todas las reglas de operación, aún las más simples, presentándolas como si fueran reglas de álgebra y señalando la relación recíproca entre sus *"sumas"* y *"diferencias"* como análoga a la de potencias y raíces. Aunque la existencia de sus elementos fundamentales la apoyó en principios filosóficos, no se preocupó mucho en clarificar la naturaleza de lo infinitamente pequeño, no porque pretendiera hacer de ello un misterio, sino porque sostuvo que su Cálculo era un "*modus operandi*" y por lo tanto apeló sólo a la inteligencia para enfatizar la naturaleza algorítmica del método. Tal vez por ello se le considera como uno de los fundadores de la corriente formalista en oposición a la intuicionista en matemáticas: Estaba seguro de que si formulaba apropiadamente los símbolos y las reglas de operación, y si éstas eran propiamente aplicadas, algún resultado correcto y razonable se debería de lograr aún cuando fuera confusa la naturaleza de los elementos involucrados.

El primer recuento de sus hallazgos, Leibniz lo tituló *"Un Nuevo Método para Máximos y Mínimos como para Tangentes también, el cual no se obstruye por Cantidades Fraccionarias o Irracionales"*, un tratado de seis páginas que aparece publicado en 1684 y posteriormente se incluye en el "*Acta Eruditorum"*. En su contenido se explicitan, sin pruebas, las reglas para las sumas, productos, cocientes, potencias y raíces, y unas pocas de aplicaciones a problemas de tangentes y cálculos de máximos, mínimos y puntos de inflexión. Las "cuadraturas" las trata igualmente en publicaciones independientes posteriores, antes de ser incorporadas a su "*Acta Eruditorum"*.

Tanto Newton como Leibniz establecen en su método reglas operativas para sus principales elementos –"*fluxiones*" y "*diferencias*" respectivamente- y ambos las combinan haciendo notoria la propiedad inversa –"*fluente*" y "*suma*", respectivamente. Sin embargo, para ambos, la Diferenciación es la operación fundamental; la Integración se considera simplemente como la inversa de ella. Este es un punto de vista que prevalece en el Cálculo elemental actual. Lo que es importante señalar es que a ambos – Newton y Leibniz- se les considera como los "Fundadores del Cálculo" precisamente por haber establecido las reglas de operación y las relaciones descritas.

Cabe también considerar que las distintas formas de definir la integral que tuvieron Newton y Leibniz han heredado al Cálculo actual la Integral Indefinida y la Integral Definida: Mientras que Newton define el *fluente* como la cantidad generada por una *fluxión* dada – como lo vimos antes, es decir, como la cantidad que tiene una magnitud dada como su *fluxión*, o como la inversa de la *fluxión*-, Leibniz define la Integral como la suma de todos los valores de una magnitud, o como la suma de un número infinito de rectángulos estrechos, o –en la forma que lo expresamos actualmente- como el límite de cierta suma característica.

CONCLUSIÓN

Si bien las reglas de operación y las principales relaciones entre ellas quedaron claramente establecidas con Newton y Leibniz, y con ello salía a la luz una nueva materia: el Cálculo, todavía quedaba mucho por hacer. Sus fundamentos eran imprecisos, no solamente para sus autores, sino para los estudiosos de las matemáticas que les sucedieron en el siglo XVIII: durante ese tiempo se buscó pasar de la justificación basada en el pragmatismo dado por la consistencia de los resultados obtenidos, con la visión del mundo físico que ofrecía la geometría Euclideana, hacia una explicación que fuera más allá de lo intuitivamente plausible... Esto no fue posible hasta el siguiente siglo, en el que el éxito en el desarrollo del formalismo algebraico dio lugar al impulso de sistemas matemáticos independientes de los postulados afines a la experiencia sensorial. Fue hasta entonces que el Cálculo tuvo manera de adoptar sus propias premisas y construir sus propias definiciones sujetas solamente a los requerimientos de su consistencia interna.

Queremos insistir que en un bosquejo como éste se pretende resaltar la gran cantidad de aportaciones que contribuyeron al nacimiento del Cálculo y hacer notar que el desarrollo de sus conceptos principales, la derivada y la integral, tuvieron una larga evolución; primero para llegar a establecerse como operaciones inversas entre sí con sus reglas bien definidas, y luego para evolucionar en sus fundamentos desde argumentaciones asentadas en la experiencia sensible, hasta su elaboración final como abstracciones matemáticas definidas en términos de lógica formal mediante la idea de límite de una serie infinita. Así, la derivada y la integral están en el análisis matemático moderno definidas sintéticamente en función de consideraciones ordinales, y no en función de aquellas consideraciones de variación física y cantidades geométricamente continuas que les dieron origen.

REFERENCIAS

[1] Boyer, Carl B. (1991) "*A History of Mathematics*". John Wiley & Sons, Inc. USA.

[2] Collette, Jean Paul (1986) "*Historia de las Matemáticas*". Editorial Siglo Veintiuno, México.

[3] Edwards, C. H. (1979) "*The Historical Development of the Calculus"*. Springer- Verlag New York, Inc. USA.

[4] Newman, James R. (1980) "*El Mundo de las Matemáticas*". Enciclopedia Sigma, Tomo 4. Ediciones Grijalbo, México.

[5] Struik, Dirk J. (1967) *"A concise History of Mathematics"*. Dover Publications, Inc. New York, USA.

[6] Thuiller, Pierre (1991). *"De Arquímedes a Einstein. Las Caras Ocultas de la Invención Científica"*. Consejo Nacional para la Cultura y las Artes / Editorial Alianza. México.

SITIOS EN LA RED

[7] http://smard.cqu.EDU.AU/Links/Websites/History_of_Mathematics/

[8] http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Indexes/_1000_AD.html

[9] http://math.rice.edu/~lanius/Geom/his.html