EL INFINITO

1. Introducción

La formación matemática básica se inicia con el aprendizaje de los conceptos de *conjunto* y *número*. La idea de conjunto se establece como un *"concepto primitivo"* que debe entenderse con la idea intuitiva de grupo, colección, agrupación, etc. El concepto de número se asocia con la idea de *cantidad* de elementos de un conjunto. Se indica que todo conjunto tiene una cantidad dada de elementos y recíprocamente, para cualquier número natural n existe al menos un conjunto con n elementos.

De esta forma, se inicia el estudio del *Conjunto de los Números Naturales* e indirectamente el estudio de los conjuntos numéricos.

Una pregunta que frecuentemente se hace es, ¿cuántos elementos tiene el conjunto de números naturales $\boldsymbol{N}$? La respuesta introduce al estudiante al concepto de *infinito* el cual se enseña de manera intuitiva sin entrar en los detalles de la formalidad matemática que subyace en él.

La acepción de *infinito* usada en lenguaje coloquial hace que otros conceptos que se estudian posteriormente en cursos de cálculo o superiores, tales como: *cardinalidad, densidad, continuidad, convergencia, numerabilidad, no numerabilidad, número transfinito,* etc, sean difíciles de comprender debido a la falta de precisión que se genera en el aprendizaje de la idea de infinitud.

El presente trabajo parte del análisis de distintas concepciones de infinito empleadas en el lenguaje cotidiano y la relación y diferencias que se presentan con la definición formal matemática de este término. Posteriormente se analizan algunos ejemplos del empleo del infinito en el desarrollo de otros conceptos matemáticos. Finalmente se hace una breve introducción al concepto de número transfinito y de su desarrollo teórico en la teoría de conjuntos.

2. El concepto cotidiano de infinito

Una primera aproximación a la idea del *infinito* se hace por oposición a la idea de lo que es *finito*, esto es, infinito es aquello que "no es finito". La definición de *finito* indicada en el Diccionario de la Real Academia Española establece:

finito, ta.
Del lat. finitus, acabado, finalizado.
1. adj. Que tiene fin, término, límite.

Si se entiende como infinito el concepto opuesto al dado por la Real Academia Española se debe entender que infinito es todo aquello que no tiene fin, término ni límite. Sin embargo, esta concepción puede no ajustarse a algunas nociones matemáticas en donde la idea de no tener fin, no tener límite o no tener término no es tan clara. Por ejemplo, se sabe que el

intervalo [0, 1] es *un conjunto infinito* pero no es cierto que no tiene fin ni límite en el sentido de que es un conjunto acotado.

Por otro lado, en la misma referencia encontramos que en la definición de *infinito* se establece:

infinito, ta.
Del lat. infinitus.
1. adj. Que no tiene ni puede tener fin ni término.
2. [adj.] Muy numeroso, grande y enorme en cualquier línea.
3. [adj.] V. proceso en infinito.
4. [adj.] Esgr. V. línea infinita.
5. m. Mat. Signo en forma de un ocho tendido (∞), que sirve para expresar un valor mayor que cualquier cantidad asignable.
6. adv. m. Excesivamente, muchísimo.

Se observa que las acepciones 1 a 4 junto con la 6 de esta definición son ambiguas. De la primera se podría pensar que conjuntos como un intervalo cerrado de $\boldsymbol{R}$ o bien, no es un conjunto infinito o bien no tienen fin ni término. De esta manera lo que valdría preguntarse es ¿en qué sentido se habla de no tener fin ni término?

La segunda acepción y la sexta son imprecisas ya que nos indican en primera instancia que infinito es equivalente a *muy numeroso* o *muy grande* en cuyo caso se podría interpretar que un conjunto con una cantidad de elementos muy grande por ejemplo, desde este punto de vista, se podría pensar que $(10!!!!!!!!!!!)^{10000}$ es infinito aunque sea una cantidad finita.
La expresión *"en cualquier línea"* de la segunda acepción es todavía más imprecisa pues no queda claro cual es el sentido matemático que se le desea dar a la expresión.

Las acepciones tres y cuatro son redundantes ya que están usando el mismo concepto que se está definiendo.

La quinta acepción está clasificada como el significado matemático que se le da a la expresión. En este caso, se relaciona con el concepto de *cantidad*. Revisando en la referencia mencionada su significado, obtenemos una suerte de acepciones matemáticas tan imprecisas como las anteriormente mencionadas dado que refieren implícita o explícitamente a otros conceptos tales como: *unidad, estructura algebraica* y *relación de orden de un conjunto.*

El lenguaje humano tiene la característica de ser abierto y en algunos casos polisémico. De esta forma, se pueden utilizar los conceptos de manera poco precisa y aún así estructurar un argumento de manera que la idea central se comprenda y sea común a los interlocutores aún cuando se este hablando de forma relativamente ambigua, esto es, no se da una definición precisa de los conceptos utilizados y cada interlocutor hace su propia lectura del texto con base en su experiencia previa y su bagaje cultural. En este contexto, el infinito mencionado en el DRAE hace referencia a la idea o noción de lo *"incomensurablemente grande"*,

aunque esta noción deja a la interpretación y la experiencia del individuo de lo que entiende por *"incomensurablemente grande"*.

Una anécdota que se escucha frecuentemente en la Escuela de Matemática de la Universidad de Costa Rica ilustra la forma en que se concibe el infinito de manera intuitiva:

Sucedió durante una clase de Cálculo Diferencial e Integral. Cuando el profesor estaba desarrollando la teoría de límites al infinito y límites infinitos, un estudiante le pregunto Qué es el infinito? El Profesor le indicó:`` El infinito es algo como esto...". Seguidamente tomo la tiza y comenzó a trazar una linea alrededor del aula dándole tres vueltas, luego sin dejar de trazar la línea, abrió la puerta y se fue...Los estudiantes se quedaron esperando pero el profesor no regresó. Cuando salieron vieron como la línea que el profesor trazó recorría las paredes, bajaba por las gradas y salía del edificio... A la clase siguiente, mientras los estudiantes esperaban la llegada del profesor, este se presentó trazando aún la línea con una tiza hasta llegar de nuevo a la pizarra y le dijo a los estudiantes: "Bueno, esto no es el infinito pero al menos ya tienen una idea de lo que es"

Se ve que, aun cuando el profesor trató de dar un ejemplo bastante ilustrativo del infinito, siempre quedó encasillado en un ejemplo finito pero *"muy grande"*.

El concepto de infinito no se puede formar a partir de metáforas como la anterior. Únicamente se logra generar una idea intuitiva, imprecisa e incompleta de este. Por ejemplo, si observamos la líneas de un ferrocarril y notamos como se pierden el en horizonte perceptible, no se puede afirmar que la longitud de estas es infinita. Así, la imagen mental generada en este tipo de ejemplos solo puede formar una noción acotada del infinito.

Desde este punto de vista, el concepto de infinito tiene la misma naturaleza de los *númenos kantianos. "Un númeno o noúmeno es un ente de razón (númeno proviene de nous que significa razón en griego), o sea algo que puede ser pensado (pensar es lo propio de la razón), pero no puede ser experimentado, no puede existir en la experiencia. Hay que apresurarse a añadir que el noumeno, aunque pensable por nosotros, no es comprensible. Para Kant, pensar no es comprender, ya que solo podemos comprender lo que es posible experimentar en la experiencia..."* (García Norro, Rovira, 1994). Esta situación coincide con el hecho de que aún no se han determinado conjuntos infinitos de entes, ni procesos infinitos en la naturaleza de donde se deduce que la mente humana no tiene un referente o una experiencia previa por medio del cual construir dicho concepto. De esta manera, si asumimos que el concepto de infinito es efectivamente un noúmeno kantiano, queda claro que cualquiera de las metáforas con que queramos explicar el infinito, solamente nos dará una concepción reducida de este. De ahí la importancia de buscar una formulación matemática del término.

3. La formalización del concepto de Infinito

"Uno de los logros más grandes de la matemática como lenguaje ha sido su propio coraje imaginativo para enfrentar el concepto más inaccesible y paradójico que haya podido pretender la fragilidad temporal del intelecto humano: el concepto de infinito" (Ortiz,1994).

Grandes matemáticos han tratado de dar una definición del infinito. a lo largo de la historia. En la Grecia antigua Platón, Pitágoras y Aristóteles entre otros, se planteaban la existencia del infinito y las contradicciones generadas a partir de la aceptación de su existencia.

Aristóteles rechazó la idea del infinito dada las contradicciones que generaba. Sin embargo, lo concibió de dos formas diferentes las cuales son las nociones que tenemos actualmente de este concepto. Él concibió dos tipos de infinito: el infinito potencial y el infinito actual. *"La noción de infinito potencial se centra en la operación reiterativa e ilimitada, es decir, en la recursividad interminable, por muy grande que sea un número natural, siempre podemos concebir uno mayor, y uno mayor que este y* ***así sucesivamente*** *donde esta última expresión "así sucesivamente" encierra la misma idea de reiteración ilimitada, al infinito"* (Ortiz,1994).

Esta noción de infinito es la usada en las acepciones analizadas del DRAE y de hecho es la noción empleada en el desarrollo moderno del concepto de límite infinito y límite al infinito del cálculo infinitesimal.

Por otra parte, el infinito actual se refiere al infinito existente como un todo o unidad y no como un proceso. Kant aceptaba la posición de Aristóteles y rechazaba el infinito actual por ser imposible de ser alcanzado por la experiencia.

En la terminología matemática moderna nos podemos referir al infinito potencial de Aristóteles si usamos una unidad de medida u y hacemos uso de la propiedad arquimediana para indicar que, para cualquier cantidad M positiva, es posible encontrar un número natural k de manera que al superponer k veces la unidad u se tiene $ku \geq M$. De esta forma al tomar valores de M cada vez mayores es posible crear un proceso que tiende al infinito.

Otra manera de ver el infinito potencial es considerar la unidad u representada como un segmento de recta y considerar el proceso de división en el punto medio para obtener una cantidad infinita de segmentos contenida en la unidad una vez que "se continua indefinidamente el proceso de división". Esta idea fue la que produjo la paradoja de Xenón.

Por otro lado, la formalización de noción de infinito actual o infinito como un todo requiere del desarrollo de la teoría de conjuntos cuyo desarrollo *"se puede decir que se inicio con los trabajos de Bolzano"* (Ortiz,1994).

Cantor en el siglo XIX desarrolló la teoría de conjuntos y la teoría de números transfinitos con lo cual indica que *"la existencia de un infinito potencial presupone la existencia de un infinito actual"* (Ortiz,1994).

La teoría de conjuntos desarrollada por Cantor tiene en su fundamentó una axiomática consistente que permite construir los conjuntos y posteriormente establecer el concepto de infinito. Para esto es necesario definir el concepto de *"cardinalidad"* o *"potencia"* de un conjunto.

Dos conjuntos S y T se dicen que tienen el mismo número de elementos o que tienen la misma cardinalidad o son equipotentes, si existe una función f biyectiva definida de S en T.

Se puede definir una relación de equivalencia en términos de la cardinalidad de conjuntos. De esta manera si un conjunto S que sea equipotente con un subconjunto $\{1, 2, 3,..., n\} \subseteq N$ se dice que tiene n elementos o que su cardinalidad es n y escribimos: $Card(S) = |S| = n$

A partir de esta definición se puede establecer la idea de conjunto finito y conjunto infinito. Actualmente la definición aceptada de conjunto infinito es la dada por Bolzano:

Un conjunto no vacío A es finito si para algún entero positivo n, A es equipolente a {1, 2, 3, 4, 5,..., n}, de otra forma A es infinito.
Un conjunto A es infinito si existe un subconjunto propio B de A equipolente a A, en cualquier otro caso A es finito.

La definición de Bolzano plantea una contradicción con la intuición que se tiene de subconjunto propio ya que si un conjunto A tiene un subconjunto propio B, la intuición indica que B es necesariamente más pequeño que A debido a que existen elementos de A que no están en B. Este tipo de contradicción aparente es la que llevó a los griegos a negar la existencia del infinito. Ellos pensaban que el infinito no podía existir pues dicha existencia producía la aniquilación de los números al ser sumados al infinito, esto es :

$$a + \infty = \infty$$

De esto se deriva que la forma en que percibimos el mundo de lo finito y la lógica empleada para explicar los fenómenos finitos puede no ser aplicable a situaciones en las que medie el concepto del infinito. Por ejemplo, la paradoja de Xenón, la trompeta de Gabriel, la convergencia de las series, la densidad de los números racionales, etc.

En el desarrollo de la teoría de números transfinitos, usando el concepto de cardinalidad Cantor estableció que se podía sumar números finitos a cardinalidades infinitos sin que se produjera dicha aniquilación. Sobre este tema hablaremos posteriormente.

Una de las axiomáticas mediante la cual se desarrolla la teoría de conjuntos es la axiomática de Zermelo-Fraenkel. La imposibilidad de demostrar la existencia de conjuntos infinitos hace que en esta axiomática se deba incluir un axioma que establezca su

existencia. Este axioma llamado el Axioma de Infinitud establece: *existe al menos un conjunto infinito*.

El axioma de infinitud postula la existencia del infinito actual pues si existe un conjunto infinito $\mathcal{I}$ entonces existe un infinito actual en términos de su cardinalidad y escribimos:

$$\text{Card}(\mathcal{I}) = |\mathcal{I}| = \infty$$

4. Algunos Conjuntos Infinitos

De la definición establecida en el apartado anterior y la definición de cardinalidad se puede justificar porque el conjunto de los números naturales $\boldsymbol{N}$ es infinito sin recurrir a un argumento de proceso ilimitado que es el que comúnmente se usa para justificar la infinitud de $\boldsymbol{N}$.

Se puede afirmar que $\boldsymbol{N}$ es un conjunto infinito notando el hecho de que existe una función biyectiva entre $\boldsymbol{N}$ y el subconjunto de los números pares P. Basta tomar la función $f : N \to P;\ f(n) = 2n$. Fácilmente vemos que esta función es una biyección de $\boldsymbol{N}$ en P. También se puede probar la infinitud de los naturales estableciendo una biyección entre $\boldsymbol{N}$ y el subconjunto de los números impares I.

El conjunto P es también infinito. Para ver esto basta considerar la biyección que se establece entre él y el conjunto $2P = \{k \in P : k = 2p; p \in P\} = P - \{2\}$ mediante la biyección $h : P \to 2P;\ h(p) = 2p$.

Análogamente se demuestra que el conjunto de números impares I es también infinito asociando cada número impar $i \in I$ con números de la forma $i + 2$, $i \in I$.

Ahora como $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{Q}$ y $\boldsymbol{R}$ contienen a $\boldsymbol{N}$, la cardinalidad de estos tres conjuntos debe ser mayor o igual que la de $\boldsymbol{N}$ y por lo tanto también son infinitos.

Se puede demostrar que el conjunto $\boldsymbol{Z}$ de los números enteros es también un conjunto infinito usando un argumento similar a los anteriores. Para esto basta considerar la función $g : N \to Z$ que asocia a los números positivos junto con el cero los números pares y a los números negativos les asocia los impares. Así, como $\boldsymbol{N}$ tiene cardinalidad infinita y es equipotente con $\boldsymbol{Z}$, se tiene que $\boldsymbol{Z}$ debe tener cardinalidad infinita y por lo tanto es infinito. Más aún, esta demostración no solo dice que $\boldsymbol{Z}$ es infinito sino que además tiene la misma cardinalidad de los naturales. Dicho de otra forma $\boldsymbol{Z}$ y $\boldsymbol{N}$ tienen el mismo número de elementos.

Se puede demostrar que el conjunto $\boldsymbol{Q}$ de número racionales es equipotente con $\boldsymbol{N}$. Esto da el sorprendente resultado de que un conjunto denso como lo es el conjunto de números racionales es del mismo tamaño, en términos de cardinalidad, que el conjunto de números naturales el cual es discreto.

Para demostrar que $\boldsymbol{Q}$ y $\boldsymbol{N}$ son equipotentes generamos un arreglo rectangular de números racionales de la siguiente manera. En la primera fila colocamos todos los racionales que tienen denominador igual a 1, esto es, los números enteros. En la segunda fila colocamos todos los racionales con denominador igual a 2 de la forma $\frac{a}{2}$ con a primo relativo con 2. La tercera fila la construimos de manera análoga tomando los racionales con denominador igual a 3 de la forma $\frac{a}{3}$ con a y 3 primos relativos. La biyección $f : N \to Q$ se obtiene asignando los valores utilizando las diagonales del arreglo como en la secuencia siguiente:

$f(1)=0$, $f(2)=1$, $f(3)=\frac{1}{2}$, $f(4)=\frac{1}{3}$, $f(5)=\frac{-1}{2}$, $f(6)=-1$, $f(7)=2$, $f(8)=\frac{3}{2}$, $f(9)=\frac{-1}{3}$, $f(10)=\frac{1}{4}$, $f(11)=\frac{1}{5}$, $f(12)=\frac{1}{6}$,...

Estos ejemplos sirven para definir la idea de *"numerabilidad"* de un conjunto. Decimos que un conjunto S es *numerable* si tiene la misma cardinalidad que algún subconjunto de $\boldsymbol{N}$. De esta manera se dice que $\boldsymbol{Z}$ y $\boldsymbol{Q}$ son conjuntos numerables.

Un resultado aún más sorprendente es el que dice que si $\{A_i\}_{i \in N}$ es una familia de cardinalidad numerable cuyos elementos son conjuntos numerables entonces su unión $\bigcup_{i \in N} A_i$ es también numerable.

Este resultado brinda una demostración diferente de la numerabilidad de $\boldsymbol{Q}$ si observamos que todas las filas del arreglo anterior son conjuntos numerables. En consecuencia su unión, que es $\boldsymbol{Q}$, también lo es.

Sin embargo no todos los conjuntos infinitos son numerables. El siguiente ejemplo nos demuestra que el conjunto de números reales $\boldsymbol{R}$ es infinito pero de cardinalidad mayor que la de $\boldsymbol{N}$. A este tipo de conjuntos se les denomina *no numerables*.

Sea S el conjunto de expansiones decimales menores que 1 tal que sus elementos son números cuyos dígitos son solamente 0 o 1. Se demostrará que S es no numerable. Supongamos por contradicción que S es numerable. Entonces por definición existe una biyección f de $\boldsymbol{N}$ en S. Como en el caso de los racionales podemos considerar una tabla de valores donde se pueden contar los elementos de S.

n	$f(n)$
1	0.011010...
2	0.111011...
3	0.101001...
4	0.000111...
⋮	⋮

Ahora consideramos un elemento $x = 0, x_1 x_2 x_3 x_4 \ldots$ de S de la siguiente manera: si el primer digito de f (1) es 0 entonces x_1 = 1 y si el primer dígito de f (1) es 1 entonces x_1 = 0. Análogamente, si el segundo dígito de f (2) es 0 entonces x_2 = 1 y si el segundo dígito de f (2) es un 1 entonces x_2 = 0. En general, si el n-ésimo dígito de f (n) es 1, sea x_n = 0, y si el n-ésimo dígito de f (n) es 0, sea x_n = 1. De esta forma, $x = 0, x_1 x_2 x_3 x_4 \ldots$ no puede ser f (n) para algún $n \in \boldsymbol{N}$ ya que $x = 0, x_1 x_2 x_3 x_4 \ldots$ difiere de cada f (n) en al menos el n-ésimo digito en virtud de la forma en que se construyó. Así, f no es una biyección y por lo tanto S es no numerable.

Luego como S es un subconjunto propio de $\boldsymbol{R}$, se tiene que $\boldsymbol{R}$ es también no numerable pues su cardinalidad debe ser mayor o igual a la de S. La cardinalidad de $\boldsymbol{R}$ es conocida como el *continuo* y se denota por **c**. El *Continuo* **c** coincide con la cardinalidad del conjunto de partes o conjunto potencia $\mathcal{P}$ (N) de $\boldsymbol{N}$, es decir:

$$\mathbf{c} = \text{Card } (\mathcal{P}\ (N)) = 2^{\text{Card (N)}}$$

Es un cardinal tan grande en relación con la cardinalidad de un conjunto numerable que si se le extrae una familia $\mathcal{A}$ numerable de conjuntos numerables, la cardinalidad del conjunto resultante R - $\mathcal{A}$ debe ser no numerable pues de lo contrario la familia $\mathcal{A} \bigcup$ (R - $\mathcal{A}$) sería también numerable en virtud del resultado anteriormente mencionado que indica que la unión numerable de conjuntos numerables es numerable. Este resultado nos dice que existen cardinalidades infinitas distintas. Intuitivamente, se establece que existen "*infinitos de distinto tamaño*".

5. Los Números Transfinitos

En la sección anterior se estableció la existencia de cardinalidades infinitas diferentes. Estás cardinalidades son llamadas *Números Transfinitos*.

Cantor desarrolló la teoría de números transfinitos con la cual logró salvar la contradicción de la aniquilación de los números finitos por el infinito mencionada anteriormente. Primero construye los números a los que llamó *Números Ordinales* (aquellos que sirven para notar una posición en un conjunto ordenado) mediante las siguientes reglas:

0 es un ordinal.
Si a es un número ordinal entonces a + 1 (su suceso) es un ordinal.
Si se tiene una sucesión de ordinales {a} entonces existe un último ordinal lim{a} el cual es mayor que todo a∈{a}

De esta reglas vemos que los números naturales son todos números ordinales. Más aún, el infinito potencial indicado por Aristóteles producto del proceso de contar es también un ordinal en virtud de la regla 3. Para obtener el primer ordinal infinito tenemos que reunir un número no finito de ordinales finitos. Haciéndolo, siempre caemos en el mismo conjunto, construido al reunir todos los ordinales finitos, es decir los naturales. El conjunto de todos los naturales, $\boldsymbol{N}$, es pues el primer ordinal infinito, lo que no debería sorprender, y se le

denota por ω (la letra griega omega). La aniquilación de los números finitos se salva mediante la regla 2 pues como ω es ordinal entonces los números ω, $\omega + 1$, $\omega + 2$, $\omega + 3$,..., $\omega + \omega = 2\omega$, $2\omega + 1$,... w^2,...,w^w ,... son también números ordinales.

En el desarrollo de esta teoría Cantor identificaba los números ordinales con conjuntos por ejemplo: 1 = {1}, 2 = {1, 2}, 3 = {1, 2, 3}, etc. De esta forma los ordinales transfinitos obtenidos del proceso de conteo se podían considerar diferentes.

Para visualisar los ordinales, resulta muy práctico representar cada uno por un punto de una sucesión creciente convergente, como por ejemplo $u_n = 1 - 1/(n+1)$. Para representar el ordinal ω, resulta natural añadir a la sucesión previa un punto 'O' situado exactamente en el límite de la sucesión:

X_____X_____X_____X_____X_____X_____X____X___X__X_
_XXX...O.....u_w

A la izquierda de u_w hay una infinidad de puntos, por lo tanto ω es infinito. Pero si elegimos a cualquier otro punto de la sucesión a su izquierda, ya no es el caso, lo cual prueba que ω es el primer ordinal infinito. Después de ω llega $\omega + 1$, $\omega + 2$, ... que se representan añadiendo a la derecha uno, dos o más puntos, inicialmente distantes, y luego más cercanos entre si:

X_____X_____X_____X_____X_____X_____X____X___X__X_
_XXX...O_____X_____X

El último punto dibujado corresponde a $\omega + 2$.

Más generalmente, para sumar dos ordinales *A* y *B* se cambian los nombres de los elementos para que sean todos distintos, luego se juntan los conjuntos *A* y *B*, poniendo *B* a la derecha de *A*, es decir, imponiendo que cada elemento de *B* sea mayor que todos los de *A*. Así hemos construido $\omega + 1$, ... y así podemos construir $1+\omega$: Notemos Y el elemento de 1, y X los de ω:

Y_____X_____X_____X_____X_____X_____X_____X____X___
X__X_X_XXX ...

Salta a la vista que ω y $1+\omega$ son muy parecidos. De hecho corresponden al mismo ordinal. Mas no es el caso de $\omega + 1$, que es distinto de ω porque el conjunto $\omega + 1$ tiene un elemento máximo (el O del dibujo) mientras que el conjunto ω no lo tiene. El punto ω (el O del dibujo) no tiene antecesor, es decir que no existe un *n* tal que $n+1=\omega$: se dice que es un ordinal límite. Cero tiene también esta propiedad pero no merece esta apelación. Como $\omega+1$? $1+\omega$, la adición no es conmutativa en los ordinales. Se construye del mismo modo $\omega + \omega$ que se nota lógicamente 2ω. La multiplicación se define a partir de la adición como para los naturales. Una vez que se ha representado $n\omega$, con *n* natural, no resulta

demasiado difícil imaginar lo que será $\omega.\omega$, escrito ω^2. Luego se puede definir ω^n, con n natural, y, tomando el límite, ω^w, que ya cuesta mucho esfuerzo imaginar (tiene tantos elementos como la línea real).

Ahora bien, todos los ordinales transfinitos generados a partir de ω por medio de un proceso de conteo ($\omega, \omega + 1, \omega + 2, \omega + 3,...$) tienen la misma cardinalidad. Esta cardinalidad es conocida como *Alef-cero* y se denota: c_0 = Card (ω)

Cantor define entonces los *Números Cardinales* (aquellos que sirven para indicar el número de elementos que contiene, por lo tanto, distintos de los ordinales, que caracterizan el lugar de un elemento en una sucesión) como aquellos números ordinales que no tienen la misma cardinalidad que cualquier ordinal menor. Por ejemplo, todos los números ordinales finitos (vistos como conjuntos) son a su vez números cardinales. Sin embargo el ordinal transfinito $\omega + 1$ no es un número cardinal pues $\omega < \omega + 1$ y ambos tienen la misma cardinalidad.

La existencia de cardinalidades mayores quedó demostrada en la sección anterior cuando se demostró que ***R*** tiene una cardinalidad mayor que ***N***.

Cantor llamó a los cardinales infinitos alefs, alef-cero (c_0), es el primer cardinal infinito correspondiente al ordinal ω. c_1 es el primer ordinal con cardinalidad mayor que ω es decir, el primer ordinal que no puede ponerse en correspondencia biunívoca con ω. Siguiendo este proceso se obtienen los números cardinales siguientes: c_2, c_3 ,..., c_w , etc.

Por otro lado, el *Teorema de Cantor* establece que si s es un cardinal entonces se cumple que: $s < 2^s$

luego como el *Continuo* **c** = $2^{\text{Card (N)}} = 2^{c_0}$ se tiene que: $c_0 < 2^{c_0}$ = **c**.

Además, si s es un cardinal y $S(s)$ denota a el sucesor de s , entonces $c_{S(s)}$ es el primer cardinal infinito más grande que c_w. Luego, en virtud del *Teorema de Cantor* se tiene el siguiente resultado: $c_{S(s)} \leq 2^{c_w}$.

Como un caso particular de este resultado se tiene que: $c_1 \leq 2^{c_0}$ = **c**

La pregunta que surge de manera natural es, ¿a cuál cardinal corresponde el *Continuo*?

Cantor supuso que el *Continuo* coincidía con c_1, es decir: **c** = Card ($\mathcal{P}$ (*N*)) = $2^{c_0} = c_1$

Esta afirmación es llamada *Hipótesis del Continuo*. Su generalización, llamada *Hipótesis Generalizada del Continuo* establece que: $c_{S(s)} = 2^{c_s}$

Se dice que tal afirmación es *"indecidible"* en la teoría de conjuntos con la axiomática de Zermelo-Fraenkel ya que en 1940 Gödel demostró que la hipótesis del continuo es consistente con esta axiomática y en 1963 Paul Cohen demostró que su negación también es consistente. Más aún, Cohen demostró que el *Continuo* puede ser cualquier cardinal mayor o igual que c_2.

6. Cardinales Grandes

La teoría de números transfinitos se ha desarrollado aún más allá de los números cardinales. Después de la construcción de los números cardinales se establece la construcción de los *cardinales inaccesibles*.

Se dice que Θ *es un cardinal inaccesible si no puede ser alcanzado por medio de la suma de* Θ *ordinales menores que* Θ.

La teoría de números transfinitos no puede establecer la existencia de estos números inaccesibles dentro de la axiomática de Zermelo-Fraenkel y debe recurrir a una generalización de esta introduciendo un *"axioma de infinitud generalizado"* llamado el *axioma de inaccesibilidad* que indica que *"existe al menos un cardinal inaccesible"* .

"Existe toda una teoría de cardinales grandes, entre los cuales encontramos: cardinales indescriptibles, inefables, Ramsey, Mahlo, fuertemente compactos, supercompactos y, finalmente los cardinales extensibles. Estos últimos son los cardinales más grandes que se consideran actualmente en la Teoría de Conjuntos" (Ortiz,1994).

7. Reflexiones Didácticas sobre el concepto de Infinito

El aprendizaje significativo de los conceptos matemáticos plantea el problema de que el estudiante no tiene en general una experiencia previa que le permita construir el concepto a partir de esta. Tal es el caso del concepto de infinito.

Generalmente, la forma de enseñarlo consiste en utilizar metáforas didácticas basadas en conjuntos *"muy grandes"* para fijar la idea de infinitud. Esto, permite crear la noción de infinito usada en el lenguaje cotidiano y aceptada por la Real Academia Española, sin embargo podría generar una mala formación del concepto matemático. La ambigüedad del lenguaje coloquial hace que el concepto del infinito sea un concepto vago e intuitivo que se parece muy poco a la idea matemática de infinito como unidad total.

Por otro lado, el concepto de infinito como unidad (infinito actual) se ha utilizado a trabes de la historia para explicar interrogantes de tipo teológico. El concepto de Dios como ente infinito, absoluto e inalcanzable es una muestra de esta concepción. De hecho Cantor postulaba la existencia de un Infinito Absoluto Ω inalcanzable por cualquier tipo de extensión realizada sobre los ordinales transfinitos. Este no podría ser un ordinal pues, si así

fuera, inmediatamente se tendría el ordinal $\Omega + 1$ mayor que Ω. A este infinito el mismo Cantor lo identificó con Dios.

La concepción de infinito como unidad (infinito actual) no se ha trabajado mucho en la enseñanza de la matemática. La construcción de la idea del infinito como proceso inalcanzable (el infinito potencial de Aristóteles) no es suficiente para explicar porque $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{Z}$ y $\boldsymbol{Q}$ son equipotentes y en cambio $\boldsymbol{R}$ tiene una cardinalidad mayor. Este hecho justifica la necesidad de aclarar en algún momento la idea del infinito como unidad (infinito actual).

La mayoría de los libros de cálculo asumen el hecho de que los estudiantes tienen ya una noción del concepto del infinito y por lo general lo comienzan a utilizar al definir límites al infinito y límites infinitos pero sin hacer una introducción adecuada del concepto. Es conveniente, antes de iniciar este estudio hacer una reflexión del infinito antes de comenzar a utilizarlo tanto en los aspectos históricos como en lo referente a las paradojas y contradicciones involucradas.

Además, es necesario dejar en claro que la manera de pensar en procesos que involucran al infinito es diferente a la manera en que se conciben los fenómenos finitos. Esto permite justificar por ejemplo (a un nivel intuitivo) porque una suma infinita de números positivos en algunos casos es infinito y en otros es un número finito. La forma (intuición o lógica) en que percibimos los procesos finitos no se puede aplicar en general cuando se encuentra involucrado un proceso infinito.

Los profesionales en matemática y en general las personas que sienten cierta empatía por la matemática normalmente se caracterizan por querer conocer sobre los procesos y justificaciones que fundamentan la matemática. Sin duda alguna, el estudio la teoría de números transfinitos, aunque sea al nivel expuesto, requiere de toda nuestra atención y no deja duda acerca del esfuerzo mental que han realizado los grandes matemáticos por buscar una justificación a un concepto que ha desvelado a la humanidad a trabes de la historia.

Por último, dado que la teoría sobre el infinito tiene un fundamento axiomático, el cuestionamiento sobre la existencia o no de este es un planteamiento que queda abierto. La aceptación o negación de su existencia históricamente ha obedecido a concepciones ideológicas de corte teológico y cosmológico. Es a partir de los trabajos de Cantor que se logra dar un rigor matemático al concepto de infinito y aún así se nota dicha influencia.