APOLONIO, EL GEÓMETRA DE LA ANTIGÜEDAD

Francisco Javier Tapia Moreno

INTRODUCCIÓN

De los tres grandes matemáticos del helenismo: Euclides, Arquímedes y Apolonio, este último ha sido el menos conocido a lo largo de los siglos. Aunque del personaje Euclides no sabemos casi nada, su obra fue pronto el paradigma de la sistematización del saber matemático, la obra de los fundamentos, y conservó este halo por siempre. Arquímedes, por su genio polifacético y por las leyendas creadas alrededor de su persona, coronadas con la historia de su muerte, es sin duda, de entre los tres, la figura más conocida universalmente. Apolonio representa la grandeza técnica especializada, el virtuosismo geométrico por excelencia. Es verdad que su obra hizo olvidar lo que antes de él se había escrito en el campo de su mayor brillantez, las cónicas, pero por su carácter tan especializado y tan difícil, ni siquiera esta obra maestra, ***Las Cónicas,*** se conoce hoy en su integridad y más de la mitad de ella permaneció oculta para el mundo occidental hasta que fue publicada por Edmond Halley en 1710.

Los tres genios griegos de la matemática representan una nueva era y son verdaderos hijos de su época histórica. El **helenismo** significa, tanto en política como en filosofía, una auténtica fragmentación. En política, el imperio de Alejandro se fragmenta en reinos más o menos pequeños que compiten en ser dignos herederos de la tradición del siglo de oro helénico. En filosofía se produce también una fragmentación del saber unificado al que Platón y Aristóteles, siguiendo el trazo de la corriente pitagórica, aspiraron. El saber orientado hacia el hombre, con sus hondas conexiones con la estética, ética, religión, política,... cede el paso al saber especializado que en matemáticas viene a ser representado por Euclides, Arquímedes y Apolonio, y muy particularmente por este último.

EL ENTORNO DE APOLONIO

Los datos de la vida de Apolonio son ciertamente escasos y casi todos ellos provienen de algunas noticias que aparecen en las introducciones de los diferentes libros de *Las Cónicas*.

Apolonio nació a mediados del siglo III a. de C. en Perga (ver figura 1), ciudad situada en Panfilia, según Heath hacia el 262 a. de C., según otros entre 246 y 221. Fue probablemente unos veinte años más joven que Arquímedes. Parece que estudió o pasó largo tiempo en Alejandría, cuyo Museo y Biblioteca constituían en aquel tiempo el centro del saber occidental.

Parece extraño que, a pesar de esto, Apolonio no dedicara alguno de los libros de su gran obra, *Las Cónicas*, a ninguno de los reyes de Alejandría, Tolomeo III Euergetes (246-222) Tolomeo IV Filopator (222-205), ... sino a personajes de Pérgamo, Eudemo (libros I, II, III) y Atalo (tal vez el rey Atalo I de Pérgamo, 241-197, libros IV-VIII). Sarton se pregunta si

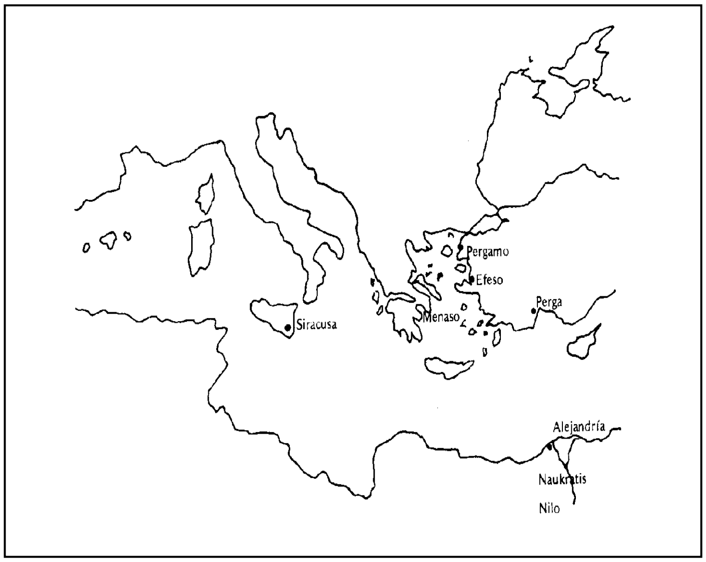

Figura 1

pudo ser debido a problemas que surgieran entre Apolonio y las autoridades del Museo. Apolonio pasó algún tiempo también en Pérgamo y en Efeso.

Las Cónicas fueron con certeza una obra de madurez, compuestas en Alejandría, pues envía el segundo libro a Eudemo, en Pérgamo, a través de su hijo Apolonio. Parece ser que el período de máximo florecimiento de Apolonio tiene lugar en el reinado de Tolomeo Filopator (222-205). De su muerte no se sabe nada en absoluto, ni dónde, ni cuándo, ni cómo.

De entre los personajes nombrados en los prólogos de los libros de *Las Cónicas* se pueden identificar Eudemo y Filónides. Filónides fue matemático y filósofo epicúreo conocido personalmente por el rey seleúcida Antíoco IV Epifanes (175-163) y por Demetrio Sotero (163-150). Eudemo parece haber sido el primer maestro de Filónides. Así, la presentación por Apolonio a Eudemo del joven Filónides tuvo lugar probablemente a comienzos del siglo II. Las Cónicas debieron ser escritas por entonces y estas fechas casan bien con la evidencia interna de la dependencia de Apolonio en otras obras con respecto a Arquímedes, que murió ya anciano en 212.

CÓNICAS PRECEDENTES A LAS DE APOLONIO

El trabajo más importante de Apolonio se refiere a las secciones cónicas. La cuestión previa interesante que en este apartado examinaremos es la siguiente: ¿qué se sabía sobre cónicas antes de Apolonio?

Debido precisamente a la perfección de la obra de Apolonio, los tratados que sobre cónicas fueron escritos antes que el suyo, no han sido conservados. Se conocen noticias aisladas que se pueden encontrar en los escritores que describen el desarrollo de la geometría.

Menecmo, hacia 350 a. de C., se ocupa del problema clásico de la duplicación del cubo (construir un cubo de doble volumen que otro dado), en cuya motivación y descripción no entraremos aquí. Redujo el problema al de la construcción de las dos medias proporcionales entre 2 y 1. En nuestro lenguaje, si encontramos x e y, tales que

$$2:x = x:y = y:1$$

entonces $x^2 = 2y,\ y^2 = x,$ y así $x^3 = 2y^3$, es decir, el cubo de lado x es de volumen doble que el de lado y.

En general, *el problema de las dos medias proporcionales entre* a y b consiste en hallar x e y, tales que

$$a:x = x:y = y:b$$

su resolución se reduce a hallar la intersección de la curva $x^2 = ay$ con la curva $xy = ab$ y es así como aparecen lo que nosotros llamamos *parábola* e *hipérbola equilátera*.

Menecmo introduce estas curvas como *secciones de un cono circular recto por un plano perpendicular a una generatriz*. Por eso la *parábola* fue llamada, y con esta terminología aparece todavía en Arquímedes, *sección de cono rectángulo* (es decir, sección de un cono cuyo ángulo de apertura es recto, cortado por un plano perpendicular a una generatriz). La *elipse* era la *sección de cono acutángulo* y la *hipérbola* (hasta Apolonio, sólo se consideró una rama de ella) *la sección de cono obtusángulo*.

El desarrollo de la teoría de las cónicas debió ser muy rápido pues ya hacia fines del siglo IV a. de C. existieron dos obras importantes. La primera es de Aristeo, el *Libro de los lugares sólidos* (*lugares planos* eran los que daban lugar a rectas y círculos; *lugares sólidos*, aquellos en los que aparecen las cónicas por intersección de cilindros y conos con planos; *lugares lineales* eran otras curvas de orden superior no reducibles a las anteriores, como la cuadratriz o la concoide). La segunda obra de interés, también perdida, fue de Euclides, en cuatro libros, cuyo contenido debió ser, en sus líneas fundamentales, el que se encuentra en los cuatro primeros libros de *Las Cónicas* de Apolonio, si bien menos general y menos sistemático.

De este modo, al final del siglo IV, ya eran bien conocidas propiedades tales como la de la ordenada (ver figura 2) y también la de las asíntotas de la hipérbola (ver figura 3).

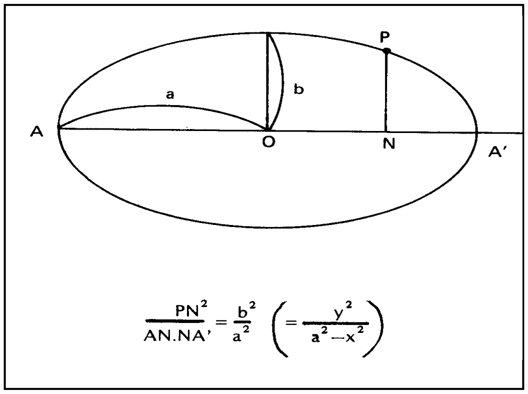

Figura 2.

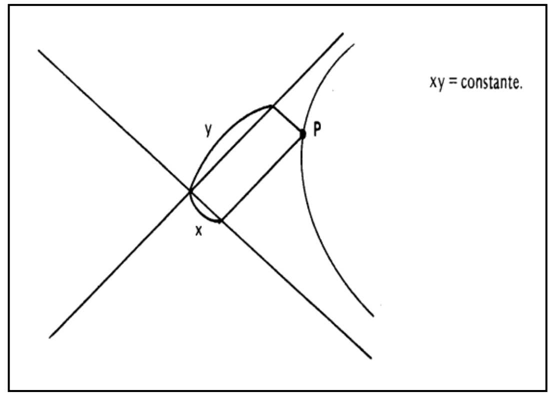

Figura 3.

Ahora, he aquí la forma sencilla como Menecmo pudo llegar a la propiedad que hoy expresamos como $y^2 = 2px$ para la sección del cono rectángulo (parábola, ver figura 4).

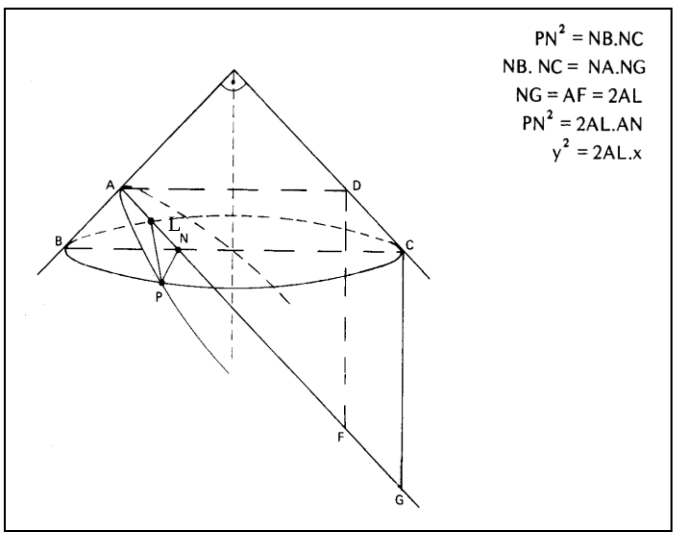

Figura 4.

Arquímedes se especializó en propiedades de la parábola. Muchas de las que cita en sus obras las propone como del dominio público en su tiempo. Así la de la subnormal y el hecho de que si PV es un diámetro que biseca la cuerda QQ' (ver figura 5) y si la tangente en Q interseca el diámetro en T entonces

$$PV = PT .$$

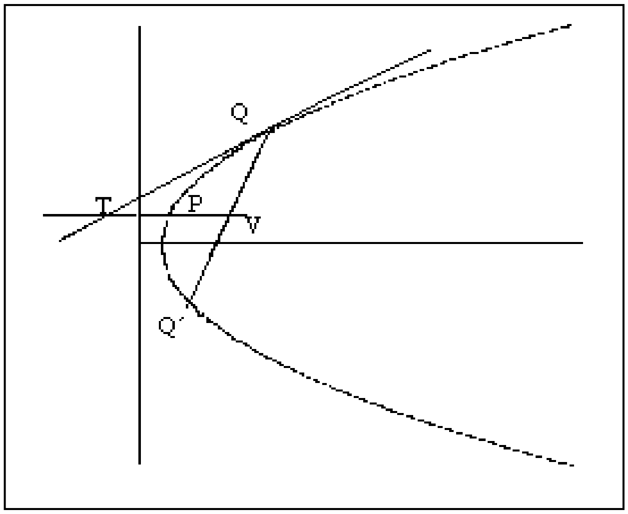

Figura 5

LAS CÓNICAS DE APOLONIO

Las circunstancias de la composición de la obra de Apolonio están explicadas por él mismo en su primer libro. Apolonio sabía mucho más de lo que hasta entonces se conocía y de un modo mucho mejor organizado. Por ello se decide a publicarlo. Él mismo, en este prólogo al libro primero, explica el contenido de la obra bien claramente. Los cuatro primeros libros constituyen una introducción elemental. Debían constituir materia probablemente ya sabida, pero no organizada como la propone Apolonio. A partir del libro V se exponen los hallazgos más importantes del mismo Apolonio.

Su índice se puede proponer más o menos así:

I. Modos de obtención y propiedades fundamentales de las cónicas.
II. Diámetros, ejes y asíntotas.
III. Teoremas notables y nuevos. Propiedades de los focos.
IV. Número de puntos de intersección de cónicas.
V. Segmentos de máxima y mínima distancia a las cónicas. Normal, evoluta, centro de curvatura.
VI. Igualdad y semejanza de las secciones cónicas. Problema inverso: dada la cónica, hallar el cono.
VII. Relaciones métricas sobre diámetros.
VIII. Se desconoce su contenido. Tal vez teoremas y/o problemas sobre diámetros conjugados.

A continuación examinaremos someramente algunos de los detalles más importantes de los diferentes libros, adelantando solamente que se considera, de modo unánime, el libro V como el mejor y más original de todos.

El libro I comienza con la generación del cono circular *oblicuo de dos hojas* que, seccionado por un plano, dará lugar a los diferentes tipos de cónicas. Apolonio había captado cómo esta consideración de un solo cono permite la obtención de las tres cónicas según la inclinación diversa del plano y además identificará la hipérbola como una curva con dos ramas. En estos puntos importantes se aparta de sus antecesores en el campo, logrando una visión más unitaria y mejor sistematizada del tema. Estudia las secciones circulares del cono, paralelas y antiparalelas a la base; introduce el parámetro $p = 2b^2/a$, que llama *lado recto*; establece las propiedades de ordenada y abscisa de las cónicas; considera el centro, ejes, diámetros conjugados, tangentes, ... y ataca el problema de la construcción de la cónica dados diversos elementos suyos.

El libro II estudia fundamentalmente las propiedades de las asíntotas de la hipérbola. Caracteriza la asíntota OM por la distancia PM sobre la tangente, en función de OP y el parámetro correspondiente (ver figura 6). Estudia al final el problema importante siguiente: Trazar una tangente que forme un ángulo dado con el diámetro que pasa por el punto de contacto.

El lenguaje de Apolonio es un lenguaje sintético, que utiliza a la perfección los viejos procedimientos pitagóricos de la aplicación de áreas. Los resultados, sin embargo, son fácilmente traducibles al lenguaje de la geometría analítica. Lo que resulta profundamente sorprendente y llamativo es que Apolonio sea capaz de llegar tan lejos sin asomo de utilización de los métodos avanzados de la geometría y del cálculo de los que nosotros disponemos.

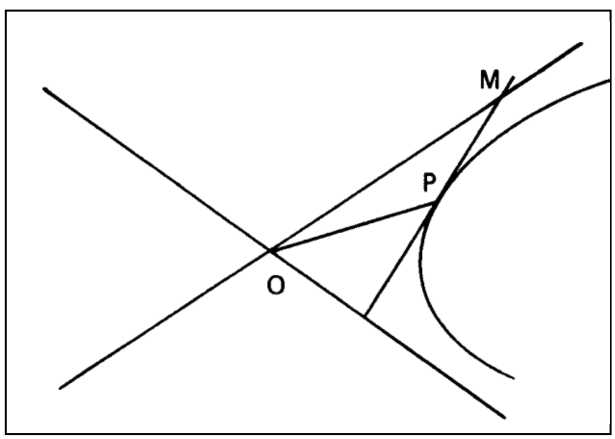

Figura 6.

El libro III se dedica primero a estudiar las relaciones de triángulos y cuadriláteros determinados por tangentes y diámetros conjugados. Obtiene la relación armónica sobre los cuatro puntos determinados en una secante a la cónica que pasa por un punto, su polar y los dos de intersección de la secante con la cónica.

En la proposición 41 se establece cómo tres tangentes a la parábola se cortan en la misma razón y así resulta la parábola como envolvente de las rectas con esta propiedad.
En la proposición 43 aparece la hipérbola como lugar de puntos tales que $xy = constante$, siendo x e y abscisa y ordenada respecto a los ejes constituidos por las asíntotas.

Desde la proposición 45 hasta la 52 aparecen propiedades interesantes sobre los focos.

En la proposición 45 se establece cómo desde un foco F se ve bajo un ángulo recto *MF'M'* el segmento determinado por una tangente cualquiera entre las tangentes en A y A' (ver figura 7).

La proposición 49 afirma esencialmente que la podaria del foco es el círculo de diámetro AA' en la elipse e hipérbola. La 52 contiene lo que hoy solemos tomar a veces como definición de elipse $(PF + PF' = 2a)$. Los focos, en Apolonio, son τα εκ εης παραβολης γευη θευτα οημεια es decir, "los puntos que surgen de la aplicación" de áreas.

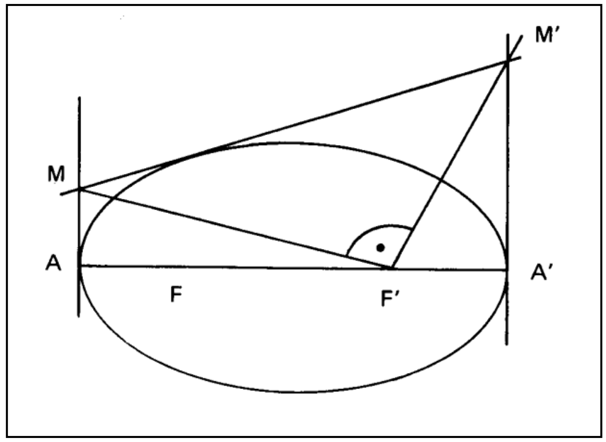

Figura 7

El libro IV es de bastante menos valor. En él estudia el número de puntos de intersección de las cónicas. Es interesante desde un punto de vista lógico que de sus 57 proposiciones, las 23 primeras se demuestran por reducción al absurdo.

El libro V, que consta de 77 proposiciones es, con gran diferencia, el más sorprendente de todos. Se puede decir que en él Apolonio, 20 siglos antes que Huygens (en su Horologium Oscillatorium, de 1673), introduce ya, a su modo, con instrumentos puramente sintéticos, nociones tales como normal a una curva, evoluta, centro de curvatura, etc,.. y que logra obtener estos elementos para las cónicas de la manera más rigurosa.

La normal desde un punto exterior viene definida a través de la propiedad de máxima o mínima distancia desde el punto a la curva. Apolonio comienza por considerar el punto E sobre el eje principal tal que $AE = p/2$ (ver figura 8). Demuestra entonces que para cualquier punto P sobre la elipse se verifica $PE^2 = AE^2 + AN^2$ y así está a distancia de E mayor que A. Por tanto AE es para E el segmento de distancia mínima desde E a la elipse. Considera luego E en situaciones más generales y análogamente determina la normal desde E.

Las proposiciones más llamativas de toda la obra son ciertamente la 51 y 52 de este libro quinto. En ellas consigue, ¡por procedimientos puramente sintéticos!, obtener la evoluta de las cónicas, es decir, el lugar geométrico de los centros de curvatura, mediante la determinación del número de normales distintas desde cada punto. Esto equivale a describir sintéticamente las curvas que en el lenguaje de nuestra geometría analítica tendrían por

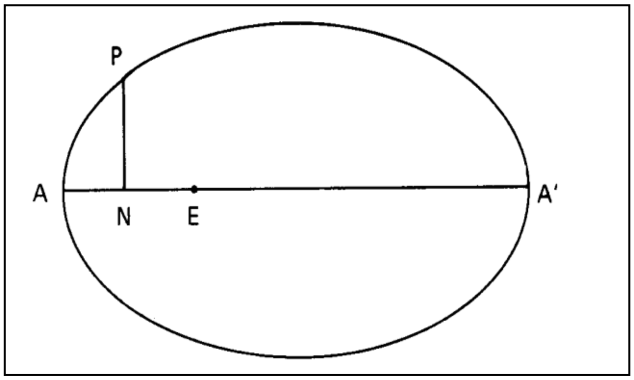

Figura 8

ecuación

$$27py^2 = 16\left(x - \frac{p}{2}\right)^3 \quad \text{(parábola)}$$

$$(ax)^{2/3} \pm (by)^{2/3} = (a^2 \pm b^2)^{2/3} \quad \text{(elipse, hipérbola)}$$

En las proposiciones $55-63$ obtiene las normales desde un punto exterior, reduciendo el problema a la determinación del pie de la normal sobre la cónica por intersección de ésta con una hipérbola equilátera asociada al punto exterior.

En el libro VI, dedicado fundamentalmente a la igualdad y semejanza de cónicas, aparece el problema interesante siguiente: ***dada la cónica y dado un cono circular recto, hallar una sección del cono que sea igual a la cónica dada***. Es llamativa la elegancia de la resolución de este problema.

Las proposiciones del libro VII, nuevas en su mayor parte, como Apolonio mismo señala, contienen numerosas relaciones métricas entre diámetros conjugados, áreas, etc...

OTRAS OBRAS DE APOLONIO

Apolonio escribió unas cuantas obras más que se difundieron bastante en su entorno, una buena parte relativa a geometría, otras a campos de la física donde sus profundos conocimientos geométricos más pudieron aportar, como es el caso del estudio de la reflexión sobre espejos curvos; otras de astronomía, campo en el que Apolonio ejerció una notable influencia, siendo citado explícitamente por Tolomeo, autor del *Almagesto* (alrededor del año 140 d. de C.), como responsable de un importante teorema en la teoría de epiciclos. Pero parece cierto que las otras obras matemáticas de las que nos han llegado noticias fueron de interés más bien puntual, a juzgar por el tipo de problemas que trataban. He aquí una descripción sucinta de cada una de ellas.

La única obra, aparte de Las Cónicas, que ha sobrevivido hasta nuestros tiempos, tiene por título *Sobre la sección de la razón* (λογου αποτομη) que fue conservada en árabe y traducida por Halley al latín en 1706. Halley había hecho el esfuerzo de aprender árabe a fin de ser capaz de leer esta obra de Apolonio. El problema principal se puede indicar de la forma siguiente (ver figura 9):

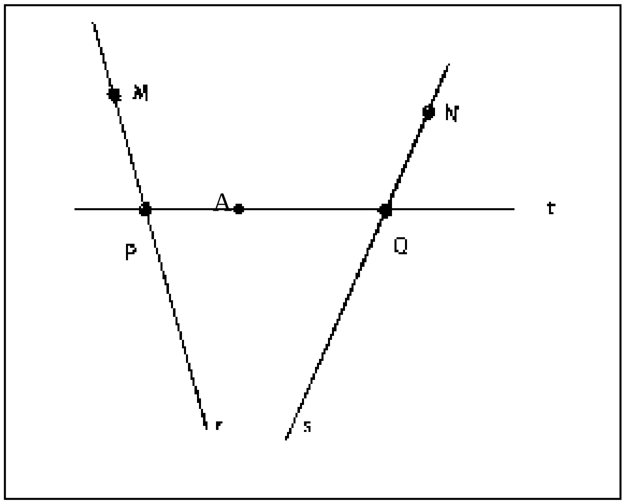

Figura 9

Dado el punto A, ***los puntos*** M, N, ***las dos rectas*** r ***y*** s ***que pasan respectivamente por*** M ***y*** N ***y dado el número*** α, ***trazar por*** A ***una recta*** t ***tal que*** $PM/PQ = \alpha$**.**

Es fácil para nosotros, mediante nuestra geometría analítica, ver cómo este problema se puede reducir a uno acerca de intersección de cónicas y así es sencillo imaginar cómo pudo proceder Apolonio en éste y otros problemas semejantes con suma facilidad, gracias a sus conocimientos sobre cónicas.

Otra obra, ésta perdida, se titula *Sobre la sección del área* (χωριου αποτομη). El problema tratado era como el anterior, salvo que ahora debería ser $MP \cdot NQ = \alpha$.

El tratado sobre la *Sección determinada* (δχωριομηυη τομη) consistía en lo siguiente (ver figura 10): ***Dados cuatro puntos sobre la recta*** A, B, C ***y*** D***, y el número*** α***, determinar otro punto*** P ***sobre la misma recta tal que***

$$\frac{PA.PC}{PB.PD} = \alpha$$

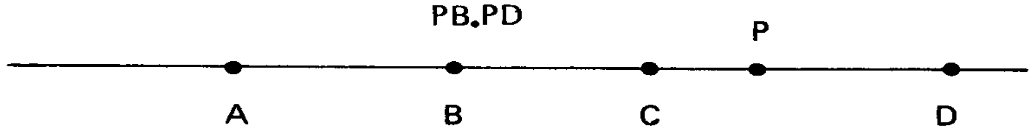

Figura 10

La obra titulada *Tangencias* (Επαφαι) se hizo especialmente famosa a lo largo de la historia por contener lo que se vino a llamar el *Problema de Apolonio*. ***Dados tres elementos, cada uno de los cuales puede ser un punto, una recta o una circunferencia, se pide hallar una circunferencia que sea tangente a ellos (pase por ellos en el caso de puntos)***. El caso más complicado, dadas tres circunferencias hallar otra tangente a las tres, es el mencionado problema de Apolonio. No conociéndose exactamente la solución de Apolonio, esta cuestión interesó vivamente a muchos matemáticos famosos, entre ellos Vieta, Descartes, Newton, Euler, Poncelet,... El problema tratado en la obra sobre *Inclinaciones* (υευσεις) se puede proponer en general como sigue (ver figura 11): ***Dado un punto A, dos curvas*** r ***y*** s***, y la longitud*** p***, hallar una recta*** t ***que pase por A tal que*** $MN = p$**.**

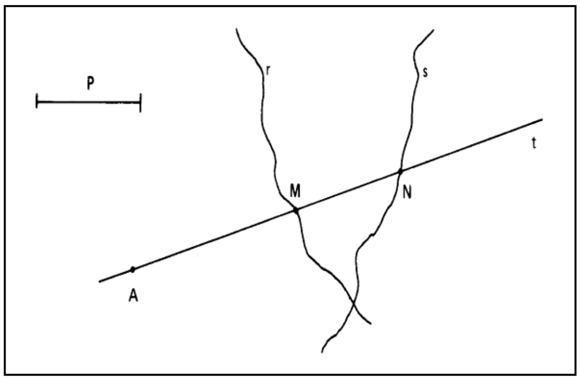

Figura 11

El tratado sobre *Lugares planos* (τοποι επιπεδοι) estudia condiciones que conducen a rectas y círculos como lugares geométricos.

De estos tratados, se conocen algunas referencias sobre su contenido a través de las noticias que proporciona Pappus (siglo IV d. de C.), quien debió tener ante sus ojos las obras de Apolonio o al menos algún catálogo más extenso. Hay aún otras obras que menciona cuyo contenido es más oscuro. Una especie de *Arenario*, al estilo del de Arquímedes, con técnicas para manejar números grandes. Un tratado *Sobre la hélice*, otro *Sobre el dodecaedro y el icosaedro*, en el que aparece la igualdad de las apotemas de los dos poliedros regulares inscritos en la misma esfera, lo que conduce de modo directo a una fácil comparación de volúmenes (mayor para el dodecaedro, contra lo que una primera intuición podría sospechar).

Pappus menciona también un *Tratado general* (καθολου πραγμαρεια) en el que podría haber observaciones sistemáticas de tipo axiomático relativas a los fundamentos de la geometría. Existe también una oscura alusión a un tratado *Sobre los irracionales desordenados* (περι των ατακ των αλογων) que tal vez podría consistir en consideraciones que extendían, no se sabe bien en qué dirección, el contenido del libro X de los Elementos de Euclides.

Pappus cita también un trabajo sobre *Cálculo rápido* (ωκυτοκιου) que debiera referirse al cálculo aproximado de π. También se nombran en el catálogo de Pappus dos trabajos de óptica, *Sobre el espejo cáustico* (περι τουπυρειου) y *A los catrópticos* (προς τους κατροπτκους) en los que sin duda los conocimientos geométricos de Apolonio se ponían en acción con gran ventaja.

LA HUELLA DE APOLONIO

La influencia de Apolonio en los geómetras griegos y árabes fue muy profunda. No en vano Apolonio fue llamado El Geómetra de la Antigüedad. Sobre porciones más o menos extensas de su obra escribieron comentarios Pappus (s. IV d. de C.) Serenus Antissensis (IV), Hyppathia (V), Eutoquio (VI), Abalphat de Ispahan (X), Abdomelek de Chiraz (XIII),...

La obra de Apolonio comienza a filtrarse lentamente hacia Occidente por vía de la matemática árabe. Vitelio, monje polaco establecido en Italia, escribe en 1260 un tratado de óptica, que en el fondo es un comentario al tratado de óptica del árabe Al-Hazen, que residió en la península ibérica en el siglo XI, y en el que se contienen diversas proposiciones geométricas de Apolonio.

El primer texto griego de Las Cónicas que aparece en Occidente es el que Francisco Filelfo, nacido en Tolentino en 1398, se trajo de Constantinopla a Venecia en 1427.

La primera versión al latín de los cuatro primeros libros de *Las Cónicas* fue realizada por el matemático Juan Bautista Memo, en Venecia. Revela grandes lagunas en el conocimiento del griego, pero a pesar de ello, al morir Juan Bautista, un sobrino suyo, Juan María Memo, editó la obra en 1537.

En 1566, en Bolonia, Federico Commandino publica una segunda traducción, mucho mejor, de los cuatro primeros libros, basada sobre los textos griegos, y acompañada de los lemas de Pappus, del comentario de Eutoquio y de dos libros sobre cónicas de Serenus Antissensis. Una segunda edición de esta obra fue impresa en París en 1626.

En 1655 aparece publicado un exponente de lo que constituía el ejercicio de moda en ese tiempo, la reconstrucción conjetural de las obras perdidas de los clásicos. El Padre Claude Richard publica en Amberes un comentario de los cuatro primeros libros sobre las cónicas de Apolonio, basado en los textos de Memo y Commandino, seguido de otros cuatro libros que, a juicio del P. Richard, pretendían reconstruir el contenido de los cuatro libros de Apolonio desconocidos entonces en Occidente.

En 1675 Isaac Barrow, el maestro de Newton en Cambridge, publicó en Londres un manual de geometría en que condensaba los cuatro primeros libros de Apolonio, además de otras obras de Arquímedes y de Teodosio.

A partir de 1629 comienzan a conocerse en Occidente los primeros manuscritos árabes de la obra de Apolonio, que contenían más libros que los hasta entonces conocidos, a través de Golius, profesor de lenguas orientales en Leyden. El Padre Mersenne se hace eco de ello en una obra en 1644. Golius los trajo consigo a Holanda, después de un viaje por el Pronio, y en principio planeó traducirlos y publicarlos. No se sabe bien por qué no llevó a cabo su proyecto ni por qué su colección se dispersó después de su muerte.

Mientras el geómetra Viviani, en 1658, se ocupaba de reconstruir conjeturalmente el contenido de los cuatro libros desconocidos de Apolonio, otro geómetra italiano, Borelli, encontró en la biblioteca de los Médicis, en Florencia, un manuscrito árabe, probablemente de la colección de Golius, que contenía los libros V, VI y VII de *Las Cónicas*, en una versión resumida y más o menos retocada por el matemático persa Abalphat de Ispahan, en 994. Viviani logró que Borelli no publicase tal hallazgo sino después de que él hubiese publicado su reconstrucción, lo que hizo en 1659. Como se pudo ver después, la reconstrucción del libro V de Viviani fue de un acierto sorprendente y extendía el campo de Apolonio considerablemente.

Borelli por su parte hizo traducir el libro de Abalphat al latín y lo publicó con numerosos comentarios en Florencia en 1661.

Otro manuscrito árabe que contenía una versión abreviada de los mismos libros de *Las Cónicas*, comentada por el geómetra persa Abdolmelek de Chiraz en 1250, fue adquirida en 1641 por el orientalista alemán Christian Rau. Este lo tradujo al latín y lo publicó en Kiel en 1669.

La primera versión completa en árabe de los libros V, VI, VII, aparece públicamente en Occidente al comienzo del siglo XVII en Irlanda, en un manuscrito que los herederos de Golius habían vendido al obispo de Armach (Codex Armachanus). Se trataba de una traducción del griego al árabe realizada en el siglo IX por Thabit ben Kurra, en Bagdad.

La edición príncipe de *Las Cónicas* se debe al entusiasmo de Edmond Halley (1656-1742), el gran impulsor del trabajo de Newton, a quien convenció para que escribiese los Principia que posteriormente él mismo hizo imprimir con los costos a su cargo, en 1687.

En 1704 Halley sustituyó a Gregory como profesor de geometría en Oxford. Gregory había traducido los Elementos de Euclides y en 1703 los había publicado en latín y griego. Él y Halley se habían propuesto traducir y publicar los siete libros de las Cónicas de Apolonio. Con tal fin Halley decidió aprender árabe. En 1706 publica Halley el tratado de Apolonio sobre la sección de la razón. Muerto Gregory, Halley emprende en solitario la conclusión de la publicación de los siete libros conservados de las Cónicas y en 1710 aparece la obra en una impecable presentación. Se compone de tres partes.

La primera contiene el texto griego de los cuatro primeros libros, publicado (en griego) por vez primera, junto con la versión latina de Commandino más o menos corregida, con los textos griegos de los lemas de Pappus y con el comentario de Eutoquio, todos los textos griegos acompañados de sus versiones en latín.

La segunda parte comprende la traducción latina de los libros V, VI, VII, basada sobre la versión árabe de Thabit ben Kurra, seguida del texto griego de los lemas de Pappus relativos a estos tres libros y una reconstrucción conjetural del libro VIII hecha por Halley mismo.

La tercera parte contenía el texto griego y una versión latina de los dos libros de Serenus Antissensis sobre la sección del cilindro y del cono.

En 1893 apareció la edición crítica del texto griego de los cuatro primeros libros realizada por Heiberg en Copenhague.

La única traducción completa de *Las Cónicas* a una lengua romance, el francés, fue publicada en Brujas en 1923, realizada por Paul Ver Eecke. Tal versión está precedida por un extenso comentario sobre lo que acerca de Apolonio se conoce hoy día, así como sobre la huella de su obra a lo largo de la historia.

REFERENCIAS

[1] Boyer, Carl P. (1968). *A History of Mathematics.* John Wiley & Sons, Inc. New York.

[2] Diccionario Enciclopédico Quillet (1976). Juan Santiere, *Apolonio, Cónicas, Parábola.* Cumbre S.A. México D.F. 6ª Ed.

[3] Enciclopedia Universal Ilustrada Europeo-Americana (1981). *Apolonio.* Espasa-Calpe, S.A. Madrid

SITIOS EN LA RED

[4] http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Apollonius.html

[5] http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/mathhist/apollonius.html

[6] http://library.thinkquest.org/22584/temh3031.htm#top