LA FAMILIA DE LOS NÚMEROS METÁLICOS

Mat. Ménthor Urvina M
Departamento de Matemáticas
Escuela Politécnica Nacional

El presente documento pretende divulgar los resultados interesantes de la matemática, como son los números metálicos; y su autoria es de la DRA. VERA W. DE SPINADEL; PROFESORA TITULAR EMERITA; UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES; ARGENTINA

Resumen
En este artículo se presenta a la llamada familia de *números* metálicos, los que son números irracionales y aparecen como la solución de ecuaciones cuadráticas. El más importante es el *número de oro* φ. Entre sus parientes, se encuentran el *número de plata,* el *número de bronce,* el *número de cobre,* el *número de níquel*, etc.
Los miembros de esta familia gozan de propiedades matemáticas comunes, como por ejemplo, las sucesiones numéricas basadas en los miembros de esta familia, satisfacen propiedades aditivas y simultáneamente son sucesiones geométricas, por lo que han sido utilizadas con frecuencia como base de muchos sistemas de proporciones.

1. DESARROLLO EN FRACCIONES CONTINUAS DE LOS NÚMEROS METÁLICOS

La familia de *números metálicos* (FNM) aparecen como las soluciones positivas de ecuaciones cuadráticas del tipo:

(1.1) $$x^2 - px - q = 0 ,$$

donde tanto p como q son números naturales.

Las ecuaciones cuadráticas más simples son:

(1.2) $$\begin{gathered} x^2 - nx - 1 = 0 \\ x^2 - x - n = 0 \end{gathered}$$

donde n es un número natural.

Para el caso $n = 1$, ambas ecuaciones cuadráticas coinciden con la ecuación $x^2 - x - 1 = 0$, cuya solución positiva es el *número de oro* φ.

Para hallar su desarrollo en fracciones continuas, se reescribe la ecuación en la forma $x^2 = x + 1$ y dividiendo por x se tiene:

$$x = 1 + \frac{1}{x} .$$

Reemplazando iterativamente este valor de x, se encuentra la expresión del *número de oro* φ como un desarrollo en fracciones continuas.

$$\varphi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cdots}}} = \lfloor 1,1,1,\ldots \rfloor$$

Se obtienen sus parientes, o sea los restantes miembros de la FNM analizando sus desarrollos en fracciones continuas. Si se considera la ecuación cuadrática

$$x^2 - 2x - 1 = 0$$

se prueba fácilmente que su solución positiva es el *número de plata*

(1.3) $$\sigma_{Ag} = 1 + \sqrt{2}$$

y por sustitución, se obtiene el siguiente desarrollo en fracciones continuas periódico puro

$$\sigma_{Ag} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\cdots}}} = \lfloor \overline{2} \rfloor$$

Procediendo de manera análoga con la ecuación cuadrática $x^2 - 3x - 1 = 0$ se obtiene el *número de bronce*

(1.4) $$\sigma_{Br} = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} = \lfloor \overline{3} \rfloor$$

En resumen, resolviendo ecuaciones cuadráticas del tipo

$$x^2 - nx - 1 = 0$$

con n entero positivo, se tiene como soluciones positivas aquellos miembros de la FNM cuyos desarrollos en fracciones continuas son periódicos puros, de la forma

(1.5) $$x = \lfloor \overline{n} \rfloor$$

Si, en cambio, se buscan soluciones positivas de ecuaciones cuadráticas del tipo

$$x^2 - x - n = 0$$

con n entero positivo, se obtienen números naturales o bien con aquellos miembros de la FNM cuyos desarrollos en fracciones continuas son periódicos, de la forma

(1.6) $$\lfloor m, \overline{n_1, n_2, \ldots, n_n} \rfloor$$

Por ejemplo, si se considera la ecuación cuadrática $x^2 - x - 2 = 0$, entonces su solución positiva es $x = 2$, que posee la siguiente expresión en fracciones continuas: $x = \lfloor 2, \overline{0} \rfloor$. Dicho número entero se conoce como el *número de cobre*

(1.7) $$\sigma_{Cu} = 2$$

Partiendo de la ecuación cuadrática $x^2 - x - 3 = 0$, cuya solución positiva es el valor $x = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$, se puede relacionar este valor con el número de bronce y escribir:

$$x = \frac{3+\sqrt{13}}{2} - 1 = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$$

de donde, se obtiene el *número de níquel*

(1.8) $$\sigma_{Ni} = \frac{1+\sqrt{13}}{2} = \lfloor 2, 3, 3, \ldots \rfloor = \lfloor 2, \overline{3} \rfloor$$

que es una fracción continua periódica.

Resultados similares se obtienen con diferentes valores de n y entonces se puede mostrar la:

Propiedad no. 1 de los miembros de la familia de números metálicos

Son todos números irracionales cuadráticos positivos.

Observación: En los restantes casos de ecuaciones cuadráticas con coeficientes enteros, se encuentran los siguientes resultados, al buscar soluciones positivas

a) $x^2 + nx - 1 = 0$. Las mismas soluciones que para la primer ecuación (1.2), pero solamente su parte decimal.
b) $x^2 + nx + 1 = 0$. No existen soluciones positivas.
c) $x^2 - nx + 1 = 0$. Las soluciones positivas poseen desarrollos en fracciones continuas periódicos.
d) $x^2 + x - n = 0$. Las soluciones positivas poseen desarrollos en fracciones continuas periódicos.
e) $x^2 + x + n = 0$. No existen soluciones positivas.
f) $x^2 - x + n = 0$. No existen soluciones positivas.

2. SUCESIONES DE FIBONACCI

Una sucesión de Fibonacci es una sucesión de números naturales formada tomando cada número igual a la suma de los dos que le preceden. Por este motivo, este tipo de sucesiones se llaman "*sucesiones de Fibonacci secundarias*", para distinguirlas de las sucesiones de Fibonacci ternarias, en las cuales cada término es una combinación lineal de los últimos tres.

Comenzando con $F(0)=1,\ F(1)=1$, se obtiene la clásica sucesión de Fibonacci:

(2.1) $$1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,\ldots$$

donde

(2.2) $$F(n+2)=F(n+1)+F(n)$$

Como es fácil demostrar, se cumple que

(2.3) $$\lim_{n\to\infty}\frac{F(n+2)}{F(n+1)}=\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

La sucesión de Fibonacci para la cual vale la condición (2.2) puede ser generalizada, originando las *“sucesiones de Fibonacci secundarias generalizadas”* (SFSG),

$$a, b, pb+qa, p\left(pb+qa\right)+qb, \ldots$$

que satisfacen relaciones del tipo

(2.4) $$G(n+1)=pG(n)+qG(n-1)$$

con p y q números naturales.

A partir de la ecuación (2.4), se obtiene

$$\frac{G(n+1)}{G(n)}=p+q\frac{G(n-1)}{G(n)}=p+\frac{q}{\dfrac{G(n)}{G(n-1)}}$$

Tomando límites en ambos miembros de esta ecuación y suponiendo que el $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{G(n+1)}{G(n)}$ existe y es igual a un número real x, se tiene que $x=p+\frac{q}{x}$ o bien $x^2-px-q=0$, cuya solución positiva es

$$x=\frac{p+\sqrt{p^2+4q}}{2}$$

Esto significa que

(2.5) $$\lim_{n\to\infty}\frac{G(n+1)}{G(n)}=\frac{p+\sqrt{p^2+4q}}{2}$$

Probemos ahora la existencia de dicho límite.

Teorema: Dada una sucesión de Fibonacci secundaria generalizada (SFSG),

$a, b, pb + qa, p(pb + qa) + qb, \ldots$

tal que: $G(n+1) = pG(n) + qG(n-1)$

con $p > 0,\ p^2 + 4q > 0$, existe el $\lim_{n\to\infty} \frac{G(n+1)}{G(n)}$ y es un número real positivo σ.

<u>Demostración</u>: Para hallar el término *n*-ésimo de la SFSG, pongamos

$$G(n+1) = pG(n) + qH(n)$$
$$H(n+1) = G(n)$$
$$\overline{G(n)} = \begin{pmatrix} G(n) \\ H(n) \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces, es fácil probar que

$$\overline{G(n+1)} = A.\overline{G(n)}.$$

Suponiendo, por simplicidad, que $G(0) = G(1) = 1$.

Si $\overline{G(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ entonces $\overline{G(n+1)} = A^n.\overline{G(1)}$ y el problema se reduce a hallar la potencia *n*-ésima de la matriz A.

Se sabe que los valores propios de *A* son $\sigma = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$, $\sigma' = \frac{p - \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$

Para diagonalizar A de manera de transformarla en $A_d = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma' \end{pmatrix}$ se usa la matriz de cambio de base

$$P = \begin{bmatrix} \sigma & \sigma' \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

La *n*-ésima potencia de A se calcula aplicando la transformación de semejanza

$$A^n = P.A_d{}^n.P^{-1} = \frac{1}{\sigma - \sigma'} \begin{pmatrix} \sigma^{n+1} - \sigma'^{n+1} & \sigma\sigma'\left(\sigma'^n - \sigma^n\right) \\ \sigma^n - \sigma'^n & \sigma\sigma'\left(\sigma'^{(n-1)} - \sigma^{(n-1)}\right) \end{pmatrix}$$

Y el *n*-ésimo término de la SFSG $1, 1, p + q, p(p+q) + q, \ldots$ está dado por la siguiente expresión

$$G(n+1)=\frac{\sigma^{(n+2)}-\sigma'^{(n+2)}}{\sigma-\sigma'}$$

Reemplazando $\sigma-\sigma'=\sqrt{p^2+4q},\quad \sigma'=-\frac{q}{\sigma}$, se tiene

$$\lim_{n\to\infty}\frac{G(n+1)}{G(n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sigma^{(n+1)}+\left(-\frac{q}{\sigma}\right)^{(n+1)}}{\sigma^n+\left(-\frac{q}{\sigma}\right)^n}=\sigma$$

con lo cual se completa la demostración.

<u>Observación 1.</u> Si en lugar de elegir $G(0)=G(1)=1$ se comienza la SFSG con dos valores arbitrarios a y b , es fácil probar que el resultado es el mismo. En efecto, dada la SFSG
$a, b, pb+qa, p\left(pb+qa\right)+qb, \ldots$

se tiene que evaluar el cociente

$$\frac{G(n+1)}{G(n)}=\frac{pnG(n)+qaG(n-1)}{pbG(n-1)+qaG(n-2)}=\frac{pb\frac{G(n)}{G(n-1)}+qa}{pb+\frac{qa}{\frac{G(n-1)}{G(n-2)}}}\underset{n\to\infty}{\to}\sigma$$

y el resultado subsiste para cualquier SFSG, independientemente de los valores elegidos para los primeros dos términos de la misma.

<u>Observación 2.</u> El resultado sigue siendo válido en el caso en que p, q, a, b sean números reales, pero en este contexto es de interés únicamente el caso particular en que son números naturales.

Poniendo $G(0)=G(1)=1$ y considerando diferentes valores para los parámetros de (2.5), se obtiene los distintos números metálicos:

Si $p=q=1$, se obtiene el *número de oro*

$$x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\varphi=\left\lfloor\bar{1}\right\rfloor$$

Si $p=2$ y $q=1$, la sucesión tiene la forma

(2.6) $\qquad 1,1,3,7,17,41,99,140,\ldots$

donde

(2.7) $$G(n+1) = 2G(n) + G(n-1)$$

y de (2.7) se obtiene el *número de plata*

$$\sigma_{Ag} = \lim_{n\to\infty} \frac{G(n+1)}{G(n)} = 1 + \sqrt{2} = \lfloor \bar{2} \rfloor$$

Análogamente, si $p = 3$ y $q = 1$, la sucesión resultante es:

(2.8) $$1, 1, 4, 13, 43, 142, 469, \ldots$$

donde

(2.9) $$G(n+1) = 3G(n) + G(n-1)$$

y se tiene el *número de bronce*

$$\sigma_{Br} = \lim_{n\to\infty} \frac{G(n+1)}{G(n)} = \frac{3+\sqrt{13}}{2} = \lfloor \bar{3} \rfloor$$

otra fracción continua periódica pura.

Para $p = 4$ y $q = 1$, el *número metálico* $\sigma_p{}^q$ es

$$\sigma_4{}^1 = 2 + \sqrt{5} = \lfloor \bar{4} \rfloor = \varphi^3$$

un interesante resultado ligado al desarrollo en fracciones continuas de las potencias impares del *número de oro*.

Se puede probar sin dificultad que los siguientes *números metálicos* tienen la forma:

$$\sigma_5{}^1 = \frac{5+\sqrt{29}}{2} = \lfloor \bar{5} \rfloor; \quad \sigma_6{}^1 = 3 + \sqrt{10} = \lfloor \bar{6} \rfloor; \quad \sigma_7{}^1 = \frac{7+\sqrt{53}}{2} = \lfloor \bar{7} \rfloor$$

$$\sigma_8{}^1 = 4 + \sqrt{17} = \lfloor \bar{8} \rfloor; \quad \sigma_9{}^1 = \frac{9+\sqrt{85}}{2} = \lfloor \bar{9} \rfloor; \quad \sigma_{10}{}^1 = 5 + \sqrt{26} = \lfloor \overline{10} \rfloor$$

y así sucesivamente se tiene:

$$\sigma_p{}^1 = \lfloor \bar{p} \rfloor = \frac{p+\sqrt{p^2+4}}{2}$$

Todos los miembros de la FNM que satisfacen la primera ecuación (1.2) son de la forma $\lfloor \bar{n} \rfloor$, un desarrollo en fracciones continuas periódico puro.

Si $p=1$ y $q=2$, la sucesión es

(2.10) $\quad 1,1,3,5,11,21,43,85,\ldots$

donde: $\quad G(n+1)=G(n)+2G(n-1)$

y se obtiene el *número de cobre*

$$\sigma_{Cu}=2=\lfloor 2,\overline{0}\rfloor$$

Si $p=1$ y $q=3$, la sucesión es

(2.11) $\quad 1,1,4,7,19,40,97,\ldots$

donde: $\quad G(n+1)=G(n)+3G(n-1)$

y se obtiene el *número de níquel*

$$\sigma_{Ni}=\lim_{n\to\infty}\frac{G(n+1)}{G(n)}=\frac{1+\sqrt{13}}{2}=\lfloor 2,\overline{3}\rfloor$$

otra fracción continua periódica. De manera similar, se obtiene

$$\sigma_1^{\,4}=\lfloor 2,\overline{1,1,3}\rfloor;\quad \sigma_1^{\,5}=\lfloor 2,\overline{1,3}\rfloor;\quad \sigma_1^{\,6}=3=\lfloor 3,\overline{0}\rfloor;\quad \sigma_1^{\,7}=\lfloor 3,\overline{5}\rfloor;\quad \sigma_1^{\,8}=\lfloor 3,\overline{2,1,2,5}\rfloor;$$
$$\sigma_1^{\,9}=\lfloor 3,\overline{1,1,5}\rfloor;\quad \sigma_1^{\,10}=\lfloor 3,\overline{1,2,2,1,5}\rfloor;\quad \sigma_1^{\,11}=\lfloor 3,\overline{1,5}\rfloor;\quad \sigma_1^{\,12}=4=\lfloor 4,\overline{0}\rfloor$$

Se puede observar que todos los miembros de la FNM que satisfacen la segunda ecuación cuadrática (1.2), son de la forma $\lfloor m,\overline{n_1,n_2,\ldots}\rfloor$, esto es, una fracción continua periódica. Además, es fácil verificar que en este conjunto, los *números metálicos* aparecen de manera muy regular. En particular, se puede probar que

si $n^2-n\le q\le n^2+n$, entonces $\sigma_1^{\,q}=\lfloor n,\overline{n_1,n_2,\ldots}\rfloor$
si $q=n^2-n$, entonces $\sigma_1^{\,q}=\lfloor n,\overline{0}\rfloor$
si $q=n^2-n+1$, entonces $\sigma_1^{\,q}=\lfloor n,\overline{2n-1}\rfloor$
si $q=n^2+n$, entonces $\sigma_1^{\,q}=\lfloor n,\overline{1,2n-1}\rfloor$

También cabe observar que las expansiones en fracción continua de los *números metálicos* no enteros son “palindrómicas”, vale decir, los períodos son simétricos respecto a sus centros, excepto el último número del período, que es igual a $2n-1$.

En el caso general de la ecuación cuadrática (1.1), se puede verificar que sus soluciones positivas poseen desarrollos en fracciones continuas periódicos. En conclusión, se puede afirmar

Propiedad no. 2 de la familia de números metálicos

Todos ellos se obtienen como límites de cocientes de términos consecutivos de SFSG.

3. PROPIEDADES ADITIVAS DE LOS NÚMEROS METÁLICOS

Si se forma la sucesión de cocientes de términos consecutivos de la sucesión (2.1), se obtiene:

$$\frac{1}{1},\frac{2}{1},\frac{3}{2},\frac{5}{3},\frac{8}{5},\frac{13}{8},\frac{21}{13},\frac{34}{21},\frac{55}{34},\frac{89}{55},...$$

que converge al *número de oro* φ, como se prueba muy fácilmente.

Construyamos ahora una progresión geométrica de razón φ

$$...,\frac{1}{\varphi^2},\frac{1}{\varphi},1,\varphi,\varphi^2,\varphi^3,...$$

Esta progresión geométrica es también una sucesión de Fibonacci que satisface la condición (2.2). En efecto

$$\frac{1}{\varphi^2}+\frac{1}{\varphi}=\frac{1+\varphi}{\varphi^2}=1$$

Lo mismo sucede para el *número de plata* σ_{Ag}, partiendo de la sucesión

$$\frac{1}{1},\frac{3}{1},\frac{7}{3},\frac{17}{7},\frac{41}{17},\frac{99}{41},\frac{140}{99},...$$

que converge a σ_{Ag}. La sucesión

$$...,\frac{1}{\sigma_{Ag}{}^2},\frac{1}{\sigma_{Ag}},1,\sigma_{Ag},\sigma_{Ag}{}^2,\sigma_{Ag}{}^3,...$$

es una progresión geométrica de razón σ_{Ag}, que satisface la condición (2.7), como se comprueba fácilmente:

$$\frac{1}{\sigma_{Ag}{}^2}+2=\sigma_{Ag};\quad 1+2\sigma_{Ag}=\sigma_{Ag}{}^2;\quad \sigma_{Ag}+2\sigma_{Ag}{}^2=\sigma_{Ag}{}^3;\quad ...$$

De manera similar, es simple probar que la sucesión

$$\frac{1}{1}, \frac{4}{1}, \frac{13}{4}, \frac{43}{13}, \frac{142}{43}, \frac{469}{142}, \ldots$$

converge al *número de bronce* $\sigma_{Br} = \dfrac{3+\sqrt{13}}{2} = \lfloor \overline{3} \rfloor$ y la sucesión

$$\ldots, \frac{1}{\sigma_{Br}{}^2}, \frac{1}{\sigma_{Br}}, 1, \sigma_{Br}, \sigma_{Br}{}^2, \sigma_{Br}{}^3, \ldots$$

es también una sucesión geométrica que satisface la relación (2.9). En efecto

$$\frac{1}{\sigma_{Br}} + 3 = \sigma_{Br}; \quad 1 + 3\sigma_{Br} = \sigma_{Br}{}^2; \quad \sigma_{Br} + 3\sigma_{Br}{}^2 = \sigma_{Br}{}^3; \ldots$$

Lo mismo sucede para todas las SFSG que satisfacen relaciones del tipo (2.4). Por ello se puede afirmar:

Propiedad no. 3 de los miembros de la familia de números metálicos

Son los únicos números irracionales cuadráticos positivos que generan una SFSG (con propiedades aditivas) que, simultáneamente, es una progresión geométrica.

Esta última propiedad de los miembros de la familia de gozar tanto de propiedades aditivas como geométricas, les confiere a los *números metálicos* características sumamente interesantes para convertirse en bases de diferentes sistemas de proporciones en Diseño. En efecto, el *número de oro* $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ dominó el arte griego y el romano, persistió en los monumentos de la Edad Media Gótica y posteriormente, en el Renacimiento, llegando a nuestro siglo con El Modulor de Le Corbussier.

Siguiendo la aparición de esta proporción $\varphi : 1$, se encuentra otra proporción, basada en el *número de plata* $\sigma_{Ag} = 1+\sqrt{2}$. Esta proporción $\sigma_{Ag} : 1$ estuvo presente en el diseño a todas las escalas, desde las dimensiones globales de los patios hasta los edificios individuales de las casas romanas y las habitaciones dentro de cada edificio y los tapices colgados en las paredes . También se la encontró en las proporciones musicales.

Inmediatamente surge la pregunta: ¿Por qué φ y σ_{Ag} son tan importantes al considerar diferentes sistemas de proporciones?

Respuesta: Es bien sabido que las progresiones geométricas no poseen propiedades aditivas, esto es, la suma de dos elementos en una progresión geométrica *no* es igual a otro elemento de la progresión. De este modo, falla una regla esencial de las proporciones y el sistema queda limitado en su aplicación a proporcionar tan solo parte del sistema total.

Pero, en el caso de las sucesiones de Fibonacci secundarias generalizadas, construidas de la manera indicada en el §2, se tiene un conjunto infinito de progresiones geométricas que gozan de propiedades aditivas.

Bibliografía:

Spinadel Vera W. de (1997). .Una nueva familia de números., *Anales de la Sociedad Científica Argentina*, vol. 227, N° 1.