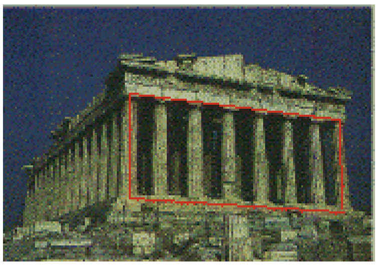
EL NÚMERO DE ORO

La geometría, según cuentan los historiadores, nace a orillas del río Nilo. El faraón obligaba a pagar los tributos proporcionalmente a la extensión de las tierras de cada propietario. Asimismo, las crecidas y estiajes del Nilo obligaban a situar las marcas y los lindes de los campos de cultivo después de cada inundación . La medida de áreas, distancias y ángulos favoreció el desarrollo de una serie de técnicas para ejecutar estos procesos con precisión y lo que es más importante supuso el inicio de un proceso de abstracción que convertía un accidente geográfico en una línea, una superficie de cultivo en un gráfico y las distancias lineales y angulares podían ser tratadas matemáticamente. En otras palabras, el inicio de la geometría a un nivel esencialmente práctico.

Fueron los inquietos y curiosos habitantes de Grecia quienes sistematizaron y formalizaron esas estructuras, descubriendo propiedades curiosas, elaboraron teoremas y formularon demostraciones que tenían validez universal. La estructura básica de la geometría del plano ha llegado intacta a nuestros días y sigue estudiándose o mejor dicho debiera seguir estudiándose tal como lo hicieron los griegos hace siglos.



De entre todas las facetas abarcadas por esa ciencia, voy a dedicar la charla de hoy a un elemento muy simple, incluso insultantemente simple, pero que en su sencillez encierra innumerables consecuencias, aplicaciones e inesperadas propiedades. Voy a hablar del llamado número FI (φ). Este número recibe su nombre del escultor Fidias (siglo V adC, autor del friso y del frontis del Partenón), quien utilizó ampliamente sus propiedades en su destacada obra artística.

Todo empieza con una línea recta. Imaginemos un segmento de una longitud dada l y ahora queremos dividirlo en dos partes, pero de la forma más bella posible, de la forma más armónica. Por ejemplo, sean a y b esos dos segmentos, tal que a + b = l.

El mayor grado de armonía se alcanza cuando la relación entre la longitud total y el segmento mayor es igual a la relación entre el segmento mayor y el menor.

Vitrubio indicó que para que un todo dividido en partes desiguales pareciera hermoso, entre la parte mayor y la menor debe existir la misma relación que existe entre la mayor y el todo.

Matemáticamente, esto se expresa como.

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

Y desarrollando esta igualdad.

$$a^2 = a \cdot b + b^2$$

$$a^2 - ab - b^2 = 0$$

Resolviendo esta ecuación de segundo grado.

$$a = \frac{b \pm \sqrt{b^2 + 4b^2}}{2} = \frac{b \pm b\sqrt{5}}{2} = \left[\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right] b$$

Tomando el valor positivo de la raíz, obtenemos que.

$$\varphi = \frac{a}{b} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

El número de oro, es un número irracional cuyo valor numérico es.

$$\varphi = 1{,}618033989.....$$

Esta simple relación o cociente entre las longitudes de dos segmentos es la base de uno de los capítulos más curiosos y sugerentes de la Ciencia. Desde la antigüedad ha despertado el interés y la curiosidad de filósofos, geómetras, matemáticos, pintores, arquitectos y escultores. A mi juicio, su capacidad de fascinación reside en el hecho de tratarse de un concepto estético primario que admite un intenso formalismo matemático. No nos debe extrañar esa dualidad arte-matemática, los hombres cultos de otras épocas no establecían diferencia alguna entre el área de ciencias y el área de humanidades. La separación entre esas dos ramas del saber es uno más de los lamentables inventos pedagógicos de este siglo. Por ello, la razón áurea (bautizada así por Leonardo da Vinci) es un concepto curricular que ha desaparecido de los actuales planes de estudio pero su existencia nos acompaña en nuestra vida cotidiana como comprobaremos a lo largo de esta charla.

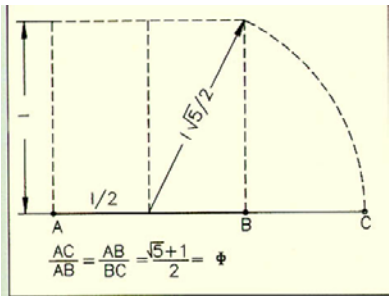
Pero volvamos a la definición inicial. El número de oro es como hemos dicho anteriormente simplemente la razón entre dos segmentos pero es algo más de un simple cociente de longitudes, en su valor matemático lleva asociado un concepto estético, el canon de la belleza, de la proporción perfecta.

Por ejemplo, si pedimos a un grupo de personas que dibujen un rectángulo que resulte agradable a la vista o mejor aún, si pedimos que elijan entre una docena de rectángulos con diferentes proporciones entre su anchura y su altura comprobaremos que el rectángulo mayoritariamente elegido es aquel cuyos lados cumplen la relación.

$$\frac{b}{a} = 1{,}618.....$$

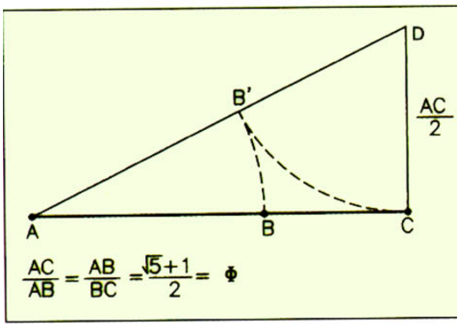
No es de extrañar que las tarjetas de crédito adopten esta forma, son rectángulos áureos, acertadamente elegida su forma para así hacer de oro a quien las emite. El documento nacional de identidad español también es un rectángulo áureo.

Una forma sencilla de dibujar el rectángulo áureo es.



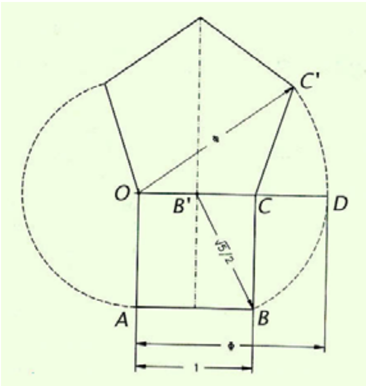
- partimos de un cuadrado de lado l.
- lo dividimos por la mitad
- con un compás pincho en A' y trazo el arco BB'
- la distancia OB' = $\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \cdot l$

Para hallar la razón áurea de un segmento procederemos de la siguiente forma.



- sea AC un segmento de longitud a, el cual quiero dividir en dos partes que guarden entre sí la relación áurea.
- levanto en C la perpendicular de longitud a/2
- uno el punto A con el punto D. $AD = \frac{a\cdot\sqrt{5}}{2}$
- trazo el arco CB' con centro en D.
- trazo el arco B'B con centro en A
- $AB = AB' = \frac{a\cdot\sqrt{5}}{2} - \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot a = 0{,}618....a$

El número φ está muy ligado al pentágono regular tanto el convexo como el estrellado. El pentágono regular era el distintivo de los pitagóricos. Los pitagóricos se sentían fascinados por las propiedades de los números e hicieron importantes descubrimientos en música, al comprobar cómo al hacer vibrar una cuerda y su longitud fuera proporcional a ciertos números enteros, entonces se producían unos sonidos melodiosos, es decir, existían ciertas longitudes expresadas en forma de números asociados a la armonía de los sonidos y, por tanto, al deleite del espíritu. Esa escuela filosófica, más bien una secta religiosa, fascinados por las propiedades del número de oro y su representación gráfica en el pentágono regular hicieron suyo ese símbolo que siempre ha poseído unas connotaciones esotéricas. Para las invocaciones a los espíritus, al diablo, se valen de una escenografía donde siempre aparece el pentágono regular, como elemento intermedio, como puerta de acceso entre la realidad y la irracionalidad.



- para la construcción del pentágono regular partimos de un cuadrado de lado l
- construimos el segmento áureo OD, tal que $\frac{OD}{OC} = \varphi$, por el método expuesto anteriormente.
- con centro en B' prolongo el arco BD hasta C'.
- con centro en C trazo el arco OC'.
- el segmento CC' es el lado del pentágono regular y el segmento OC' es la diagonal del pentágono, ambos están relacionados.

diagonal = lado · φ

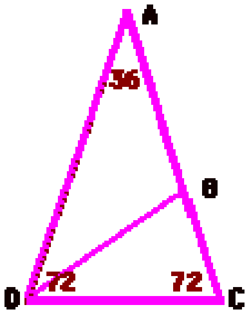
Los ángulos interiores de un pentágono miden: $\frac{180^o\cdot(n-2)}{n} = \frac{180^o\cdot(5-2)}{5} = 108^o$

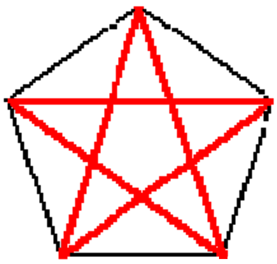
El triángulo OCC' es isósceles, los ángulos de los extremos miden, $\frac{180^o - 108^o}{2} = 36^o = \frac{\pi}{5}$

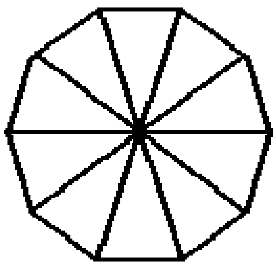
De aquí deducimos, por inspección del triángulo OCC', que.

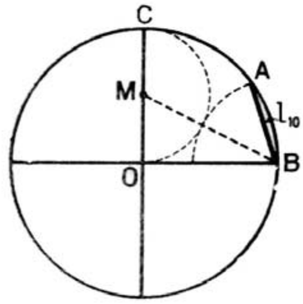
$$\varphi = 2\cdot\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

El triángulo isósceles de ángulos 36º, 72º, 72º es la base del pentágono regular estrellado. Obsérvese que las diagonales y el lado están en la proporción del número de oro.









El triángulo isósceles de ángulos; 36º-72º-72º nos servirá también para obtener el lado del decágono regular. Obsérvese que el decágono podemos descomponerlo en 10 triángulos isósceles de esas características y fácilmente se ve que el lado del decágono es justamente la parte áurea del radio. Por tanto, a partir del radio OB (ver figura superior), levantamos el segmento OM de longitud igual a R/2. Unimos M con B. Trazamos el arco OC con centro en M. El segmento AB es la parte áurea del radio y consecuentemente, el lado del decágono regular.

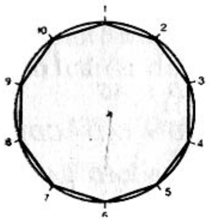


FIG. 70
Decágono

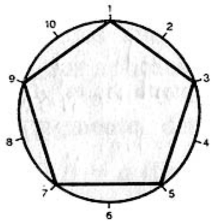


FIG. 71
Pentágono

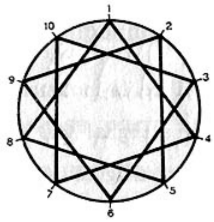


FIG. 72
Decágono estrellado

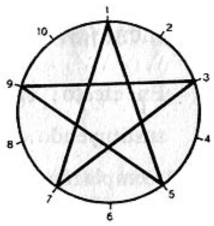
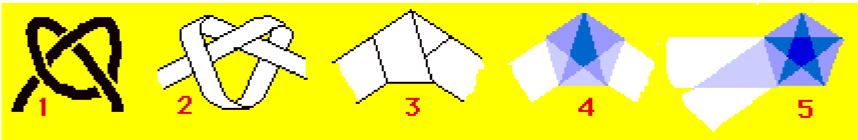


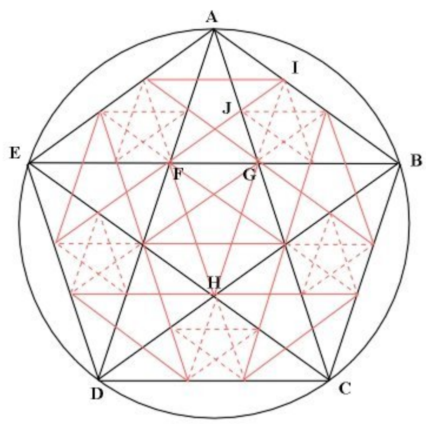
FIG. 73
Pentágono estrellado

Llevando ese valor sobre la circunferencia marcamos los 10 puntos. Al unirlos de dos en dos dibujamos el pentágono regular, al unirlos de tres en tres el decágono regular estrellado y al unirlos de cuatro en cuatro el pentágono regular estrellado. Obsérvese en los polígonos estrellados como se forma interiormente el polígono convexo correspondiente.

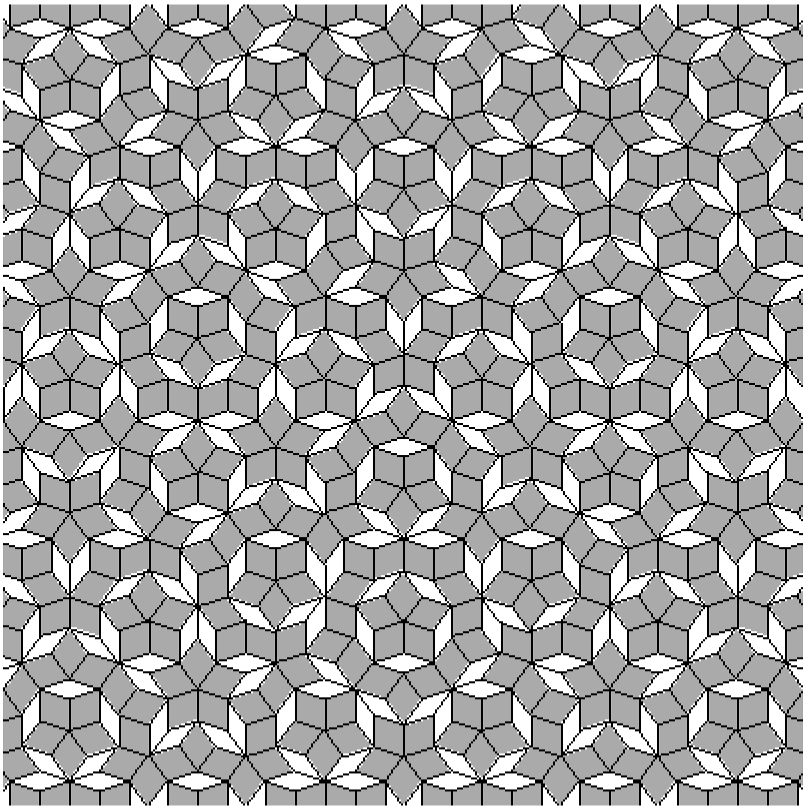
Una cinta de papel anudada nos proporciona un pentágono regular.



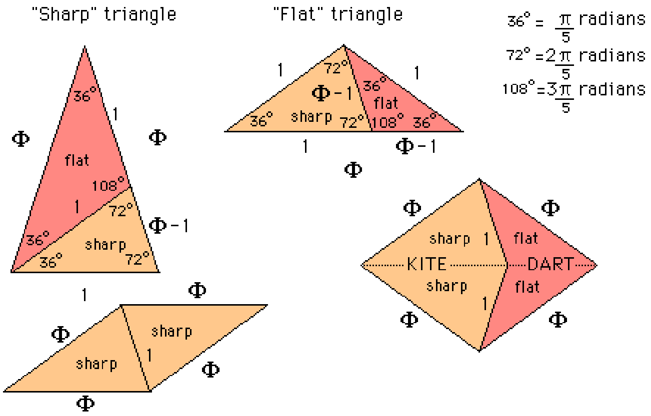
Una figura geométricamente muy hermosa, la armonía y belleza de sus proporciones nos indica que sus lados siguen la razón áurea.



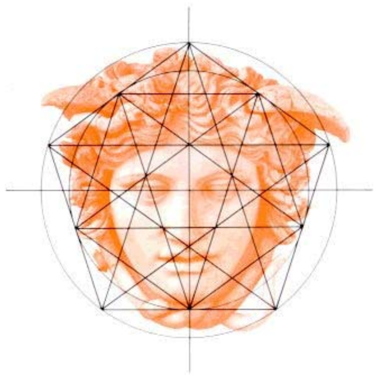
Un mosaico también muy hermoso diseñado por el profesor Roger Penrose.



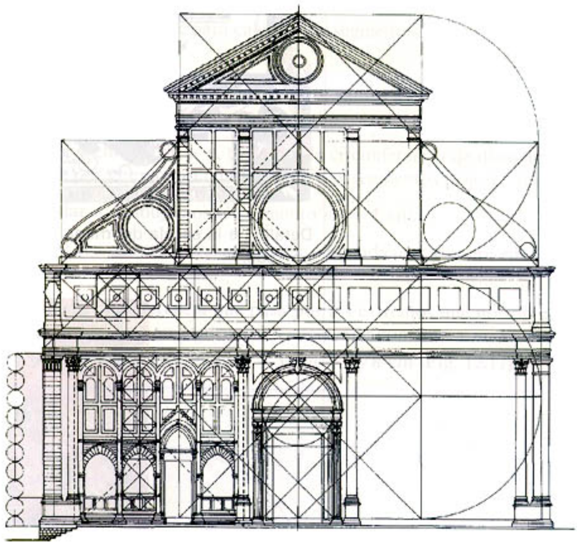
Sus elementos tienen como base las figuras.



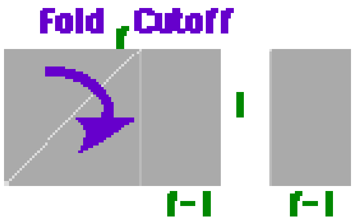
Otro ejemplo del diseño artístico basado en las estéticas sensaciones de la razón áurea.



El "Entierro del Conde de Orgaz" y un estudio de sus proporciones basado en el número de oro.

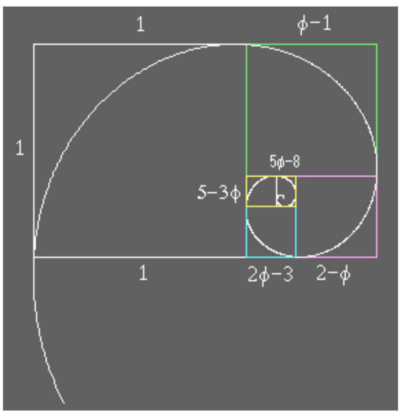


Si disponemos de una hoja de papel de dimensiones φ x 1, al eliminar el cuadrado de lado unidad obtenemos otro rectángulo de dimensiones 1 x (φ-1), que es semejante al primero. Procediendo sucesivamente tendremos toda una colección de rectángulos áureos de tamaño cada vez más pequeños pero todos semejantes entre sí.



No sólo aparece el número de oro en las obras de arte sino también en la Naturaleza.

Una construcción similar podemos realizar partiendo de un rectángulo áureo de dimensiones φ x 1, dividiendo el rectángulo áureo en un cuadrado de lado = 1, entonces el rectángulo sobrante tiene dimensiones 1 x (φ-1). En ese nuevo rectángulo separamos el cuadrado de lado (φ-1) quedando un rectángulo sobrante de dimensiones (φ-1) x (2-φ). Siguiendo el proceso vamos obteniendo rectángulos de dimensiones (2-φ) x (5-3φ), (5-3φ) x (5φ-8), tal como observamos en la figura.



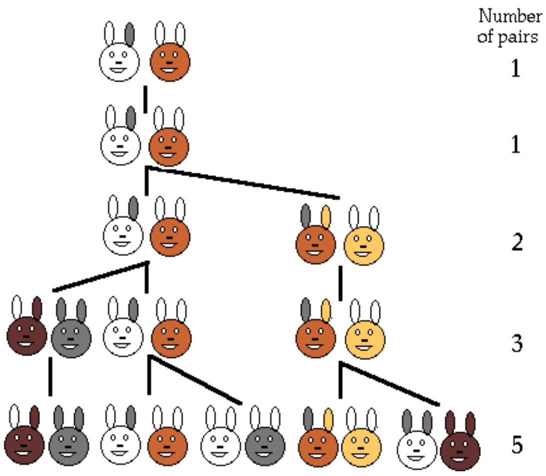
Al trazar los cuartos de circunferencia correspondientes a cada uno de la sucesión de cuadrados sucesivos, obtenemos una línea espiral cuyo perfil concuerda con el de la concha de multitud de caracoles marinos como el Nautilus o caracolas de mar.

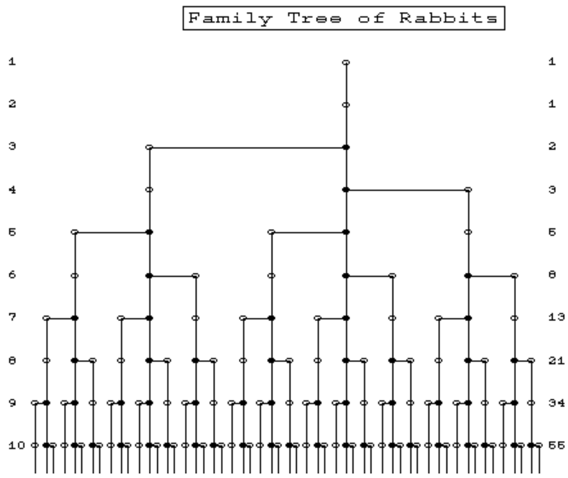
Los huevos de gallina son óvalos que pueden inscribirse en rectángulos de oro, es decir, la altura y la anchura del huevo siguen la razón áurea.

Y ya que estamos hablando de animales, de caracoles y de huevos de gallina ¿por qué no hablar de conejos?. Pero antes vamos a presentar a un gran matemático Leonardo de Pisa (1.170-1.421), más conocido por Fibonacci (hijo de Bonaccio). A pesar de ser un matemático brillante con una importante obra en su haber, es conocido principalmente por una cuestión aparentemente trivial, una sucesión de números enteros en la que cada término es igual a la suma de los dos anteriores.

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...

Esta sucesión representa un buen número de situaciones prácticas pero la más anecdótica es la relacionada con la cría de conejos. Supongamos una pareja de conejos, los cuales pueden tener descendencia una vez al mes a partir del segundo mes de vida, suponemos asimismo que los conejos no mueren y que cada hembra produce una nueva pareja (conejo, coneja) cada mes. La pregunta es, ¿cuántas parejas de conejos existen en la granja al cabo de n meses?.





El número de parejas coincide con los términos de la sucesión de Fibonacci.

La sucesión de Fibonacci es uno de los temas más sorprendentes de la Matemática, existen multitud de aplicaciones en los que aparece esa sucesión, existiendo una amplísima bibliografía dedicada exclusivamente al estudio de sus propiedades y aplicaciones. A título de ejemplo citaremos.

- generación de algoritmos para el cálculo de máximos y mínimos de funciones complicadas cuya derivada es difícil de obtener.
- en poesía, ciertas obras de Virgilio y otros poetas de su época se sirvieron deliberadamente de la sucesión de Fibonacci en sus composiciones.
- el número de rutas que recorre una abeja cuando se desplaza por las celdillas de un panal son términos de la sucesión de Fibonacci, siendo n el número de celdillas. El número de antepasados de los zánganos son términos de Fibonacci (nótese que los zánganos son producidos a partir de los huevos infertilizados

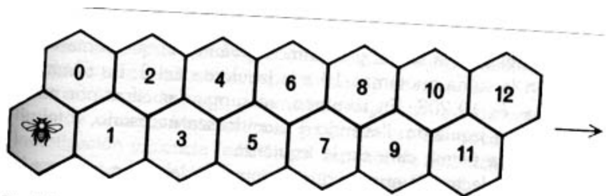


Fig. 75. La abeja puede caminar hasta la celdilla n de F_{n+2} maneras.

de la abeja reina, es decir, tienen una madre pero no tienen padre).

- en el estudio de las trayectorias de rayos luminosos que inciden oblicuamente sobre dos láminas de vidrio planas y en contacto
- una propiedad de la sucesión de Fibonacci es que dos términos consecutivos cualesquiera son primos entre sí. Se discute si la sucesión de Fibonacci contiene un número infinito de números primos.
- el cuadrado de cada término de la sucesión de Fibonacci se diferencia en una unidad del producto de los dos contiguos; el anterior y el siguiente.
- en los girasoles, las semillas se distribuyen en forma de espirales logarítmicas, unas en sentido horario y otras en sentido antihorario, si contamos el número de espirales que hay en un sentido y las que hay en el otro aparecen términos de Fibonacci consecutivos. Igual sucede en las piñas de los pinos.

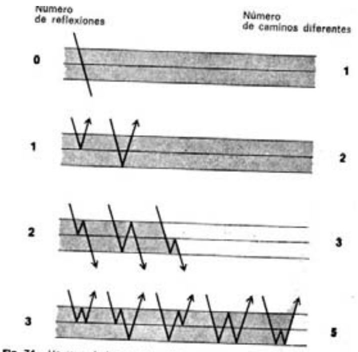


Fig. 74. Un rayo de luz puede reflejarse según F_{n+2} caminos al sufrir n reflexiones entre dos láminas de vidrio.

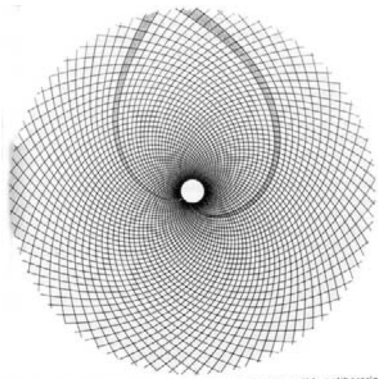
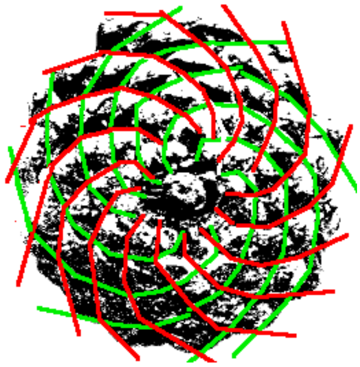


Fig. 73. Girasol gigante que contiene 55 espirales en sentido antihorario, y 89 en sentido horario.



Y ahora ha llegado el momento de preguntarnos, ¿y qué tiene que ver todo esto con la razón áurea?

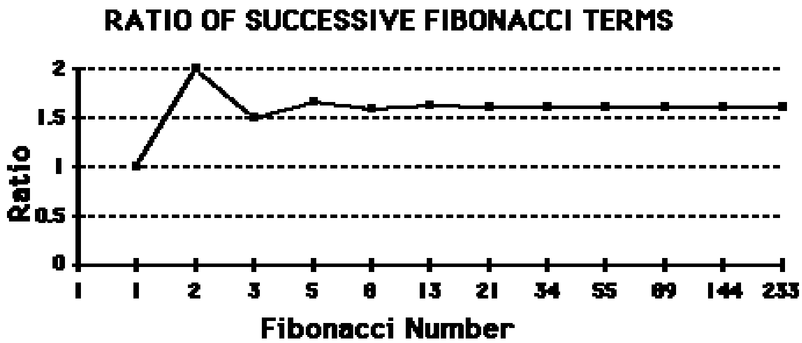
Si tomamos los términos de la sucesión de Fibonacci.

1-1-2-3-5-8-13-21-34-55-89-144- ....

Y dividimos cada término entre el anterior vamos obteniendo los siguientes valores.

$$\frac{1}{1}=1 \quad \frac{2}{1}=2 \quad \frac{3}{2}=1{,}5 \quad \frac{5}{3}=1{,}66.. \quad \frac{8}{5}=1{,}6 \quad \frac{13}{8}=1{,}625 \quad \frac{21}{13}=1{,}615.. \quad \frac{34}{21}=1{,}619... \quad \frac{55}{34}=1{,}617... \quad \frac{89}{55}=1{,}618...$$

Representando estos cocientes en forma gráfica.



Los cocientes sucesivos convergen hacia el valor 1,618033989..... En otras palabras.

$$lim \frac{f_n}{f_{n-1}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$$

El término general de la sucesión de Fibonacci es.

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 \right]$$

De nuevo, y sorprendentemente el número de oro aparece relacionado con los fenómenos naturales que hemos descrito. Y es que el número de oro posee unas sorprendentes propiedades matemáticas.

Si comparamos

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}6180....$$

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} 0{,}6180....$$

Observamos que poseen la misma parte decimal. En otras palabras.

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$$

El único número que cumple esa propiedad es nuestro viejo conocido, el número de oro.

Esa relación implica la curiosa sucesión de igualdades.

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\varphi}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\varphi}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\varphi}}}} = ...$$

Construyamos ahora la progresión geométrica.

$$1, \varphi, \varphi^2, \varphi^3, \varphi^4, ...$$

Se trata de una progresión geométrica de razón φ pero al mismo tiempo cada término es también LA SUMA de los dos anteriores. Es la única sucesión que participa al mismo tiempo de la naturaleza de la progresión aritmética y geométrica, de ahí se deriva esa maravillosa perfección en las figuras cuya geometría y dimensiones están vinculadas al número de oro.

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$$

$$\varphi^2 = \varphi + 1$$

Y, en general

$$\varphi^n = \varphi^{n-1} + \varphi^{n-2}$$

A su vez

$$\varphi^n = \varphi \cdot \varphi^{n-1}$$

Siguiendo con las curiosidades matemáticas, una forma de representar el número de oro es mediante la sucesión de radicales consecutivos.

$$\varphi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + ...}}}}}}$$

Otra expresión más rebuscada pero no menos sorprendente.

$$ln\varphi = \frac{\sqrt{5}}{2}\cdot\left[\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{12}-\frac{1}{13}+\frac{1}{14}\right)+.....\right]$$

El número de oro está vinculado a la trigonometría con las relaciones.

$$cos\ 36^{o} = \frac{\varphi}{2}$$

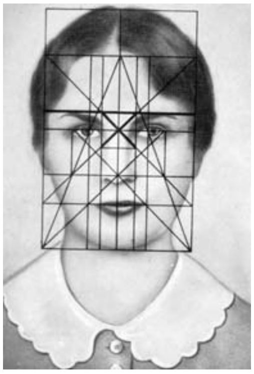
$$cos\ 72^{o} = \frac{1}{2\cdot\varphi}$$

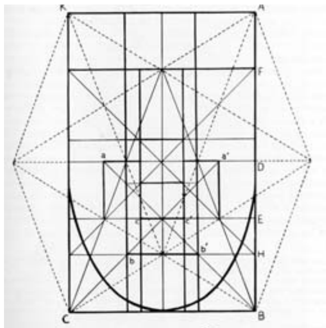
Y la solución de la ecuación trigonométrica.

$$cos\ x = tg\ x$$

$$x = arc\,sen\left(\frac{1}{\varphi}\right)$$

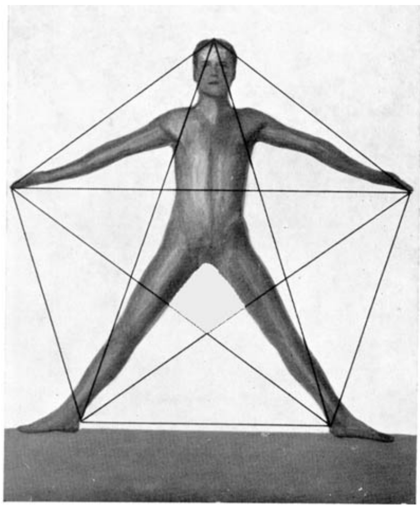
Para finalizar vamos a mostrar algunas relaciones de la razón áurea con la figura humana, si hemos aplicado este concepto a la arquitectura y a la Naturaleza, es normal que también los clásicos se hayan interesado por los cánones de belleza aplicados a las proporciones humanas.



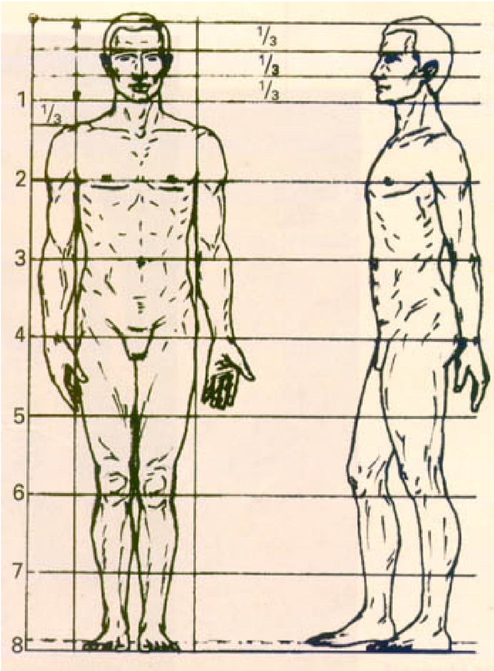


Este sería a juicio de un artista el rostro más perfecto de mujer.

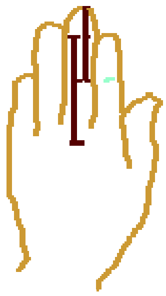
El cuerpo humano puede inscribirse en un pentágono regular. Una figura humana con esas proporciones estaría dentro del cánon de la belleza ideal.

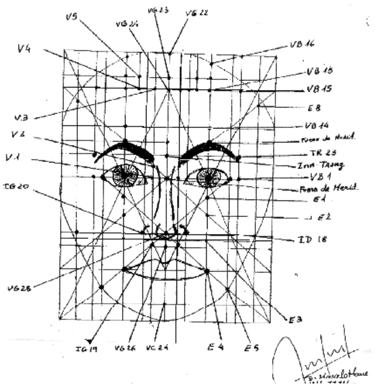


Un detalle curioso conocido por los clásicos es que la distancia del ombligo al suelo es justamente la razón áurea de su altura.

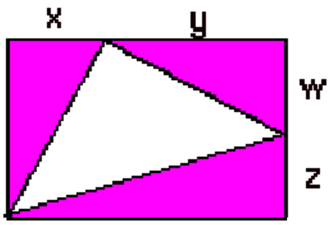


En la mano humana, la distancia entre las falanges están en la razón áurea de la longitud del dedo





En resumen, el número de oro parte de una definición. Al dividir un segmento en dos partes, la razón entre el todo y la mayor es igual a la razón entre la mayor y la menor. Esta definición le confiere una serie de propiedades interesantes, una sucesión de potencias del número de oro participa del crecimiento aritmético y geométrico simultáneamente y también está vinculado con la sucesión de Fibonacci. Debido a las curiosas y sorprendentes propiedades de φ, existe mucha literatura acientífica que lo usa indebidamente. Por ejemplo, los puntos donde se localizan los meridianos en las sesiones de acupuntura se sitúan en zonas prefijadas por la relación áurea.



Y una aplicación matemática la tenemos en la descomposición de un rectángulo cualquiera en tres triángulos (en rojo) de igual área. La solución se obtiene al hallar la parte áurea de sus lados.

BIBLIOGRAFÍA

- El número de oro. Matila C. Ghyka. Ed. Poseidón
- Matemáticas e imaginación. E. Kasner/J. Newman. Ed. Salvat
- Instantáneas matemáticas. Hugo Steinhaus. Ed. Salvat
- Miscelánea matemática. Martin Gardner. Ed. Salvat
- Circo matemático. Martin Gardner. Alianza Editorial

DIRECCIONES DE INTERNET

- http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/phi2DGeomTrig.html
- http://platea.pntic.mec.es/~aperez4/
- http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fib.html
- http://averroes.cec.junta-andalucia.es/recursos_informaticos/concurso/accesit3
- http://www.mathsoft.com/