INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO DE INTEGRALES. APLICACIONES

1.- PRIMITIVAS

Sean $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $F : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones reales de variable real. Se dice que F es una **primitiva** de f cuando $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in D$.

<u>Ejercicio1.</u> *Comprueba, en cada caso, que F es una primitiva de f:*

1) $F(x) = \sqrt[4]{x^4 - 2} - 287$ $\qquad f(x) = \dfrac{x^3}{\sqrt[4]{\left(x^4 - 2\right)^3}}$

2) $F(x) = \dfrac{1}{x+1} + \ln\left(\dfrac{1}{x+1}\right)$ $\qquad f(x) = \dfrac{-x-2}{(1+x)^2}$

3) $F(x) = \dfrac{\left(x^2+1\right)^6}{6}$ $\qquad f(x) = 2x\left(x^2+1\right)^5$

<u>Ejercicio2.</u> *Calcula una primitiva de las siguientes funciones:*

1) $y = x^2$ $\qquad$ 5) $y = x$

2) $\mathrm{y} = \operatorname{sen} x$ $\qquad$ 6) $y = x^3$

3) $y = 5x^4 - 2$ $\qquad$ 7) $y = 1/x$

4) $y = e^{2x}$ $\qquad$ 8) $y = x + k$ con $k \in \mathbb{R}$

<u>Ejercicio3.</u> *Halla la primitiva de* $f(x) = e^{2x}$ *que valga e para* $x = 0$.

Nótese que si una función f tiene una primitiva F también $F + k$ (siendo $k \in \mathbb{R}$) es una primitiva de f.

Al conjunto de todas las primitivas de una función dada f, lo representaremos por

$$\int f(x)dx = \{F : F \text{ es una primitiva de } f\} = \{F : F'(x) = f(x)\}$$

y se lee: **integral indefinida de *f***.

Las siguientes <u>propiedades</u> se deducen de las correspondientes propiedades de las derivadas.

<u>**Propiedades inmediatas:**</u>

(1) $\int \left(f(x) + g(x)\right)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

(2) $\int c \cdot f(x)\,dx = c\int f(x)\,dx$ con $c \in \mathbb{R}$

Estas dos propiedades se pueden resumir diciendo que la integral indefinida se comporta bien con la suma y el producto por escalares.

2.- INTEGRALES INMEDIATAS SIMPLES. TABLA

La siguiente tabla de integrales inmediatas se obtiene calculando la correspondiente primitiva de la función, por lo que es muy importante no perder nunca de vista de dónde han salido esas integrales, esto es, el concepto de primitiva de una función. Ahora bien, como se suelen usar mucho y son la base para calcular otras integrales más complejas es conveniente memorizar dicha tabla.

TABLA DE INTEGRALES INMEDIATAS

TIPOS	
	Simple
Potencial $n \neq -1$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k$
Logarítmico	$\int \frac{1}{x} dx = \ln\lvert x\rvert + k$
Exponencial	$\int e^x dx = e^x + k$ $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + k$
Seno	$\int \cos x dx = \text{sen } x + k$
Coseno	$\int \text{sen } x dx = -\cos x + k$
Tangente	$\int \sec^2 x dx = \text{tg } x + k$ $\int \left(1 + \text{tg}^2 x\right) dx = \text{tg } x + k$ $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \text{tg } x + k$
Cotangente	$\int \text{cosec}^2 x dx = -\text{cotg } x + k$ $\int \left(1 + \text{cosec}^2 x\right) dx = -\text{cotg } x + k$ $\int \frac{1}{\text{sen}^2 x} dx = -\text{cotg } x + k$
Arco seno = arco coseno	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \text{arcsen } x + k$
Arco tangente = – Arco cotangente	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \text{arctg } x + k$ $\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \text{arctg} \frac{x}{a} + k$

<u>*Ejercicio4.*</u> *Calcula las siguientes integrales indefinidas inmediatas:*

1) $\int 2x dx$

2) $\int \cos x dx$

3) $\int e^x dx$

4) $\int 2^x dx$

28) $\int \left(\frac{x^3}{2} - \frac{2x^2}{5} - \frac{3x}{4} + \frac{1}{2} \right) dx$

29) $\int \sqrt{3x} dx$

30) $\int \left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{x^2}{\sqrt{3}} \right) dx$

31) $\int \frac{2}{\sqrt[3]{x}} dx$

5) $\int x^3 dx$

6) $\int 5x^2 dx$

7) $\int \left(4x^2 - 7x + 5\right) dx$

8) $\int \sqrt[3]{x^5}\, dx$

9) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^5}}$

10) $\int \frac{1}{x^2} dx$

11) $\int \left(x^3 - 2x^2 + \frac{3x}{4} - 5 \right) dx$

12) $\int (x-3)(x+3) dx$

13) $\int \left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}\right) dx$

14) $\int \left(\sqrt{x} + \frac{7}{\sqrt[3]{x^4}} \right) dx$

15) $\int \left(\frac{4x^5}{3} + \sqrt[5]{x} + \frac{x^2}{7} - 1 \right) dx$

16) $\int \left(x^2 + 3x + 1\right) dx$

17) $\int \sqrt{x}\, dx$

18) $\int (3x-1)(4x+2) dx$

19) $\int \sqrt[4]{x}\, dx$

20) $\int \frac{2x^3 - 3x^2 + 4x - 1}{2x} dx$

21) $\int \frac{x^5 - 4x^3 + 2x^2 - 3x + 2}{3x^2} dx$

22) $\int \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{x}} dx$

23) $\int \frac{x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

32) $\int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1 \right) dx$

33) $\int \sqrt[4]{7x}\, dx$

34) $\int \frac{4}{3\sqrt{5x}} dx$

35) $\int 2\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{4x}\, dx$

36) $\int \left(\frac{3}{x^4} - \frac{2}{4x^3} + \frac{1}{3x^2} - \frac{2}{3x} + \frac{1}{5} \right) dx$

37) $\int \frac{\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[6]{x}}{\sqrt{2x}} dx$

38) $\int \left(\frac{2}{3x} - \frac{5}{4x^2} + \frac{3}{x^3} \right) dx$

39) $\int \left(\sqrt[4]{x^2} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \right) dx$

40) $\int \frac{x^3 + 2x^2 - x + 3}{4x^2} dx$

41) $\int \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x} dx$

42) $\int \frac{2\cos x}{3} dx$

43) $\int \left(\frac{4}{3} \operatorname{sen} x - \frac{2}{5} \cos x \right) dx$

44) $\int \left(2^x - x^2\right) dx$

45) $\int \left(1 + \operatorname{tg}^2 x\right) dx$

46) $\int \frac{4}{\sqrt{1 - x^2}} dx$

47) $\int \frac{1}{3\sqrt{1 - x^2}} dx$

48) $\int \frac{5}{1 + x^2} dx$

49) $\int \left(\frac{4}{x} + 4^x + x^4 + e^x + x^e + \right) dx$

50) $\int \frac{2^x}{3^x} dx$

24) $\int \frac{\sqrt{3x}-\sqrt{2x}}{\sqrt[3]{x}}dx$

25) $\int 3e^{x}dx$

26) $\int 4\,\text{sen}\,x\,dx$

27) $\int \frac{3}{5\cos^2 x}dx$

51) $\int 2^x 3^x\,dx$

52) $\int \left(3+3\,\text{tg}^2 x\right)dx$

53) $\int \frac{4}{1-\text{sen}^2 x}dx$

3.- INTEGRACIÓN POR CAMBIO DE VARIABLE

La regla de la cadena nos dice que

$$(g\circ f)'(x)=g'(f(x))\,f'(x)$$

Integrando esta igualdad

$$\int (g\circ f)'(x)\,dx=\int g'(f(x))\,f'(x)dx$$

resulta:

$$(g\circ f)(x)=\int g'(f(x))\,f'(x)\,dx$$

Así, siempre que en un integrando reconozcamos una expresión del tipo $g'(f(x))f'(x)$ el cambio de variable proporcionará buenos resultados. El cambio que hay que hacer es:

$$\begin{cases} t=f(x) \\ dt=f'(x)dx \end{cases}$$

Esto nos permite construir la siguiente tabla de integrales “inmediatas” compuestas (ponemos además la ya vista (forma simple) para que se observen las similitudes entre ambas).

TABLA DE INTEGRALES INMEDIATAS

TIPOS	**FORMAS**	
	Simple	**Compuesta**
Potencial $n\neq -1$	$\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+k$	$\int f'(x)f(x)^n dx=\frac{f(x)^{n+1}}{n+1}+k$
Logarítmico	$\int \frac{1}{x}dx=\ln\lvert x\rvert+k$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln\lvert f(x)\rvert+k$
Exponencial	$\int e^x dx=e^x+k$ $\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+k$	$\int e^{f(x)}f'(x)dx=e^{f(x)}+k$ $\int a^{f(x)}f'(x)dx=\frac{a^{f(x)}}{\ln a}+k$
Seno	$\int \cos x dx=\text{sen}\,x+k$	$\int \cos f(x)\cdot f'(x)dx=\text{sen}\,f(x)+k$
Coseno	$\int \text{sen}\,x dx=-\cos x+k$	$\int \text{sen}\,f(x)\cdot f'(x)dx=-\cos f(x)+k$

Tangente	$\int \sec^2 x dx = \text{tg } x + k$ $\int (1+\text{tg}^2 x) dx = \text{tg } x + k$ $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \text{tg } x + k$	$\int \sec^2 f(x) \cdot f'(x) dx = \text{tg } f(x) + k$ $\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)} dx = \text{tg } f(x) + k$
Cotangente	$\int \text{cosec}^2 x dx = -\text{cotg } x + k$ $\int (1+\text{cosec}^2 x) dx = -\text{cotg } x + k$ $\int \frac{1}{\text{sen}^2 x} dx = -\text{cotg } x + k$	$\int \text{cosec}^2 f(x) \cdot f'(x) dx = -\text{cotg } f(x) + k$ $\int (1+\text{cosec}^2 f(x)) f'(x) dx = -\text{cotg } f(x) + k$ $\int \frac{f'(x)}{\text{sen}^2 f(x)} dx = -\text{cotg } f(x) + k$
Arco seno = arco coseno	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \text{arcsen } x + k$	$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}} dx = \text{arcsen } f(x) + k$
Arco tangente = – Arco cotangente	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \text{arctg } x + k$ $\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \text{arctg} \frac{x}{a} + k$	$\int \frac{f'(x)}{1+f(x)^2} dx = \text{arctg } f(x) + k$ $\int \frac{f'(x)}{a^2+f(x)^2} dx = \frac{1}{a} \text{arctg} \frac{f(x)}{a} + k$
Neperiano – Arco tangente	$\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c} dx = \text{neperiano} + \text{arco tangente} + k$ $M \neq 0, \quad ax^2+bx+c$ irreducible	

<u>*Ejercicio5.*</u> *Calcula las siguientes integrales indefinidas por cambio de variable:*

1) $\int (x^2+1)^5 \, 2x dx$

2) $\int \text{sen } (2x^2+1) 4x dx$

3) $\int \sqrt{4x^2+2} \cdot 8x dx$

4) $\int e^{\text{sen } x} \cos x dx$

5) $\int \frac{2x-3}{x^2-3x+1} dx$

6) $\int \sqrt[3]{5x^2-10x} \cdot (10x-10) dx$

7) $\int \sqrt{x^2+1} \cdot x dx$

8) $\int \cos(-x) dx$

9) $\int e^{2x+3} dx$

10) $\int \frac{1}{x+4} dx$

11) $\int \frac{1}{3x-2} dx$

22) $\int \sqrt[3]{2x^2-3} \cdot 3x dx$

23) $\int \frac{2x}{x^2+5} dx$

24) $\int \text{tg } x dx$

25) $\int e^{x^2+3} x dx$

26) $\int \frac{\text{tg } x}{\cos^2 x} dx$

27) $\int (5x+1)^4 dx$

28) $\int \text{sen } (2x+1) dx$

29) $\int \frac{2x^3+3x^2-5x+1}{2x+3} dx$

30) $\int \frac{e^{4x}+e^x+1}{e^x} dx$

31) $\int \frac{1}{(x+2)^3} dx$

32) $\int \frac{2}{(3x-2)^2} dx$

12) $\int \cos\left(2x+\frac{1}{3}\right)dx$

13) $\int (2x+1)^4 dx$

14) $\int (x-3)^6 dx$

15) $\int \frac{4x^3+2x}{x^4+x^2+4}dx$

16) $\int xe^{-x^2} dx$

17) $\int \sqrt[3]{x^2-2x}\cdot(x-1)dx$

18) $\int \frac{2x+1}{1+(2x+1)^2} dx$

19) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

20) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx$

21) $\int \frac{x^2+3x+2}{x+1}dx$

33) $\int \frac{7x}{\left(4x^2+2\right)^6} dx$

34) $\int e^x \cos\left(e^x\right)dx$

35) $\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

36) $\int \frac{e^x}{\left(e^x+4\right)^2} dx$

37) $\int \frac{x+1}{x^2+2x} dx$

38) $\int xe^{-x^2} dx$

39) $\int \operatorname{sen}^2 x \cos x dx$

40) $\int \cos^3 x \operatorname{sen} x dx$

41) $\int \frac{\operatorname{tg}^3 x}{\cos^2 x} dx$

4.- INTEGRACIÓN POR PARTES

Supongamos que queremos integrar una función que sea producto de dos funciones u y v (se suponen derivables). Según la regla de derivación de un producto

$$(u\cdot v)' = u'\cdot v + u\cdot v'$$

de donde

$$\int \left(u(x)\cdot v(x)\right)'dx = \int u'(x)\cdot v(x)\,dx + \int u(x)\cdot v'(x)\,dx$$

y por tanto

$$u(x)\cdot v(x) = \int u'(x)\cdot v(x)\,dx + \int u(x)\cdot v'(x)\,dx$$

es decir,

$$\int u(x)\cdot v'(x)\,dx = u(x)\cdot v(x) - \int u'(x)\cdot v(x)\,dx$$

Esta última igualdad se suele escribir en la forma

$\int u\cdot dv = u\cdot v - \int v\cdot du$ Fórmula de integración por partes

Para tomar la función u seguiremos la siguiente regla ordenada (→): ALPES

A: arco
L: logaritmos
P: polinomios
E: exponenciales
S: seno, coseno,…

Ejercicio6. *Calcula las siguientes integrales indefinidas utilizando el método de integración por partes.*

1) $\int xe^{x}dx$

2) $\int x^{2}\text{ sen } x\, dx$

3) $\int \text{arcsen } x\, dx$

4) $\int \left(x^{2}+x-1\right)\text{sen } x\, dx$

5) $\int x^{2}e^{2x+1}dx$

6) $\int \arccos x dx$

7) $\int \text{arctg } x dx$

8) $\int \ln x dx$

9) $\int e^{x}\text{sen } x dx$

10) $\int \ln(3x+2)dx$

5.- PARA PRACTICAR

Ejercicio7. *Calcula las siguientes integrales indefinidas:*

1) $\int x^{6}dx$

2) $\int \cos x dx$

3) $\int (6x^{5})dx$

4) $\int \frac{5}{x^{4}}dx$

5) $\int (2x)dx+\int 3\cos x dx$

6) $\int \left(3x^{2}+\sec^{2}x\right)dx$

7) $\int \left(5\sqrt{x}\right)dx$

8) $\int \left(\frac{5x^{3}}{3}+\frac{4}{x^{2}}-3\right)dx$

9) $\int \left(\frac{3x^{2}}{5}+2\cdot\sqrt[3]{x^{2}-4}\right)dx$

10) $\int \left(\frac{2}{\sqrt{x}}+4\cdot\sqrt[3]{x}-3\right)dx$

11) $\int \left(\frac{x+1}{x}\right)dx$

12) $\int \left(\frac{2x^{3}+x^{2}-x}{x^{2}}\right)dx$

29) $\int \left(\frac{x}{x^{2}+1}\right)dx$

30) $\int \left(2x\cdot \mathrm{e}^{x^{2}}\right)dx$

31) $\int \left(e^{2x+1}\right)dx$

32) $\int \left(e^{x}\cdot\cos e^{x}\right)dx$

33) $\int 3x^{2}\cdot\text{sen}\left(x^{3}+9\right)dx$

34) $\int \left(\frac{2}{\sqrt{1-\mathrm{x}^{2}}}\right)\mathrm{dx}$

35) $\int \left(\frac{2x}{\sqrt{1-x^{4}}}\right)dx$

36) $\int \text{sen}(7x+8)dx$

37) $\int \left(3x^{2}\cdot\sec^{2}\left(x^{3}+9\right)\right)dx$

38) $\int \left(e^{\text{sen } x}\cdot\cos x\right)dx$

39) $\int (\text{sen}(7x)-18)dx$

40) $\int (\text{sen}(7x)-18)dx$

13) $\int (x+1)^2\, dx$

14) $\int (x^2+x+1)^3 \cdot (2x+1)dx$

15) $\int (\operatorname{sen}^3 x \cdot \cos x)dx$

16) $\int \left(\dfrac{3x^2+1}{x^3+x+1}\right)dx$

17) $\int (\operatorname{tg}^2 x \cdot \sec^2 x)dx$

18) $\int \left(\dfrac{3}{2x}\right)dx$

19) $\int (\cos(2x+3))dx$

20) $\int \left(\dfrac{2x}{(x^2+x+1)^2}\right)dx$

21) $\int \left(\dfrac{1}{3x+5}\right)dx$

22) $\int (e^{-x^2} \cdot x)dx$

23) $\int \left(\dfrac{1}{x \cdot \ln x}\right)dx$

24) $\int (x \cdot \sqrt{1-x^2})dx$

25) $\int \left(\dfrac{2x^2}{6x^3+1}\right)dx$

26) $\int \left(\dfrac{x^3}{1+x^8}\right)dx$

27) $\int \left(\dfrac{e^x}{1+e^{2x}}\right)dx$

28) $\int \left(\dfrac{1}{1+(x+1)^2}\right)dx$

41) $\int (3x^2 \cdot \sec^2(x^3+9))dx$

42) $\int \left(\dfrac{1}{3+3x^2}\right)dx$

43) $\int \left(\dfrac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\right)dx$

44) $\int \left(\dfrac{3x^2+1}{1+(x^3+x+2)}\right)dx$

45) $\int \left(\dfrac{5}{4x^3}+2\sqrt{x}+\dfrac{5}{x}+\sqrt{2}\cdot x\right)dx$

46) $\int (x^2(x^3+2))dx$

47) $\int \left(\dfrac{1}{(2x+1)^2}\right)dx$

48) $\int \left(\dfrac{e^x}{1+e^x}\right)dx$

49) $\int \left(\dfrac{\mathrm{x}^2}{(\mathrm{x}^3+1)^7}\right)\mathrm{dx}$

50) $\int (\sqrt{1+x})dx$

51) $\int \left(\dfrac{x^2}{x^3+1}\right)dx$

52) $\int (e^{-x^2} \cdot x)dx$

53) $\int (2x \cdot \cos(x^2+2))dx$

54) $\int \left(\dfrac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\right)dx$

55) $\int x \cdot \operatorname{sen}(x^2+7)dx$

56) $\int (\sec^2(3x+5))dx$

6.- INTEGRACIÓN DE FUNCIONES RACIONALES

Queremos calcular integrales del tipo

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$$

donde P y Q son funciones polinómicas.

Supondremos que grado $P <$ grado Q, pues si no lo fuese, haríamos la división entera de P y Q, y podríamos escribir:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

con grado $R <$ grado Q.

Caso 1: El polinomio $Q(x)$ tiene sólo raíces reales simples:

Calcula $\int \frac{4}{x^2-1}dx$

1) Descomponemos el denominador, obteniendo sus raíces:

$$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

2) Descomponemos la función $\frac{4}{x^2-1}$ en suma de fracciones que tienen por numerador una constante y por denominador cada uno de los factores:

$$\frac{4}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

3) Determinamos los valores de A y B operando, igualando los numeradores y dando valores a x:

$4 = A(x+1) + B(x-1)$ que para $x = 1$ es $A = 2$ y para $x = -1$ es $B = -2$

4) Integramos:

$$\int \frac{4}{x^2-1}dx = \int \left(\frac{2}{x-1} + \frac{-2}{x+1} \right) dx = 2\ln|x-1| - 2\ln|x+1| + C$$

Caso 2: Que el polinomio $Q(x)$ tenga una raíz real múltiple:

Calcula $\int \frac{4x^2-3x+2}{x^3-3x^2+3x-1}dx$

1) Factorizamos el denominador , obteniendo sus raíces:

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x-1)^3$$

2) Descomponemos $\frac{4x^2-3x+2}{x^3-3x^2+3x-1}$ en suma de tres fracciones que tienen por numerador una constante y por denominador $x-1$ elevado a 1, 2 y 3:

$$\frac{4x^2-3x+2}{x^3-3x^2+3x-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3}$$

3) Determinamos los valores de las constantes A, B y C :

$$4x^2 - 3x + 2 = A(x-1)^2 + B(x-1) + C$$

Para $x=1$ obtenemos $C=3$
Derivando: $8x-3=2A(x-1)+B$ que para $x=1$ resulta $B=5$
Volvemos a derivar: $8=2A \Rightarrow A=4$
4) Integramos:

$$\int \frac{4x^2-3x+2}{x^3-3x^2+3x-1}dx = \int \frac{4}{x-1}dx + \int \frac{5}{(x-1)^2}dx + \int \frac{3}{(x-1)^3}dx =$$
$$= 4\ln|x-1| - \frac{5}{x-1} - \frac{3}{2(x-1)^2} + C$$

<u>Caso 3: Que el polinomio $Q(x)$ tenga raíces reales simples y múltiples:</u>

Se trata de combinar lo visto en los casos 1 y 2.

<u>Caso 4: Que el polinomio $Q(x)$ tenga raíces complejas conjugadas:</u>

Calcula $\int \frac{2x+1}{x^3+2x^2+5x}dx$

1) Factorizamos el denominador, obteniendo sus raíces:
$$x^3+2x^2+5x = x(x^2+2x+5)$$
2) Descomponemos la fracción en suma de dos fracciones. La primera con numerador A y denominador x, y la segunda con numerador $Mx+N$ y denominador el polinomio irreducible (en $\mathbb{R}$) x^2+2x+5:
$$\frac{2x+1}{x(x^2+2x+5)} = \frac{A}{x} + \frac{Mx+N}{x^2+2x+5}$$
3) Determinamos las constantes A, M y N:
$$2x+1 = A(x^2+2x+5) + (Mx+N)x \Rightarrow A=\frac{1}{5},\ M=-\frac{1}{5},\ N=\frac{8}{5}$$
4) Integramos:
$$\int \frac{2x+1}{x^3+2x^2+5x}dx = \int \frac{\frac{1}{5}}{x}dx + \int \frac{-\frac{1}{5}x+\frac{8}{5}}{x^2+2x+5}dx =$$
$$= \frac{1}{5}\ln|x| - \frac{1}{5}\int \frac{x-8}{x^2+2x+5}dx = \frac{1}{5}\ln|x| - \frac{1}{10}\ln|x^2+2x+5| - \frac{9}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{2}\right) + C$$

<u>Ejercicio8.</u> *Calcular las siguientes integrales de funciones racionales:*

1) $\int \frac{2xdx}{(x+2)(x-3)}$
2) $\int \frac{5xdx}{x^2-6x+5}$
3) $\int \frac{2x+3}{x^4-4x^3+13x^2}dx$
7) $\int \frac{3dx}{x^2(x-1)^2}$
8) $\int \frac{-2xdx}{x^3+x^2+x}$
9) $\int \frac{2dx}{3x^2-27}$

4) $\int \frac{x^4+5x+6}{3(x-1)^2(x+3)}dx$

5) $\int \frac{3dx}{x^3+4x}$

6) $\int \frac{-3x^2dx}{(x-1)^4}$

10) $\int \frac{-2x+1}{(x^2+1)(x^2+4)}dx$

11) $\int \frac{1}{(x-2)^5}dx$

12) $\int \frac{x+1}{3x^2+6x}dx$

7.- INTEGRACIÓN DE FUNCIONES CIRCULARES

Para calcular la primitiva $\int \mathrm{sen}^m x \cos^n x dx$, siendo n ó m impar, hacemos el cambio $\mathrm{sen}\, x = t$ ó $\cos x = t$, respectivamente.

Para calcular la primitiva $\int \mathrm{sen}^m x \cos^n x dx$, siendo n ó m pares, la transformamos, utilizando las siguientes fórmulas, en otras más sencillas:

$$\mathrm{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$$

$$\mathrm{sen}\, x \cos x = \frac{1}{2}\mathrm{sen}\ 2x$$

Cambio $t = \mathrm{tg}\frac{x}{2}$. Se trata de un cambio muy útil para resolver integrales circulares. A partir de él se obtienen las siguientes relaciones:

$$\mathrm{sen}\, x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Ejercicio9. *Calcula:*

1) $\int \mathrm{sen}\, x \cos^2 x dx$

2) $\int \mathrm{sen}^3 x \cos^3 x dx$

3) $\int \cos^2 x\ \mathrm{sen}^2 x dx$

4) $\int 4\mathrm{sen}\, x \cos^4 x dx$

4) $\int 3\cos^2 x\ \mathrm{sen}^4 x dx$

6) $\int \mathrm{sen}\, x \cos x dx$

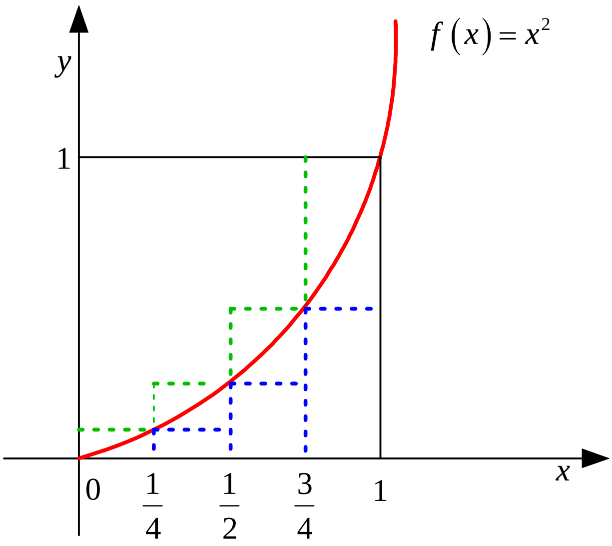
8.- INTEGRAL DEFINIDA

El problema geométrico de la determinación del área de ciertas superficies planas es el origen y la base del Cálculo Integral. Se atribuye a Eudoxo (ca. 370 A.C.) la invención del método de *exhaución*, una técnica para calcular el área de una región aproximando la por una sucesión de polígonos de forma que en cada paso se mejora la aproximación anterior. Arquímedes (287-212 A.C.) perfeccionó este método y, entre otros resultados, calculó el área de un segmento de parábola y el volumen de un segmento de paraboloide, así como el área y el volumen de una esfera.

Históricamente, el cálculo del área determinada por un segmento parabólico condujo a

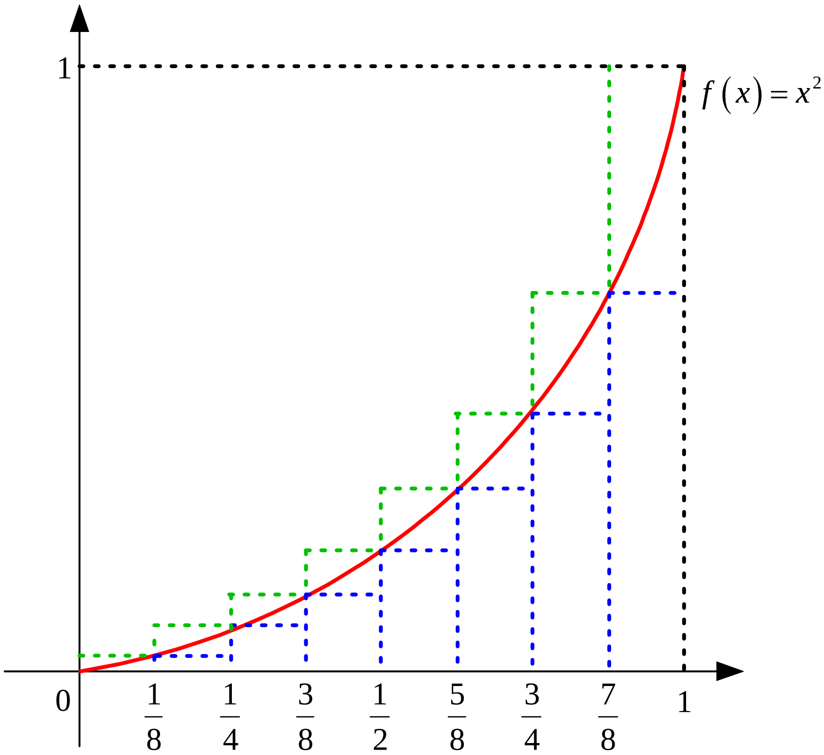
Las ideas expuestas por Arquímedes (en carta a Dositeo) son fundamentalmente las siguientes:

Se desea medir el área encerrada por el siguiente segmento parabólico (entre 0 y 1), que representaremos por *S*:



$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\frac{9}{16} < S < \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}1^2$$

$$\frac{7}{32} < S < \frac{15}{32} \Leftrightarrow 0.22 < S < 0.47$$



$$\frac{1}{8}0^2 + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{8}\right)^2 + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{8}\left(\frac{3}{8}\right)^2 + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{8}\left(\frac{5}{8}\right)^2 + \frac{1}{8}\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{8}\left(\frac{7}{8}\right)^2 < S <$$

$$< \frac{1}{8}\left(\frac{1}{8}\right)^2 + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{8}\left(\frac{3}{8}\right)^2 + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{8}\left(\frac{5}{8}\right)^2 + \frac{1}{8}\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{8}\left(\frac{7}{8}\right)^2 + \frac{1}{8}1^2$$

$$\frac{35}{128} < S < \frac{51}{128} \Leftrightarrow 0.27 < S < 0.40$$

Haciendo cada vez rectángulos de base más pequeña y aplicando la fórmula para sumar los primeros *n* cuadrados[1], se tiene que:

$$\frac{1}{n}\left(\frac{n(n-1)\frac{2n-1}{6}}{n^2}\right) < S < \frac{1}{n}\left(\frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{n^2}\right)$$

$$\frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3} < S < \frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3} \le S \le \lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3}$$

$$\frac{1}{3} \le S \le \frac{1}{3} \Rightarrow S = \frac{1}{3}$$

Como consecuencia de lo anterior, podemos dar la siguiente definición:

Representaremos por $\int_a^b f(t)dt$ el área del recinto limitado por la función $y = f(t)$ y las rectas verticales $t = a$ y $t = b$. Se lee **integral definida de *f* (*t*) entre *a* y *b*.**

Si dejamos *a* fijo y hacemos que *b* sea variable, la expresión $\int_a^x f(t)dt$ para un *x* dado representa el área limitada por la función, la recta vertical $t = a$ y la vertical que pasa por *x*. Es por tanto, una función de *x* que llamaremos **función área**.

- **Propiedades inmediatas:**

  (1) $\int_a^a f(x)dx = 0$

  (2) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

  (3) $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

  (4) $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$

Teorema del Valor Medio

Si $f(x)$ es una función continua en un intervalo cerrado $[a,b]$, entonces, existe un punto $c \in]a,b[$ tal que

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$

[1] La fórmula para sumar los *n* primeros cuadrados es: $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Teorema Fundamental del Cálculo

Si $f(x)$ es continua y $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$, entonces $F'(x)=f(x)$

Demostración:

$$F'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\int_a^{x_0+h} f(t)\,dt-\int_a^x f(t)\,dt}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt}{h}=f(x_0) \qquad \forall x_0\in D$$

pues si $h\to 0$ la altura tiende a ser $f(x_0)$. C.Q.D.

Regla de BARROW

Si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, entonces $\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$

Demostración:

Si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ se verifica que

$$F'(x)=\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt=f(x)$$

Supongamos que $G(x)$ es otra primitiva de $f(x)$. Entonces:

$$F(x)=G(x)+k$$

Vamos a determinar k:

$$\left.\begin{array}{l}F(a)=0\\ F(a)=G(a)+k\end{array}\right\}\Rightarrow G(a)+k=0\Rightarrow k=-G(a)$$

Por otro lado

$$F(b)=\int_a^b f(t)\,dt$$

luego

$$F(b)=G(b)+k=G(b)-G(a)$$

de donde se deduce que

$$\int_a^b f(t)\,dt=G(b)-G(a) \qquad \text{C.Q.D.}$$

Ejercicio10. Halla las siguientes integrales definidas:

1) $\int_1^2 \frac{2x+2}{x^2+2x}dx$

2) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \text{sen}\, x\, dx$

3) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \text{sen}\, x \cos^2 x dx$

4) $\int_0^5 \frac{1}{x^2+4x+4}dx$

8) $\int_{-2}^{3}(x+1)^2\, dx$

9) $\int_{-1}^{5}(x+1)^3 2x\, dx$

10) $\int_e^{2e}\frac{1}{\text{x}}dx$

11) $\int_0^{\pi}\cos\frac{x}{2}\, dx$

5) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx$

6) $\int_1^e x^{-1} \, dx$

7) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \operatorname{cotg} x \, dx$

12) $\int_0^3 (3x+2)^2 \, \mathrm{x} \, dx$

13) $\int_1^e \frac{(\ln x+2)^2}{x} dx$

14) $\int_e^{2e} x^4 \ln x dx$

<u>*Ejercicio11.*</u> *Calcula* $\int_1^3 f(x)dx$ *si* $f(x)=\begin{cases} x & \text{si } x<3 \\ -2x+3 & \text{si } x\geq 3 \end{cases}$.

<u>*Ejercicio12.*</u> *Halla* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$ *siendo* $f(x)=\begin{cases} \cos x & \text{si } x<\frac{\pi}{4} \\ \operatorname{sen} x & \text{si } x\geq \frac{\pi}{4} \end{cases}$.

<u>*Ejercicio13.*</u> *Determina la siguiente integral definida:* $\int_{-4}^2 |x^2-4| dx$

<u>*Ejercicio14.*</u> *Halla* $\int_{-2}^2 f(x)dx$ *siendo* $f(x)=\begin{cases} -x+1 & \text{si } x<0 \\ x^2+1 & \text{si } 0\leq x\leq 2 \\ 2x+1 & \text{si } 2<x \end{cases}$

<u>**APLICACIÓN: Problemas de valores iniciales**</u>

La integral definida nos permite hallar una función $f(x)$ conocida su derivada $f'(x)$, pues

$$f(x)=\int f'(x)dx = F(x)+c$$

Pero $f(x)$ queda indefinida, pues la constante c es desconocida. Para determinar c es necesario dar un dato adicional; por ejemplo el punto $(a, f(a))$ de la función. A este dato se le llama valor inicial. Por lo dicho, de $f(a)=F(a)+c$ se obtiene que

$$c=f(a)-F(a).$$

<u>9.- APLICACIÓN: CÁLCULO DE ÁREAS</u>

Recinto Limitado por la curva *y = f (x)*, el eje OX y las rectas x = a y x = b

a) Si $f(x)\geq 0$ en todo el intervalo [a, b]

$$\boxed{S=\int_a^b f(x)dx}$$

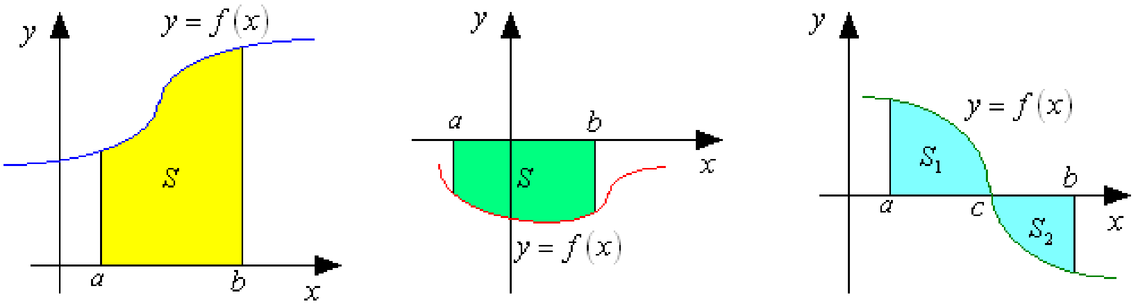
b) Si $f(x)\leq 0$ en todo el intervalo [a, b]

$$\boxed{S=-\int_a^b f(x)dx=\int_b^a f(x)dx}$$

c) Si $f(x)$ corta al eje OX en el punto $c \in [a, b]$

$$\boxed{S = S_1 + S_2 = \int_a^c f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx}$$

El punto c se halla resolviendo la ecuación $f(x) = 0$.



(a) (b) (c)

Recinto limitado por dos curvas, *y = f (x)* e *y = g (x)*, en el intervalo [a, b]

a) Si $f(x) > g(x)$ en todo $[a, b]$

$$\boxed{S = \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right)dx}$$

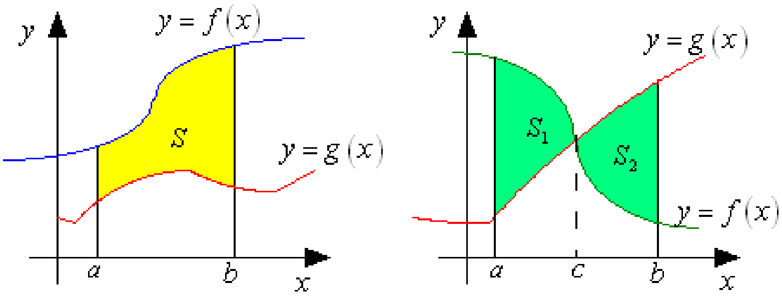
b) Si $f(x)$ y $g(x)$ se cortan en el intervalo $[a, b]$ cuando $x = c$

$$\boxed{S = S_1 + S_2 = \int_a^c \left(f(x) - g(x)\right)dx + \int_c^b \left(g(x) - f(x)\right)dx}$$

El valor c del punto de corte se halla resolviendo el sistema

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$$

También hay que determinar qué función está por encima en cada trozo.



<u>Ejercicio15.</u> Determina el área de la región limitada por las curvas $y = x^2, y = x^{\frac{1}{3}}$ *y las rectas* $x = -1$ *y* $x = 1$.

<u>Ejercicio16.</u> Busca el área comprendida entre las rectas de ecuaciones $x = -3, x = 1, y = 0$ *y la gráfica de la función* $y = x^4 + 8x^3 + 22x^2 + 24x + 9$.

Ejercicio17. *Calcula el área de la región comprendida entre las funciones* $y=3\sqrt{x}$, $y=2\sqrt{x+1}$ *en el primero y segundo cuadrantes.*

Ejercicio18. *Halla, mediante técnicas de integración, el área del recinto limitado por* $y=2x-3$ *e* $y=-x+6$ *y comprendido entre las abscisas* $x=2, x=4$ *y la ordenada* $y=0$.

Ejercicio19. *Determina el área de la región limitada por las funciones* $f(x)=\operatorname{sen} x$ y $f(x)=\cos x$ *en el intervalo* $[0,\pi]$.

Ejercicio20. *Calcula el área de la región limitada por la función* $f(x)=x^2-4x+3$, *las rectas* $x=1$, $x=3$ *y el eje X.*

Ejercicio21. *Representa la región limitada por las gráficas de las funciones* $f(x)=4-x^2$ y $g(x)=x+2$ *y halla su área.*

Ejercicio22. *Determina el área comprendida entre las gráficas de las curvas* $y=x^4+1$ *e* $y=-x^2+3$.

Ejercicio23. *Calcula el área limitada por la gráfica de la función* $y=\cos x$ *entre* $x=0, x=2\pi$ *y el eje X. Realiza un esbozo del gráfico.*

Ejercicio24. *Determina el valor de* a *sabiendo que el área comprendida entre la parábola* $y=x^2+ax$ *y la recta* $y+x=0$ *es 36.*

Ejercicio25. *Representa gráficamente la región limitada por las funciones* $y=x^2$ *e* $y=2-x^2$ *y obtén su área.*

Ejercicio26. *Halla el área del recinto limitado por* $y=x^2+3$ e $y=x+5$.

Ejercicio27. *Calcula el área determinada por la gráfica de la curva* $y=x^2+ax+b$ *y las rectas* $x=-\frac{1}{2}$ *e* $y=1$ *sabiendo que la función tiene un mínimo en* $\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$.

Ejercicio28. *Halla el área comprendida entre las gráficas de las funciones* $f(x)=2e^{2x}$, $g(x)=2e^{-2x}$ *y las rectas* $x=-1$ y $x=1$.

Ejercicio29. *Determina el área del recinto limitado por la parábola* $y=2x-x^2$ *y la recta* $y+x=0$.

Ejercicio30. *Halla el área de la figura comprendida entre la hipérbola* $xy=1$, *las rectas* $x=a$ $(a>0)$, $x=3a$ *y el eje X.*

Ejercicio31. *Se considera la función* $f(x) = ax + b + \frac{8}{x}$. *Calcula* a y b *para que la gráfica de* f *pase por el punto* $(-2,-6)$ *y admita en dicho punto una tangente horizontal.*
Calcula también el área limitada por la gráfica de f *y las rectas* $x = 1, x = 2$ e $y = 0$.

Ejercicio32. *Halla el peso de una plancha de cobre de un centímetro de espesor limitada por la función* $y = \operatorname{sen} x$ *y la recta* $y = \frac{2x}{\pi}$, *donde* x e y *se miden en metros, sabiendo que cada centímetro cúbico de plancha pesa 8.92 gramos. Expresa el resultado en kilogramos.*