

Cipri Santiago Zaragoza

Departamento de Matemáticas

20/08/2002

PROGRESIONES

PROGRESIONES ARITMÉTICAS ORDINARIAS

Definition 1 Una *progresión aritmética (ordinaria)* es una serie de números de forma que cada uno de ellos se obtiene del anterior sumándole una cantidad constante que llamamos *diferencia*.

Es decir, si $\{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ es una progresión aritmética, entonces la diferencia es $d = a_n - a_{n-1}$ y el término general de la progresión es:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

Además, la **suma de n términos** se puede calcular por la fórmula:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

Interpolación de términos en una progresión aritmética:

Interpolarse n términos entre dos números dados a y b es formar una progresión aritmética con n+2 términos de forma que el primero y el último sean los números que nos dan.

En este caso se tiene que la diferencia es: $d = \frac{b-a}{n+1}$

Una **curiosidad** histórica:

De niño GAUSS (1777-1855) asistió a la escuela local, dirigida por un maestro de costumbres rutinarias. Un día, con objeto de tener a la clase atareada y en silencio durante un buen rato, el maestro tuvo la idea de hacer sumar a sus alumnos todos los números del 1 al 100, ordenándoles además que, según fuera terminando cada uno esta tarea, deberían colocar su pizarra sobre la mesa del maestro. Casi inmediatamente colocó GAUSS su pizarra sobre la mesa, diciendo: "ya está"; el maestro lo miró desdeñosamente mientras los demás trabajaban con ahínco. Cuando todos hubieron terminado y el maestro revisó al fin los resultados

obtenidos, se encontró con la sorpresa notable de que la única pizarra en la que aparecía la respuesta correcta, 5050, sin ningún cálculo accesorio, era la de GAUSS. El muchachito de 10 años había hecho evidentemente el cálculo mental de sumar la progresión aritmética 1,2,3,4,...,99,100 asociando parejas de términos igualmente alejados de los extremos, es decir, esencialmente utilizando la fórmula $(m + 1) \frac{m}{2}$. No es pues extraño que ahora se le conozca como el Príncipe de las Matemáticas.

PROGRESIONES GEOMÉTRICAS

Definition 2 Una *progresión geométrica* es una serie de números de forma que cada uno de ellos se obtiene del anterior multiplicado por una cantidad constante llamada **razón**.

Es decir, si $\{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ es una progresión geométrica, entonces la razón es $r = \frac{a_n}{a_{n-1}}$ y el término general de la progresión es:

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

Además, el **producto de n términos** de una progresión geométrica es:

$$P_n = \pm \sqrt{(a_1 a_n)^n}$$

(tomaremos + cuando $P_n \geq 0$ y - en caso contrario) y la **suma de n términos** es:

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} \text{ o lo que es lo mismo } S_n = \frac{a_1 - a_n r}{1-r}$$

y si $r = 1$, entonces $S_n = n a_1$

Suma de todos los términos de una progresión geométrica:

Se tiene que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_1 r^{n-1} < +\infty \Leftrightarrow |r| < 1$

en cuyo caso

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_1 r^{n-1} = \frac{a_1}{1-r}$$

Interpolación de términos en una progresión geométrica

Interpolar n términos entre dos números dados a y b es formar una progresión geométrica con $n+2$ términos de forma que el primero y el último sean los números dados.

En este caso se tiene que la razón es: $r = \pm \sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}$