La geometría de dos fórmulas de Euler*

Raúl Quiroga-Barranco
Centro de Investigación en Matemáticas–CIMAT
Apartado Postal 402
36000 Guanajuato, Gto.
México
quiroga@cimat.mx

1. Introducción

Leonhard Euler es uno de los matemáticos de la Historia con mayor reconocimiento. Esto se debe tanto a la gran cantidad de trabajos que escribió como a la importancia de los mismos. Sus contribuciones a la Geometría en diferentes niveles y con diversos grados de profundidad son en particular notables. Sería imposible en un breve trabajo como éste poder hacer recuento de sus ideas dentro de la Geometría. En lugar de ello, trataremos de resaltar la relevancia de sus ideas y hacer ver que su trabajo trasciende a su tiempo.

Tomaremos como punto de partida dos fórmulas de Euler. La primera es bastante famosa y de hecho es muchas veces referida simplemente como la Fórmula de Euler; ésta relaciona la exponencial de números complejos con el seno y el coseno. La segunda es conocida como la fórmula de las sumas de cuatro cuadrados de Euler. Ambas resultan tener un contenido geométrico que en los tiempos de Euler no fue reconocido en plenitud. Discutiremos pues este contenido mostrando así como las ideas de Euler van más allá de lo que podríamos creer. En este sentido, uno de nuestros objetivos es mostrar que el trabajo de Euler sigue vigente y tan vivo como cuando lo escribió.

*Supported by SNI-México and Conacyt Grant 44620.
Key words and phrases. Euler, geometry

2. La fórmula de Euler y las rotaciones en el plano

Una de las herramientas más útiles que se han desarrollado en las matemáticas es dada por los números complejos. El uso de estos números tiene impacto en el Álgebra, el Análisis y la Geometría.

En el Álgebra, los números complejos pueden considerarse como un mecanismo para resolver ecuaciones algebraicas que no poseen solución de otra forma. Por ejemplo, la ecuación:

$$x^2 + 1 = 0\,,$$

no puede tener solución dada por un número real pues el cuadrado de un número real nunca es negativo. Se introduce pues un nuevo número i, llamado la unidad imaginaria, con la propiedad de que $i^2 = -1$. Es decir, i es justamente una solución de la ecuación anterior.

Los números complejos son entonces números de la forma:

$$z = a + bi\,, \tag{2.1}$$

con a y b números reales. Luego tales números se suman y se multiplican entre sí usando las reglas de asociatividad y distributividad junto con la relación básica $i^2 = -1$. De este modo se encuentra que:

$$\begin{aligned} (a+bi)+(c+di) &= (a+c)+(b+d)i \\ (a+bi)\cdot(c+di) &= (ac-bd)+(ad+bc)i\,. \end{aligned} \tag{2.2}$$

A la colección de todos los números complejos con estas operaciones la denotaremos con el símbolo $\mathbb{C}$.

Es posible dar una interpretación geométrica a estos números basada en la expresión (2.1). Tal ecuación nos muestra que los números complejos no son sino pares de números reales. Por otro lado, las coordenadas cartesianas en el plano nos permiten identificar los puntos en él con pares de números reales y así con los números complejos. En la Figura 1 mostramos tal identificación. Debido a esto, frecuentemente se habla del plano complejo pensando en los números complejos que describimos arriba y su interpretación geométrica.

Una componente importante en la geometría del plano es la distancia entre puntos, la cual es posible relacionar con las operaciones de números complejos. Para ver esto, en primer lugar introducimos el concepto de conjugación de números complejos. Si $z = a+bi$ es un número complejo, su conjugado es $\overline{z} = a - bi$, y con esta definición realizamos el siguiente cálculo:

$$z\cdot\overline{z} = (a+bi)\cdot(a-bi) = a^2+b^2, \tag{2.3}$$

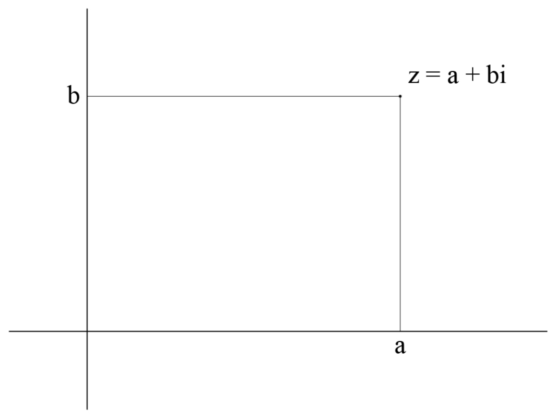

Figura 1: Puntos en el plano complejo.

es decir, el producto $z \cdot \overline{z}$ es el cuadrado de la distancia de z al origen. Se acostumbra denotar $\sqrt{z\overline{z}}$ por $|z|$, el cual es llamado el módulo o la norma del número complejo z y mide su magnitud. Por lo que acabamos de ver, la norma de un número complejo es también su distancia al origen.

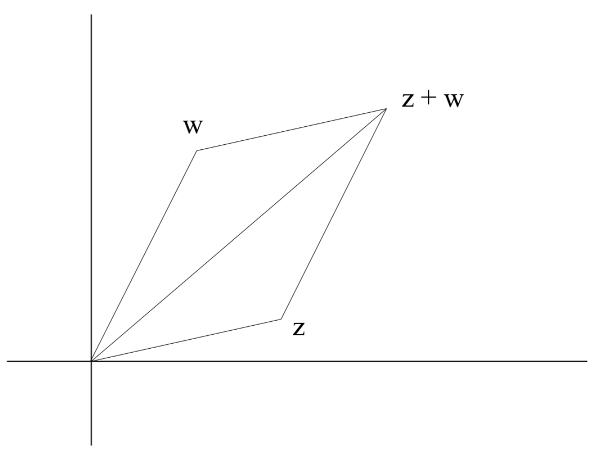

Figura 2: Suma de números en el plano complejo.

Nos podemos preguntar ahora por la interpretación geométrica de las operaciones de números complejos dadas en las ecuaciones (2.2). La suma de números en el plano complejo es la que se conoce como suma de vectores y que se muestra en la Figura 2. En base a esto, tenemos una interpretación más de los números complejos como el conjunto de vectores en el plano que parten del origen. Por otro lado, de la interpretación geométrica de la suma de números complejos encontramos que para dos tales números z y w, la distancia entre ellos es dada por $|z - w|$.

El producto de números complejos se puede entender más fácilmente utilizando coordenadas polares. En tales coordenadas, cada punto en el plano se localiza mediante dos valores: su distancia r al origen y el ángulo θ que forma con el eje horizontal el segmento que va del origen al punto, como muestra la Figura 3. Las coordenadas polares de un punto (x, y) como en la Figura 3 son el par de valores (r, θ) así obtenidos. Usando trigonometría es posible relacionar tales coordenadas polares con las coordenadas cartesianas en la siguiente fórmula (ver la Figura 3):

$$(x, y) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta)),$$

que, con nuestra interpretación geométrica del plano complejo, corresponde al punto $r\cos(\theta) + r\sin(\theta)i$. También son conocidas las siguientes ecuaciones que permiten obtener las coordenadas polares a partir de las cartesianas:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

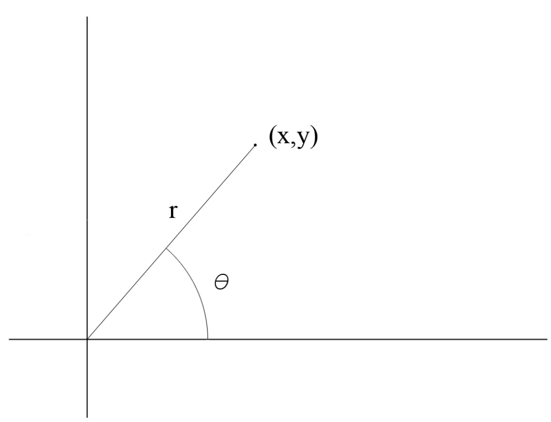

Figura 3: Coordenadas polares.

Podemos ahora plantearnos la siguiente pregunta. ¿Qué pasa cuando multiplicamos a un número $a + bi$ en el plano complejo por otro de la forma $r\cos(\theta) + r\sin(\theta)i$? Es decir, ¿qué tipo de transformación geométrica obtenemos al realizar tal producto? De la ecuación (2.2) encontramos que:

$$(r\cos(\theta)+r\sin(\theta)i)\cdot(a+bi) = r(\cos(\theta)a-\sin(\theta)b)+r(\sin(\theta)a+\cos(\theta)b)i.$$

Recurrimos ahora de nuevo a la interpretación de los números complejos como pares de números reales. Podemos entonces ver que la expresión anterior es una función lineal de los valores a y b de una forma tal que podemos escribir la representación matricial correspondiente. Es decir, usando matrices, el producto de números complejos que acabamos de calcular se reescribe como la asignación:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto r \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

De esta forma si multiplicamos al número complejo $z' = a + bi$ por el número complejo $z = r\cos(\theta) + r\sin(\theta)i$ geométricamente estamos rotando a z' por un ángulo θ y estirándolo (o contrayéndolo) por un factor de r. La Figura 4 esquematiza esta interpretación. La transformación geométrica que corresponde a la multiplicación por un factor r real en la norma de un número complejo se llama homotecia por un factor r.

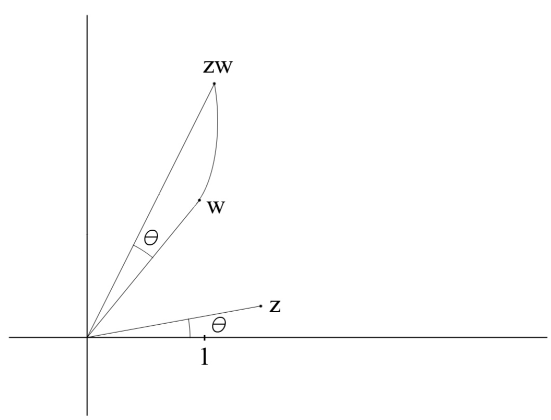

Figura 4: Interpretación geométrica del producto de números complejos.

Si bien la interpretación anterior es correcta, ha tenido que pasar por el álgebra lineal y sus matrices, lo cual conlleva el cambio a un contexto en el fondo más complicado que los números complejos. Sería interesante contar con una interpretación conceptualmente más simple.

Es en este punto que el genio de Euler nos ayuda a ver un patrón que simplifica nuestro estudio de los objetos geométricos. Euler probó en 1748 una fórmula considerada entre las más notables de toda la Matemática y que relaciona tres de las funciones más importantes del Análisis. Dos de tales funciones son el seno y el coseno que arriba empleamos para relacionar las coordenadas polares con las coordenadas cartesianas. La otra función es la exponencial de un número x que se denota por e^x y que posee la propiedad de transformar sumas en productos, es decir, satisface $e^{x+y} = e^x e^y$. Esta función es definida y estudiada en casi todo libro de Cálculo cuando el número x es real, pero es también posible considerar la exponencial de un número complejo. Es en este contexto más general que Euler probó la relación que existe entre el seno, el coseno y la exponencial. Así tenemos la siguiente expresión que es conocida como la fórmula de Euler.

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta). \tag{2.4}$$

Con esta fórmula a la mano podemos resolver nuestro problema de la interpretación geométrica del producto de números en el plano complejo de una manera mucho más simple. Como vimos arriba, si z y z' son dos tales números, entonces podemos calcular sus coordenadas polares digamos (r, θ) y (r', θ'), respectivamente, lo cual corresponde a expresarlos como sigue:

$$z = r\cos(\theta) + ir\sin(\theta), \quad z' = r'\cos(\theta') + ir'\sin(\theta')\,,$$

pero la fórmula de Euler simplifica esto a las expresiones:

$$z = re^{i\theta}, \quad z' = r'e^{i\theta'}\,,$$

con las cuales encontramos que:

$$z \cdot z' = re^{i\theta} \cdot r'e^{i\theta'} = rr'e^{i(\theta+\theta')}\,.$$

De esta última expresión concluimos de nuevo que al multiplicar a un número complejo z' por otro z con coordenadas polares (r, θ), rotamos a z' por un ángulo θ y le aplicamos una homotecia por un factor r.

Así pues, hemos visto que toda multiplicación por un número complejo es una rotación seguido de una homotecia. Pero más aún, nuestros cálculos muestran que toda rotación alrededor del origen en el plano proviene de una multiplicación por un número complejo. Esto ocurre porque la rotación por un ángulo θ es dada por la multiplicación por el número complejo $e^{i\theta}$. En otras palabras, el conjunto de todas las rotaciones alrededor del origen se identifica con el conjunto de números complejos cuya coordenada polar $r = 1$. El cambio de coordenadas polares a cartesianas nos dice que éste es el conjunto de números complejos de módulo 1 que denotaremos por:

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}\,.$$

Este conjunto resulta ser simplemente el círculo en el plano con centro en el origen y radio 1.

La geometría del plano estudia rectas, ángulos, polígonos, etc., y al hacerlo encontramos que las propiedades de tales objetos geométricos no cambian cuando rotamos, trasladamos o reflejamos los mismos. Por esta razón se considera que la geometría del plano es aquélla que estudia las propiedades de las figuras que son invariantes bajo estos tres tipos de transformaciones. Resulta así de lo que acabamos de ver que uno de los tres tipos de transformaciones que definen la geometría del plano, las rotaciones alrededor del origen, se puede identificar con el círculo S^1, que es él mismo un objeto geométrico del plano. Pero debido a la presencia del producto en el plano complejo, observamos que el círculo es más que un simple objeto geométrico pues el producto de dos elementos en S^1 cae de nuevo en S^1. Es decir:

$$z, w \in S^1 \text{ implica } z \cdot w \in S^1\,. \tag{2.5}$$

Una forma de ver esto es escribiendo como arriba $z = e^{i\alpha}$ y $w = e^{i\beta}$, de donde observamos que $z \cdot w = e^{i(\alpha+\beta)}$, el cual pertenece de nuevo al círculo S^1. Esta forma de probarlo es fundamental pues hace ver que el producto en S^1 es de hecho la composición de las correspondientes rotaciones.

De esta manera, hemos encontrado que el círculo S^1 es un objeto geométrico con una estructura algebraica, el producto de sus elementos, en el cual queda codificada la geometría del plano. Este hecho fundamental de la Geometría está a su vez codificado en la fórmula de Euler (2.4) que relaciona las funciones seno, coseno y exponencial. Tal es el caso, pues es esta fórmula de Euler la que de manera más natural sirvió de base para interpretar geométricamente el producto de números complejos e identificar la estructura geométrica y algebraica del círculo S^1. En conclusión, en la fórmula de Euler (2.4) está codificada la geometría del plano.

Veamos ahora otra forma de probar la implicación (2.5) que nos ayudará a entender mejor otra contribución de Euler discutida en la siguiente sección. Esta otra prueba se obtiene observando el resultado más general que establece la fórmula:

$$|z \cdot w| = |z| \cdot |w| \,, \tag{2.6}$$

para cualesquiera números complejos z y w. Esta fórmula implica que el producto de dos números complejos de módulo 1 es también un número complejo de módulo 1. Esto es precisamente la implicación (2.5).

Probamos esta relación más general considerando su cuadrado y aplicando el siguiente cálculo:

$$|z \cdot w|^2 = z \cdot w \cdot \overline{z \cdot w} = z \cdot w \cdot \overline{z} \cdot \overline{w} = z \cdot \overline{z} \cdot w \cdot \overline{w} = |z|^2 \cdot |w|^2 \,,$$

en el cual utilizamos la ecuación (2.3) y el hecho de que $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \cdot \overline{w}$. Esta última relación se prueba directamente de la ecuación (2.2).

Para números complejos $z = a + bi$ y $w = c + di$, el cuadrado de la ecuación (2.6) queda escrito como:

$$(a^2 + b^2) \cdot (c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 \,. \tag{2.7}$$

Esta fórmula resulta ser notable por varios hechos. En primer lugar, su miembro derecho contiene de manera explicita las coordenadas del producto de dos números complejos (ver la ecuación (2.2)). Por tanto, el producto de números complejos está determinado por cualquiera de las dos fórmulas equivalentes (2.6) o (2.7). Es decir, si por alguna razón olvidásemos cómo multiplicar números complejos, nos bastaría mirar tales ecuaciones para refrescar nuestra memoria. Por tanto, quienquiera que conozca la ecuación (2.7) se puede decir que conoce ya los números complejos. De aquí un segundo hecho notable: un matemático hindú del siglo sexto de nombre Brahmagupta había ya descubierto esta fórmula y con ello la esencia de los números complejos. Esto ocurrió 10 siglos antes de que Descartes formalizara el uso de los números complejos.

La fórmula de Brahmagupta resuelve un problema importante en la Teoría de Números. Recordamos que un número se dice un cuadrado perfecto si es el cuadrado de un entero. El problema de Teoría de Números al que nos referimos es, si n y m son ambos enteros que se pueden ambos escribir como la suma dos cuadrados perfectos, ¿es el número $n \cdot m$ la suma de dos cuadrados perfectos? La fórmula de Brahmagupta nos da una respuesta afirmativa pues con ella sabemos que si n es la suma de los cuadrados de a y b, y m es la suma de los cuadrados de c y d, entonces $n \cdot m$ es la suma de los cuadrados de $ac - bd$ y $ad + bc$. En otras palabras, la fórmula de Brahmagupta contiene la receta para dar los números cuyos cuadrados suman $n \cdot m$ a partir de los números cuyos cuadrados nos permiten obtener a n y a m. Es notable que tal receta es de hecho el producto de números complejos y que, como vimos arriba, contiene la información de la geometría del plano codificada en el círculo S^1.

3. La fórmula de las sumas de cuatro cuadrados de Euler y la geometría en tres dimensiones

En la sección anterior hicimos ver que la geometría del plano puede en gran parte ser estudiada a través de un objeto geométrico, el círculo S^1, que lleva consigo una operación algebraica. La importancia de tal operación yace en que nos permite estudiar las rotaciones del plano sin tener que recurrir a las matrices sino utilizando tan solo al producto de los números complejos de la forma $e^{i\theta}$. En ello jugó un papel fundamental la fórmula de Euler (2.4). Nos preguntamos ahora sobre la posibilidad de extender este tipo de construcciones a otras dimensiones. Existen en realidad varias formas de atacar este problema, pero nosotros lo haremos utilizando el trabajo de Euler.

Como mencionamos al final de la sección anterior, los números complejos estaban ya implícitamente dados en la ecuación (2.7) de Brahmagupta. Pero más aún, como pudimos explicar, esta ecuación proporciona una manera alternativa de entender la estructura algebraica del círculo S^1 y por tanto contiene información sobre la geometría del plano. También se encontró que la ecuación de Brahmagupta resuelve un problema de Teoría de Números.

Ocurre que Euler fue el primero en descubrir una ecuación similar a la de Brahmagupta, pero que expresa ciertas relaciones en colecciones no solo de dos variables sino de cuatro variables. Tal ecuación es dada como sigue:

$$\begin{aligned}(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \cdot (y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)& \\ = (x_0y_0 - x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3)^2 + (x_0y_1 + x_1y_0 + x_2y_3 - x_3y_2)^2& \\ + (x_0y_2 - x_1y_3 + x_2y_0 + x_3y_1)^2 + (x_0y_3 + x_1y_2 - x_2y_1 + x_3y_0)^2& \quad (3.1)\end{aligned}$$

y se conoce como la fórmula de las sumas de cuatro cuadrados de Euler. Veremos ahora cómo esta ecuación tiene un contenido geométrico no trivial y muy importante.

Como la fórmula de Brahmagupta, esta ecuación de Euler proporciona la solución a un problema de Teoría de Números. Nos muestra que si n y m son ambos la suma de cuatro cuadrados perfectos, entonces su producto $n \cdot m$ es también la suma de cuatro cuadrados perfectos. Además, establece esta propiedad de los enteros dando, como en el caso de la ecuación de Brahmagupta, una receta explícita para obtener los cuatro enteros cuyos cuadrados suman $n \cdot m$.

Como en el caso de la fórmula de Brahmagupta, la fórmula de las sumas de cuatro cuadrados de Euler contiene de manera implícita una regla para multiplicar colecciones ordenadas, en este caso de cuatro números reales que llamaremos tétradas reales. La pregunta que queremos responder es, ¿cuál es el significado geométrico de tal producto implícito en (3.1)? De manera explícita, el producto que se obtiene de la ecuación (3.1) es dado por:

$$\begin{aligned}(x_0, x_1, x_2, x_3) &\cdot (y_0, y_1, y_2, y_3) \\ &= (x_0y_0 - x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3, x_0y_1 + x_1y_0 + x_2y_3 - x_3y_2, \\ &\quad x_0y_2 - x_1y_3 + x_2y_0 + x_3y_1, x_0y_3 + x_1y_2 - x_2y_1 + x_3y_0)\,. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Tal producto es un tanto complicado, pero es posible analizar algunas de sus propiedades caso por caso y entenderlas hasta cierto punto. Para ello es útil simplificar nuestra notación. El conjunto de tétradas reales que venimos considerando se denota por $\mathbb{R}^4$ y constituye un espacio vectorial de dimensión 4. La base natural de este espacio es dada por:

$$\begin{aligned} e_0 &= (1,0,0,0), & e_1 &= (0,1,0,0) \\ e_2 &= (0,0,1,0), & e_3 &= (0,0,0,1)\,. \end{aligned}$$

Una de las expresiones más simples para el producto (3.2) se obtiene tomando uno de los miembros de este producto como e_0. Es fácil verificar que:

$$\begin{aligned} e_0 \cdot (x_0, x_1, x_2, x_3) &= (x_0, x_1, x_2, x_3), \\ (x_0, x_1, x_2, x_3) \cdot e_0 &= (x_0, x_1, x_2, x_3)\,, \end{aligned}$$

es decir, el vector e_0 se comporta como una unidad.

Por otro lado, si tomamos $x_\alpha = y_\alpha = 0$ para $\alpha = 1, 2, 3$, observamos que el lado derecho de la ecuación (3.2) tiene sólo la primera componente no nula y se reduce a:

$$(x_0e_0) \cdot (y_0e_0) = (x_0y_0)e_0\,,$$

que de hecho define el producto usual de los números reales. En otras palabras, si denotamos con $\mathbb{R}e_0$ la línea generada por e_0, entonces el producto en esta línea lo convierte en una copia de los números reales. Bajo estas identificaciones podemos entonces escribir $e_0 = 1$ y $\mathbb{R}e_0 = \mathbb{R}$.

Si ahora tomamos $x_\alpha = y_\alpha = 0$ para $\alpha = 2, 3$, es decir si trabajamos en el plano $\mathbb{R}e_0 \oplus \mathbb{R}e_1 = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}e_1$, entonces ahora la ecuación (3.2) se reduce a:

$$(x_0 + x_1 e_1) \cdot (y_0 + y_1 e_1) = (x_0 y_0 - x_1 y_1) + (x_0 y_1 + x_1 y_0) e_1$$

donde hemos ya aplicado nuestra identificación $e_0 = 1$. Esta última expresión es en realidad otra forma de escribir el producto de números complejos, donde ahora simplemente hemos escrito e_1 en vez del símbolo usual i para la unidad imaginaria. En otras palabras, $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}e_1$ es una copia de los números complejos. Por tanto, la fórmula de Euler que estamos considerando contiene la información sobre el producto de los números complejos. Esto también se puede deducir del hecho de que si tomamos $x_\alpha = y_\alpha = 0$ para $\alpha = 2, 3$ en la ecuación (3.1), obtenemos la ecuación de Brahmagupta. Tenemos pues los ya conocidos números complejos y podemos entonces recuperar la geometría del plano junto con la fórmula de Euler (3.1) por lo que discutimos en la sección anterior.

Veamos ahora algunos casos no triviales más interesantes. Lo siguiente más simple es considerar los vectores e_2 y e_3. Aplicando la ecuación (3.2) encontramos los siguientes valores:

$$e_2 \cdot e_2 = -e_0 = -1, \quad e_3 \cdot e_3 = -e_0 = -1, \quad e_2 \cdot e_3 = e_1 = -e_3 \cdot e_2 \,.$$

Aparece ahora cierto comportamiento no trivial. En primer lugar, encontramos que e_2 y e_3 son dos nuevas unidades imaginarias, es decir, soluciones de la ecuación $x^2 + 1 = 0$. Además, los vectores e_2 y e_3 anticonmutan, y como consecuencia el producto definido en la ecuación (3.2) no puede ser conmutativo. Hemos obtenido entonces tres unidades imaginarias e_1, e_2 y e_3, y completando los posibles productos entre ellas de acuerdo a la ecuación (3.2) encontramos los siguientes valores:

$$\begin{aligned} e_1 \cdot e_2 = \quad & e_3 \quad = -e_2 \cdot e_1 \\ e_2 \cdot e_3 = \quad & e_1 \quad = -e_3 \cdot e_2 \\ e_3 \cdot e_1 = \quad & e_2 \quad = -e_1 \cdot e_3 \,. \end{aligned}$$

Si miramos con cuidado estas relaciones, nos daremos cuenta que son precisamente las relaciones que definen el producto cruz de los vectores básicos canónicos en $\mathbb{R}^3$. Quizás esto sea más fácil de apreciar si denotamos $e_1 = i$, $e_2 = j$ y $e_3 = k$, lo cual corresponde a la notación usual del análisis vectorial básico. Las anteriores relaciones se reducen entonces a las siguientes más familiares:

$$\begin{aligned} i \cdot j = &\quad k \quad = -j \cdot i \\ j \cdot k = &\quad i \quad = -k \cdot j \\ k \cdot i = &\quad j \quad = -i \cdot k\,. \end{aligned}$$

Por otro lado, el producto de la ecuación (3.2) restringido a $\mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}e_2 \oplus \mathbb{R}e_3$ se convierte en:

$$\begin{aligned} (x_1e_1 + x_2e_2 + x_3) \cdot (y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3) &= -(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) \\ + (x_2y_3 - x_3y_2)e_1 &+ (-x_1y_3 + x_3y_1)e_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)e_3. \end{aligned} \tag{3.3}$$

De esto se observa que el producto de elementos en $\mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}e_2 \oplus \mathbb{R}e_3$ no cae necesariamente de nuevo en este espacio. Sin embargo consta de dos componentes, la que cae en $\mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}e_2 \oplus \mathbb{R}e_3$ dada por:

$$(x_2y_3 - x_3y_2)e_1 + (-x_1y_3 + x_3y_1)e_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)e_3$$

que es precisamente el producto cruz de los vectores que multiplicamos originalmente, y la componente en $\mathbb{R} = \mathbb{R}e_0$ que, salvo por un signo es dada por:

$$x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3,$$

y que corresponde al producto interno de los vectores. Encontramos así que la fórmula de las sumas de cuatro cuadrados de Euler restringida al espacio $\mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}e_2 \oplus \mathbb{R}e_3$ proporciona las dos principales operaciones vectoriales, el producto cruz y el producto interno. Recordemos que en base a estas operaciones se construye la geometría del espacio de tres dimensiones, usualmente denotado por $\mathbb{R}^3$. Debido a ello, en el resto de este escrito identificaremos a $\mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}e_2 \oplus \mathbb{R}e_3$ con $\mathbb{R}^3$, de modo que cuando hablemos de elementos en este último nos estaremos refiriendo también a los del primero.

Por otro lado, en $\mathbb{R}^3$ el producto cruz de dos vectores u y v se suele escribir como $u \times v$. Además, en el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$, de colecciones ordenadas de n números reales, el producto interno de dos vectores u y v se denota por $\langle u, v\rangle$. De modo que la norma de un vector u en $\mathbb{R}^n$ es dada por:

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

donde la representación en coordenadas de u es $(x_1, \ldots, x_n)$. Si bien esta notación es válida con tal generalidad, nosotros tendremos la oportunidad de aplicarla sólo para $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^4$. Con esta notación encontramos que el producto de dos elementos u y v en $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}e_2 \oplus \mathbb{R}e_3$ de acuerdo a la fórmula (3.2) se escribe como:

$$u \cdot v = -\langle u, v\rangle + u \times v\,. \tag{3.4}$$

De aquí observamos otra característica especial de este producto. Como $u \times u = 0$ para cualquier vector en u de $\mathbb{R}^3$ se tiene que:

$$u \cdot u = -\langle u, u\rangle = -\|u\|^2$$

el cual es negativo a menos que $u = 0$. Más aún, si consideramos la esfera centrada en el origen en $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}e_2 \oplus \mathbb{R}e_3$ de radio 1 dada por:

$$S^2 = \{u \in \mathbb{R}^3 : \|u\| = 1\}\,,$$

entonces lo anterior nos dice que para el producto de (3.2) tenemos $u \cdot u = -1$ para todo vector u que pertenece a S^2. Es decir, la esfera S^2 consta de unidades imaginarias todas distintas entre sí.

En base a esto, toda tétrada real (x_0, x_1, x_2, x_3) se puede descomponer en las partes x_0 y (x_1, x_2, x_3) distinguidas según su naturaleza respecto del producto (3.2). La primera parte x_0 se multiplica como lo hacen usualmente los reales y la segunda parte (x_1, x_2, x_3) posee, como acabamos de ver, un carácter imaginario. Siguiendo estas observaciones, cada vector x en $\mathbb{R}^4$ lo podemos escribir como una suma

$$x = a + u,$$

donde a es la primera componente, llamada la parte real de x, y u es el vector en $\mathbb{R}^3$ obtenido de las tres últimas componentes y que es llamado la parte imaginaria de x. Cuando un vector en $\mathbb{R}^4$ tenga su primera componente nula lo llamaremos imaginario puro y cuando las tres últimas sean todas nulas diremos que el vector es un número real. Esto último es congruente con nuestras observaciones anteriores, en las cuales mostramos que el producto de (3.2) restringido al primer sumando en $\mathbb{R}^4$ define el producto de números reales.

Finalmente, encontramos que el producto definido por la ecuación (3.2) se puede escribir de manera completa con la fórmula:

$$(a + u) \cdot (b + v) = (ab - \langle u, v\rangle) + (av + bu + u \times v)\,, \tag{3.5}$$

que expresa las partes real e imaginaria del producto de dos vectores $a + u$ y $b + v$, de los cuales a, b son las partes reales y u, v son las partes imaginarias. En realidad, ya hemos verificado gran parte de esta identidad. Sólo nos resta calcular el producto, según la ecuación (3.2), de un número real y de un vector imaginario puro. Dejamos al lector este último cálculo.

Es bastante notable el hecho de que la ecuación (3.5) consta exactamente de las operaciones con las que estudiamos el espacio de tres dimensiones. Como ya habiamos visto mediante (3.4), contiene al producto interno y al producto cruz. Pero ahora además observamos que (3.5) contiene la suma de vectores y la multiplicación de estos por escalares, así como la multiplicación misma de números reales.

En la sección anterior observamos que la conjugación de números complejos nos permite relacionar el producto de estos con la norma de vectores en el plano. Este hecho quedó establecido en la ecuación (2.3). Utilizando la descomposición de una tétrada real en su parte real y su parte imaginaria es posible definir también una conjugación. El conjugado de una tétrada real x es definido por:

$$\overline{x} = \overline{a + u} = a - u\,,$$

en donde hemos tomado $x = a + u$ como la descomposición de x en su parte real a y su parte imaginaria u. Usando tal descomposición, encontramos entonces que se cumple:

$$\begin{aligned} x \cdot \overline{x} &= (a + u) \cdot (a - u) \\ &= (a^2 - \langle u, -u\rangle) + (au - au + u \times (-u)) \\ &= a^2 + \langle u, u\rangle = \|x\|^2 \end{aligned} \tag{3.6}$$

que es el cuadrado de la norma de x. Por otro lado, en la sección anterior vimos que para los números complejos el módulo de un producto es el producto de los módulos, como se puede ver más explicitamente en la ecuación (2.6). ¿Ocurre esto también para las tétradas reales con su producto y norma como lo hemos visto en esta sección? Es decir, nos preguntamos por la validez de la ecuación:

$$\|x \cdot y\| = \|x\| \cdot \|y\|\,, \tag{3.7}$$

para cualesquiera x y y vectores en $\mathbb{R}^4$. La respuesta es afirmativa. De hecho la fórmula de las sumas de cuatro cuadrados de Euler que ha servido de base para la discusión en esta sección es precisamente la ecuación (3.7), como puede fácilmente verificar el lector partiendo de la fórmula (3.2).

Deduciremos un par de propiedades más del producto que venimos considerando. En primer lugar, observamos que tal producto es asociativo, es decir, satisface $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$. Esto se puede ver directamente de la ecuación (3.2), o de la fórmula más explícita (3.5) que contiene productos con propiedades e identidades bien conocidas. Si bien la tarea es un tanto engorrosa, se puede simplificar tomando cada una de las tétradas reales x, y, z como un número real o un vector imaginario puro con todas sus posibles combinaciones.

Por otro lado, de nuevo de cualquiera de las ecuaciones (3.2) o (3.5), se observa que los números reales conmutan con todas las tétradas. Es decir, se cumple que $a \cdot x = x \cdot a$ si a es real y x es cualquier tétrada real. En particular, podemos escribir $\frac{x}{a}$ para cualquier tétrada real x y a un número real no nulo sin preocuparnos por sus dos posibles significados: $a^{-1} \cdot x$ o $x \cdot a^{-1}$.

Las propiedades anteriores nos permiten descubrir con facilidad otra propiedad más que es muy interesante. De lo anterior y de la ecuación (3.6) encontramos que:

$$x \cdot \frac{\overline{x}}{\|x\|^2} = 1\,, \tag{3.8}$$

siempre y cuando x sea una tétrada real distinta de cero. En otras palabras, todo elemento de $\mathbb{R}^4$ posee un inverso multiplicativo.

Por otro lado, la ecuación (3.7) elevada al cuadrado junto con la ecuación (3.6) nos permiten realizar el siguiente cálculo:

$$\begin{aligned} x \cdot y \cdot \overline{x \cdot y} &= \|x \cdot y\|^2 = \|x\|^2 \cdot \|y\|^2 \\ &= x \cdot \overline{x} \cdot \|y\|^2 = x \cdot \|y\|^2 \cdot \overline{x} \\ &= x \cdot y \cdot \overline{y} \cdot \overline{x}\,. \end{aligned}$$

En estas identidades hemos utilizado que los números reales conmutan con las tétradas respecto del producto (3.2). Si ahora suponemos x y y distintos de cero y multiplicamos por la izquierda primero por el inverso de x y luego por el inverso de y concluimos la ecuación:

$$\overline{x \cdot y} = \overline{y} \cdot \overline{x}\,. \tag{3.9}$$

De hecho el razonamiento anterior se puede invertir para probar que, dados el producto y la conjugación que hemos considerado, la ecuación (3.9) es equivalente a la fórmula de las sumas de cuatro cuadrados de Euler.

Finalmente, enunciaremos sin mayor discusión la interpretación geométrica del producto cruz de vectores en $\mathbb{R}^3$. Sin embargo, observamos que es posible deducir estas últimas afirmaciones de esta sección de la misma forma en que lo hemos venido haciendo.

Si u, v son vectores en $\mathbb{R}^3$, entonces $u \times v$ es un vector perpendicular a ambos u y v. Además, la norma de $u \times v$ es $\|u\| \cdot \|v\| \operatorname{sen}(\theta)$, donde θ es el ángulo entre u y v. Es decir, $u \times v$ satisface las condiciones:

$$\begin{aligned} \|u \times v\| &= \|u\| \cdot \|v\| \operatorname{sen}(\theta) \\ u \times v &\perp u, v\,. \end{aligned}$$

De hecho, estas propiedades determinan a $u \times v$ salvo por un signo.

4. Las fórmulas de Euler y las rotaciones en tres dimensiones

En la sección anterior construimos sobre $\mathbb{R}^4$, a partir de la fórmula de las sumas de cuatro cuadrados de Euler, una serie de operaciones que lo asemejan casi totalmente a los números complejos. La única excepción es la no conmutatividad del producto en $\mathbb{R}^4$. Veremos ahora cómo tales construcciones nos permiten estudiar la geometría del espacio de tres dimensiones de manera similar a la forma en que los números complejos nos permitieron estudiar la geometría del plano.

La clave para usar la sección anterior en el estudio de la geometría del espacio de tres dimensiones es la fórmula (3.7). De tal fórmula vemos que si x, y son elementos de $\mathbb{R}^4$ y $\|x\| = 1$, entonces al mutiplicar a y por la izquierda por x la norma de este último no cambia, es decir:

$$\|x \cdot y\| = \|y\|\,.$$

Se cumple también una afirmación similar al multiplicar por la derecha por un tal x de norma 1. Concluimos de aquí que las multiplicaciones por la izquierda y por la derecha por tétradas reales de norma 1 son transformaciones rígidas para la geometría euclidiana. Es decir, son transformaciones que definen movimientos rígidos de los objetos geométricos de la geometría euclidiana en $\mathbb{R}^4$.

Debido a lo anterior, es importante considerar un nuevo objeto geométrico, el conjunto de vectores de norma 1 en $\mathbb{R}^4$:

$$S^3 = \{x \in \mathbb{R}^4 : \|x\| = 1\}\,.$$

Este conjunto se puede considerar como una generalización directa del círculo S^1 y de la esfera S^2 en el espacio de tres dimensiones. Por esta razón, S^3 es conocida como la esfera tridimensional de radio 1 y centrada en el origen en $\mathbb{R}^4$.

Así pues, hemos visto la posibilidad de generar con los elementos en S^3 transformaciones de $\mathbb{R}^4$ que permiten estudiar la geometría euclidiana de tal espacio. Sin embargo, nuestro interés se encuentra en el estudio de la geometría euclidiana del espacio de tres dimensiones. Respecto de ello, observamos una dificultad en el producto por la izquierda por una tétrada real: tal transformación no necesariamente lleva vectores de $\mathbb{R}^3$ en vectores de $\mathbb{R}^3$. Por ejemplo, tomemos $x = a + u$ una tétrada real, escrita en términos de sus partes real e imaginaria, y v un vector en $\mathbb{R}^3$, éste último imaginario puro. Entonces, por la fórmula (3.5) tenemos:

$$(a+u)\cdot v = -\langle u, v\rangle + av + u\times v\,,$$

el cual posee parte real $-\langle u, v\rangle$ y por tanto no pertenece a $\mathbb{R}^3$ en general. Similarmente, la multiplicación por la derecha por un tal x da la expresión:

$$v\cdot(a+u) = -\langle v, u\rangle + av + v\times u\,,$$

que de hecho posee la misma parte real, y por tanto no está en $\mathbb{R}^3$ en general. Sin embargo, el hecho de que ambas multiplicaciones, por la derecha y por la izquierda por x, dan lugar a tétradas con la misma parte real nos permite resolver el problema. Si multiplicamos por la derecha por $\overline{x} = a - u$, es fácil ver que la parte real cambia de signo:

$$v\cdot(a-u) = \langle v, u\rangle + av - v\times u\,.$$

Esto nos sugiere combinar la multiplicación por la izquierda por x con la multiplicación por la derecha por $\overline{x}$ en la esperanza de poder obtener una tétrada con parte real nula. Un cálculo directo usando la fórmula (3.5) nos da como resultado:

$$\begin{aligned}(a+u)\cdot v\cdot(a-u) &= (-\langle u, v\rangle + av + u\times v)\cdot(a-u) \\ &= (-a\langle u, v\rangle + \langle av, u\rangle + \langle u\times v, u\rangle) \\ &\quad + (a^2 v + au\times v + \langle u, v\rangle u - av\times u - (u\times v)\times u) \\ &= a^2 v + 2au\times v + \langle u, v\rangle u - (u\times v)\times u.\end{aligned} \tag{4.1}$$

Esta última expresión carece de parte real como deseábamos. Observamos que en este cálculo hemos utilizado el hecho de que $u\times v$ es perpendicular a ambos u, v.

Así pues, tal combinación especial de operaciones, multiplicación por la izquierda por x y por la derecha por $\overline{x}$, ahora sí lleva vectores de $\mathbb{R}^3$ en vectores de $\mathbb{R}^3$ como deseábamos. Más aún, si la norma de x

es 1, también lo es la de $\overline{x}$, y entonces esta combinación de operaciones no cambia la norma de los vectores, puesto que:

$$\|x \cdot v \cdot \overline{x}\| = \|x\| \cdot \|v\| \cdot \|\overline{x}\| = \|v\|\,,$$

para cualquier v en $\mathbb{R}^3$. Esta transformación es por tanto rígida respecto de la geometría euclidiana en $\mathbb{R}^3$.

Por lo que hemos discutido, nos interesa tal expresión para x un elemento en la esfera S^3 y en tal caso la ecuación (3.6) nos dice que $\overline{x} = x^{-1}$ es el inverso multiplicativo de x. Por tanto, podemos reescribir la ecuación (4.1) como:

$$x \cdot v \cdot x^{-1} = a^2 v + 2au \times v + \langle u, v\rangle\, u - (u \times v) \times u\,, \tag{4.2}$$

donde x es un elemento de S^3 con parte real a y parte imaginaria u. De nuevo enfatizamos que tal transformación preserva todas las nociones de la geometría euclidiana en $\mathbb{R}^3$.

Para poder continuar con nuestro estudio de la geometría euclidiana en el espacio de tres dimensiones necesitamos discutir algunas nociones de álgebra lineal.

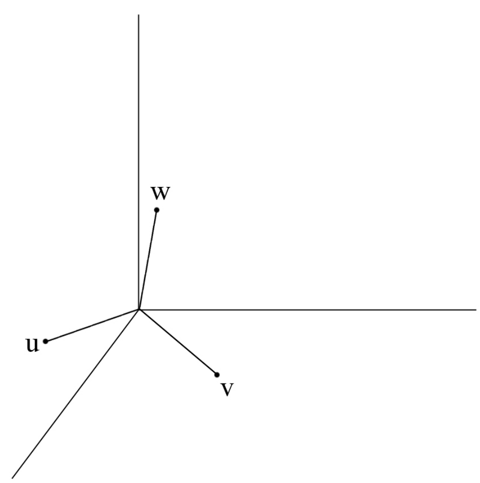

Figura 5: Una base ortonormal.

Cuando realizamos cálculos con coordenadas en el espacio de tres dimensiones utilizamos un marco ortonormal dado por tres vectores unitarios mutuamente perpendiculares; a un tal marco lo llamamos una base ortonormal. En la Figura 5 se muestra una base ortonormal u, v, w.

Un ejemplo de una base ortonormal es dado por la base canónica formada por los tres vectores e_1, e_2, e_3. El orden de tal base es importante pues ello nos da el orden de las coordenadas en $\mathbb{R}^3$. Este orden lo podemos detectar hasta cierto punto con la ayuda del producto que hemos venido considerado, pues de acuerdo a éste se cumple $e_1 \cdot e_2 = e_3$. Esto a su vez se puede reescribir como la relación $i \cdot j = k$ que ya antes vimos.

Supongamos ahora que tenemos una base ortonormal u_1, u_2, u_3. Entonces, de acuerdo a la ecuación (3.5) se cumple:

$$u_1 \cdot u_2 = -\langle u_1, u_2 \rangle + u_1 \times u_2 = u_1 \times u_2$$

debido a que u_1 y u_2 son perpendiculares. Por la interpretación geométrica del producto cruz este vector es unitario y perpendicular a ambos u_1 y u_2. Por tanto, se cumple:

$$u_1 \cdot u_2 = u_3, \quad \text{o} \quad u_1 \cdot u_2 = -u_3 \,.$$

En el primer caso, tenemos la misma situación que con la base canónica. Distinguimos a las bases que cumplen la primera condición llamándolas bases ortonormales de orientación positiva. Si por otro lado se cumple $u_1 \cdot u_2 = -u_3$, basta intercambiar los dos primeros elementos para tener una base ortonormal de orientación positiva.

Hemos definido las bases ortonormales con orientación positiva imponiendo restricciones sobre el producto de los dos primeros elementos. Usando esto junto con la interpretación geométrica del producto cruz, es posible ver que toda base ortonormal con orientación positiva u_1, u_2, u_3 tiene la misma tabla de productos que la base canónica i, j, k. Dejamos los detalles al lector.

En base a estas nociones podemos definir uno de los conceptos más importantes de la geometría euclidiana en $\mathbb{R}^3$: las rotaciones. Una transformación lineal T sobre $\mathbb{R}^3$ se dice una rotación si la imagen de la base canónica es una base ortonormal de orientación positiva, es decir, si los vectores $T(e_1), T(e_2), T(e_3)$ forman, en ese orden, una base ortonormal de orientación positiva.

Las rotaciones constituyen uno de los principales bloques de construcción de la geometría euclidiana en tres dimensiones. Las otras transformaciones relevantes son las reflexiones respecto de planos que pasan por el origen. Si bien no discutiremos estas últimas, por lo menos mencionamos que basta conocer una sola reflexión para reconstruir todas las demás a partir de las rotaciones. Ésta es una de las razones para restringir el resto de nuestra discusión a las rotaciones.

Con la noción de rotación a la mano podemos ahora estudiar las transformaciones de $\mathbb{R}^3$ dadas por la ecuación (4.2). En tal ecuación, $x = a + u$ pertenece a S^3 y tiene partes real e imaginaria a y u, respectivamente. Para facilitar nuestros cálculos denotaremos con T_x la transformación que define la ecuación (4.2), es decir:

$$\begin{aligned} &T_x : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ &v \mapsto x \cdot v \cdot x^{-1} . \end{aligned}$$

Tal transformación será considerada sólo cuando x sea un elemento en S^3. Podemos dar una primera observación sobre estas transformaciones: el producto de dos de ellas es del mismo tipo. De manera más explícita, tenemos:

$$\begin{aligned} T_{x\cdot y}(v) &= (x \cdot y) \cdot v \cdot (x \cdot y)^{-1} \\ &= (x \cdot y) \cdot v \cdot \overline{(x \cdot y)} \\ &= (x \cdot y) \cdot v \cdot (\overline{y} \cdot \overline{x}) \\ &= x \cdot (y \cdot v \cdot \overline{y}) \cdot \overline{x} \\ &= x \cdot (y \cdot v \cdot y^{-1}) \cdot x^{-1} \\ &= T_x \circ T_y(v) . \end{aligned}$$

Es decir, $T_{x\cdot y} = T_x \circ T_y$. En este cálculo hemos usado diversas propiedades del producto de tétradas de números reales.

Comencemos pues a analizar estas transformaciones con un caso particular. Supongamos que x es un elemento en S^3 de la forma $a+be_1 = a + bi$, es decir, su parte imaginaria es múltiplo del primer elemento de la base canónica. En particular, x es de hecho un número complejo. La condición $\|x\| = 1$ nos dice entonces que x es un elemento del círculo S^1. Por tanto, x se puede escribir como:

$$x = \cos(\theta) + \sin(\theta)i = e^{i\theta} .$$

Para escribir explícitamente la transformación T_x, ajustamos la expresión de los vectores en $\mathbb{R}^3$ como sigue. Dado que $i \cdot j = k$, todo vector $v = (a, b, c)$ se puede escribir como:

$$v = ai + bj + ck = ai + (b + ci) \cdot j .$$

Por tanto, el valor de T_x en tal vector v es dado por:

$$\begin{aligned} T_x(v) &= x \cdot v \cdot x^{-1} \\ &= e^{i\theta} a i e^{-i\theta} + e^{i\theta} \cdot (b + ci) \cdot j \cdot e^{-i\theta} \\ &= ai + (b + ci)e^{i\theta} \cdot j \cdot e^{-i\theta} , \end{aligned}$$

en donde hemos utilizado que el producto restringido a los números complejos es conmutativo. Resta simplificar el factor $e^{i\theta} \cdot j \cdot e^{-i\theta}$. Mediante un cálculo directo encontramos que:

$$\begin{aligned} e^{i\theta} \cdot j \cdot e^{-i\theta} &= (\cos(\theta) + \sin(\theta)i) \cdot j \cdot (\cos(\theta) - \sin(\theta)i) \\ &= (\cos(\theta) + \sin(\theta)i) \cdot (\cos(\theta)j - \sin(\theta)j \cdot i) \\ &= (\cos(\theta) + \sin(\theta)i) \cdot (\cos(\theta)j + \sin(\theta)i \cdot j) \\ &= (\cos(\theta) + \sin(\theta)i) \cdot (\cos(\theta) + \sin(\theta)i) \cdot j \\ &= e^{i\theta}e^{i\theta} \cdot j \\ &= e^{2i\theta} \cdot j\,. \end{aligned}$$

Reuniendo los últimos cálculos llegamos finalmente a la expresión:

$$T_x(ai + (b + ci) \cdot j) = ai + e^{2i\theta}(b + ci) \cdot j\,, \tag{4.3}$$

en la cual $x = e^{i\theta}$. La interpretación es ahora posible: Para $x = e^{i\theta}$, la transformación T_x fija el eje generado por i mientras que rota plano generado por j e $i \cdot j = k$ lo un ángulo 2θ. Aquí estamos utilizando que los puntos $(b + ci) \cdot j$ forman precisamente el plano generado por j y k. Es fácil ver que tal T_x es una rotación. Ilustramos tal rotación en la Figura 6.

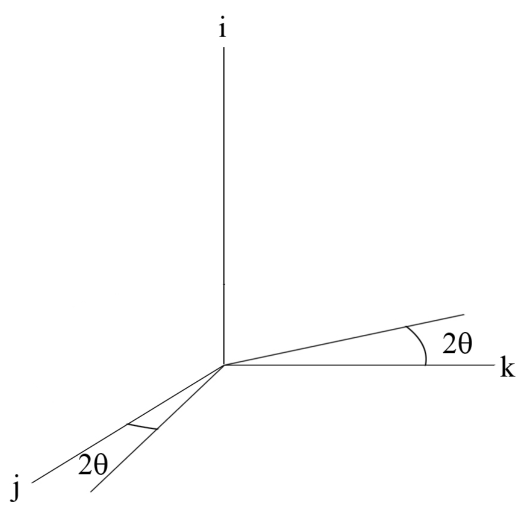

Figura 6: La rotación T_x cuando $x = e^{i\theta}$.

Resta considerar el análisis del comportamiento de T_x con x cualquier elemento de S^3. Para un tal x arbitrario, todavía contamos con la expresión $x = a + u$ que lo descompone en sus partes real e imaginaria. El caso en que $u = 0$ es más bien trivial, pues tal condición obliga a que $a = \pm 1$ (pues $\|x\| = 1$) y en tal caso $T_x(v) = v$ es la transformación identidad. Cuando $u \neq 0$, podemos considerar la unidad imaginaria asociada a u dada por:

$$u_1 = \frac{u}{\|u\|} \,,$$

y con ella podemos escribir $x = a + \|u\| u_1$. El vector u_1 es ciertamente una unidad imaginaria pues satisface $u_1 \cdot u_1 = -1$, como se puede verificar fácilmente con la fórmula (3.4). En otras palabras, hemos escrito un elemento x de S^3 con parte imaginaria no nula como una especie de número complejo en el cual u_1 juega el papel de i. Para continuar nuestro análisis veamos ahora que podemos completar u_1 a una base para obtener los elementos correspondientes a j y k respecto de u_1.

Dada nuestra unidad imaginaria u_1 tomemos cualquier vector u_2 unitario y perpendicular a ella. Entonces, el vector $u_3 = u_1 \cdot u_2$ es unitario y perpendicular a ambos u_1, u_2. De hecho hemos construido una base ortonormal con orientación positiva con primer elemento dado por u_1. Pero entonces, como observamos antes, la base u_1, u_2, u_3 tiene la misma tabla de productos que i, j, k. En base a esto basta repetir los argumentos que dimos arriba para probar que la transformación T_x para el elemento x de S^3 que venimos discutiendo satisface:

$$T_x(au_1 + (b + cu_1) \cdot u_2) = au_1 + (\cos(2\theta) + \sin(2\theta) u_1)(b + cu_1) \cdot u_2 \,, \quad (4.4)$$

en donde hemos expresado a los vectores en $\mathbb{R}^3$ en términos de la base u_1, u_2, u_3 como lo hicimos antes con la base canónica.

A partir de la ecuación (4.4) obtenemos la siguiente interpretación general para las transformaciones T_x con x un elemento de S^3 con parte imaginaria u no nula: Si $u_1 = \frac{u}{\|u\|}$ es la unidad imaginaria asociada a u, entonces T_x es la rotación que deja fijos a los puntos en la recta generada por u_1 y que rota al plano perpendicular a esta recta un ángulo 2θ, donde θ es el ángulo tal que $\sin(\theta) = \|u\|$.

Hemos así obtenido una gran cantidad de rotaciones mediante las transformaciones T_x. Es importante hace notar que las hemos construido a partir del producto de tétradas que se deduce de la fórmula de las sumas de cuatro cuadrados de Euler (3.1). La pregunta natural en este punto es, ¿son éstas todas las posibles rotaciones? En otras palabras, ¿toda rotación en $\mathbb{R}^3$ se puede escribir como una transformación de la forma T_x? La respuesta resulta ser afirmativa. De hecho para ver que éste es el caso utilizaremos una más de las herramientas de Euler.

Euler introdujo el uso de tres ángulos para estudiar las rotaciones en el espacio de tres dimensiones. Una forma de describir tales ángulos es mediante su uso para determinar la posición de un vector unitario de $\mathbb{R}^3$ respecto de la base canónica. Veamos cómo hacer esto en la Figura 7, explicando cómo pasar del vector i al vector u. El vector i es parte de la base canónica de $\mathbb{R}^3$ cuyos tres elementos aparecen identificados como i, j, k. Apliquemos la rotación que deja fijo al vector k y rota un ángulo α al plano que generan los vectores i y j; en este proceso el vector i es llevado al vector N. El círculo en el plano i, j nos sirve de referencia para visualizar tanto el plano que generan los vectores i y j, como la rotación de este plano. Notemos que esta rotación fija un eje y gira el plano perpendicular a él y es por tanto de la forma T_{x_1} para algún x_1 elemento de S^3. Rotemos ahora un ángulo β alrededor del vector N; de nuevo se trata de una rotación de la forma T_{x_2} para algún x_2 elemento de S^3, pues fija a la recta generada por el vector N y gira a su plano perpendicular. En este paso, tanto el eje generado por k como el plano generado por los vectores i y j se inclinan un ángulo β; en particular, el vector k es llevado al vector w y el círculo en el plano i, j es llevado en el círculo en el plano u, v. Finalmente, rotamos ahora un ángulo γ alrededor del eje generado por el vector w. Esta rotación gira el círculo en el plano u, v alrededor de su centro hasta llevar el vector N en el vector u. Esta última rotación es de nuevo de la forma T_{x_3} donde x_3 pertenece a S^3.

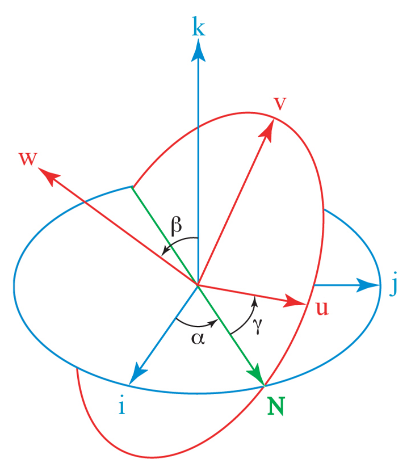

Figura 7: Los ángulos de Euler.

Mediante las rotaciones así descritas hemos llevado la base canónica, denotada con los vectores i, j, k, en la base ortonormal dada por los vectores u, v, w (ver la Figura 7). En esta situación decimos que α, β, γ

son los ángulos de Euler de la base u, v, w respecto de la base i, j, k. Este procedimiento se puede repetir para explicar cómo llevar la base canónica en cualquier otra base ortonormal de orientación positiva.

Supongamos ahora que T es una rotación cualquiera del espacio de tres dimensiones. Entonces sabemos que la base u, v, w que se obtiene al aplicar T a la base canónica es una base ortonormal con orientación positiva. Por lo que acabamos de explicar, están involucrados tres ángulos de Euler que nos permiten llevar la base canónica en la base u, v, w. Pero más aún, por la forma en que los obtuvimos, hay tres elementos x_1, x_2, x_3 de S^3 tal que la composición de las rotaciones que definen llevan la base canónica en u, v, w. Es decir:

$$\begin{aligned}
T_{x_3} \circ T_{x_2} \circ T_{x_1}(e_1) &= u \\
T_{x_3} \circ T_{x_2} \circ T_{x_1}(e_2) &= v \\
T_{x_3} \circ T_{x_2} \circ T_{x_1}(e_3) &= w\,.
\end{aligned}$$

Por nuestra elección de u, v, w, esto nos dice que $T_{x_1} \circ T_{x_2} \circ T_{x_3}$ y T coinciden en la base canónica y por tanto coinciden en general. En otras palabras:

$$T_{x_3} \circ T_{x_2} \circ T_{x_1} = T.$$

Pero vimos antes que $T_x \circ T_y = T_{x \cdot y}$ y así tenemos:

$$T_{x_3 \cdot x_2 \cdot x_1} = T\,.$$

Concluimos pues que toda rotación T es de la forma T_z para algún z elemento de S^3. En particular, nuestra discusión anterior dice que toda rotación del espacio de tres dimensiones posee por tanto un eje de rotación que deja fijo y alrededor del cual los demás puntos son rotados. Esta afirmación es conocida como el teorema de Euler sobre las rotaciones en el espacio de tres dimensiones, y es una de las bases para estudiar la geometría de este espacio.

5. Comentarios finales y notas históricas

La fórmula de Euler $e^{i\theta} = \cos(\theta) + \sin(\theta)i$ se puede considerar realmente una de las ecuaciones más grandes creadas por el ingenio humano. Una razón para considerarla así es que cuando $\theta = \pi$ se reduce a:

$$e^{i\pi} + 1 = 0\,,$$

la cual es una relación entre cinco de los números más importantes: 0, 1, π, e, i. El físico Richard Feynman la llamó “la fórmula más notable de la Matemática”.

El "producto de tétradas reales" que hemos discutido en este trabajo define lo que son conocidos como los cuaternios o números de Hamilton. Sir William Rowan Hamilton fue un matemático del siglo XIX que es reconocido como el descubridor de los cuaternios. La motivación que lo llevó a tal descubrimiento es de hecho la que aquí hemos presentado: estudiar la geometría del espacio de tres dimensiones por métodos algebraicos similares al uso de los números complejos para el caso del plano. Sin embargo, parece ser que Hamilton desconocía la fórmula de las sumas de cuatro cuadrados de Euler; al menos desconocía que esta fórmula de Euler contenía ya lo que él buscó por algunos años. Como referencia histórica, señalamos que la fórmula de las sumas de cuatro cuadrados de Euler fue comunicada por Euler en una carta a Goldbach el 4 de mayo de 1748. Esto ocurrió casi 100 años antes de que en 1843 Hamilton descubriera los cuaternios. Nuestro trabajo podría pensarse entonces como una "reconstrucción" de lo que pudo ser la Historia al obtener los cuaternios a partir del trabajo de Euler. De alguna forma estamos también atribuyendo los cuaternios a Euler. Esta idea no es nueva: el notable algebrista Leonard Eugene Dickson hizo notar la relación entre la fórmula de las sumas de cuatro cuadrados de Euler y los cuaternios. Dickson publicó tales observaciones en su artículo "On quaternions and their generalization and the history of the eight square theorem" publicado en 1919 en la revista Annals of Mathematics.

Por otro lado, en este trabajo hemos hecho notar que el estudio de las geometrías del plano y del espacio de tres dimensiones involucra el considerar al círculo S^1, y a las esferas S^2 y S^3 de dos y tres dimensiones, respectivamente. En tales consideraciones fue clave el producto de los números complejos y de los cuaternios. Más aún, tomando como punto de partida nuestro desarrollo es posible ver que, junto con las traslaciones, el círculo S^1 y la esfera S^3 determinan completamente las geometrías del plano y del espacio de tres dimensiones, respectivamente. Enfatizamos de nuevo que en ello es fundamental que ambos S^1 y S^3 sean dotados de los productos que provienen de los números complejos y de los cuaternios.

En el lenguaje de la Matemática moderna, se dice que S^1 y S^3 poseen estructuras de grupo de Lie que determinan la geometría del plano y del espacio de tres dimensiones. A manera de aclaración, un grupo de Lie es un tipo de espacio, probablemente "curvado", en el cual podemos hacer Cálculo Diferencial y multiplicar los elementos de manera asociativa, con identidad y con inversos. Sophus Lie introdujo de manera abstracta este tipo de objetos en 1873. Por su parte, Felix Klein dio a conocer en 1872 su programa de Erlangen (ciudad en la que vivía) para estudiar la Geometría a través de los grupos de Lie. En la actualidad, los trabajos de Lie y de Klein son la base de todo tipo de Geometría moderna.

Con este trabajo hemos hecho notar que la semilla de la noción de grupo de Lie, y por tanto la base de la Geometría moderna, se encontraba ya en el trabajo de Euler. Tal semilla estaba presente más de 100 años antes de que los conceptos modernos fueran formulados. No podemos dejar de preguntarnos cuanto más avanzada sería la Matemática de haberse puesto mayor atención al trabajo de Euler. Ciertamente su trabajo ha recibido gran reconocimiento en todo el mundo, siendo así la base para el trabajo de otros y la fuente de inspiración para muchos. Sin embargo, queda claro que el genio de Euler sobrepasó en exceso a su tiempo. Esto tal vez nos ayude a entender la frase de Pierre-Simon Laplace "Lisez Euler, lisez Euler, c' est notre maître à tous", que bien podemos traducir como: "Lean a Euler, lean a Euler, él es nuestro maestro en todo".