INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO DE DERIVADAS. APLICACIONES

CONTENIDOS

1.- INTRODUCCIÓN

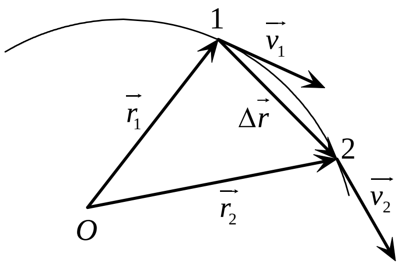
Los orígenes del Cálculo estuvieron motivados por el deseo de resolver diversos problemas vinculados al movimiento de los cuerpos, así como problemas de tipo geométrico de importancia en Óptica y problemas de cálculo de valores máximos y mínimos de una función dada.

En el siglo XVII Newton y Leibniz descubren independientemente el A*nálisis Matemático* o *Cálculo Infinitesimal,* una potentísima herramienta que revolucionó el tratamiento matemático de la Física y la Geometría, y que más tarde impregnaría las más diversas ramas de la matemática, como la Estadística o la Teoría de Números.

Esencialmente, el Cálculo Infinitesimal consistía por una parte en *analizar* o descomponer la dependencia entre varias magnitudes estudiando el comportamiento de unas al variar o *diferenciar* levemente otras (lo que constituía el C*álculo Diferencial)* y por otra parte en *integrar* los resultados diferenciales para obtener de nuevo resultados globales sobre las magnitudes en consideración (el llamado *Cálculo Integral*).

2.- EJEMPLO

En el estudio del movimiento de un punto nos interesa saber en cada instante dónde está y cómo se mueve. El primer objetivo nos lo proporciona el conocimiento de la variación temporal del vector de posición, y para saber cómo se mueve, es decir, qué va a pasar con el punto móvil en instantes sucesivos, se introduce en Física una nueva magnitud llamada velocidad.



Supongamos que cierto punto P se traslada en un intervalo de tiempo $\Delta t = t_2 - t_1$ desde el punto 1 hasta el punto 2, caracterizados respectivamente por los vectores de posición $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$.

Se define la velocidad media $\vec{v}_m$ en el intervalo de tiempo Δt como:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

La dirección de la velocidad media coincide con $\Delta\vec{r}$, es decir, queda determinada por la cuerda que une los extremos del tramo de trayectoria correspondiente y su sentido es el del movimiento.

La velocidad instantánea, $\vec{v}$, se define como

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

es decir, como la rapidez de cambio del vector de posición respecto a *t*.

Este vector es tangente a la trayectoria y su sentido es el del movimiento.

3.- TASA DE VARIACIÓN

Muchas leyes de la Física, la Química, la Biología o la Economía, son funciones que relacionan una variable “dependiente” *y* con otra variable “independiente” *x*, lo que suele escribirse en la forma $y = f(x)$. Si la variable independiente cambia de un valor inicial *a* a otro *x*, la variable *y* lo hace de $f(a)$ a $f(x)$. La *razón de cambio promedio (o tasa de variación media) de* $y = f(x)$ *con respecto a x en el intervalo* $[a,x]$ *es:*

$$\text{Razón de cambio promedio} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \equiv \text{Tvm}[a,x]$$

Con frecuencia interesa considerar la razón de cambio en intervalos cada vez más pequeños. Esto lleva a definir lo que podemos llamar “*razón de cambio puntual* (*o instantánea*) de $y = f(x)$ *con respecto a x en el punto a” como:*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \equiv \text{Tvi}(a)$$

<u>Ejemplo 1.</u> La tasa de variación media de la función $f(x) = x^2 - 2x$ en los intervalos $[-2,-1]$ y $[1,3]$ vale:

$$Tvm[-2,-1] = \frac{f(-1)-f(-2)}{-1-(-2)} = -5$$

$$Tvm[1,3] = \frac{f(3)-f(1)}{3-1} = 2$$

Observa que, en el primer caso, la Tvm coincide con la variación de la función de la función, pues nos hemos trasladado sólo una unidad a la derecha. En cambio, en el segundo caso, la Tvm es la media de las variaciones unitarias, que son:

$$Tvm[1,2] = \frac{f(2)-f(1)}{2-1} = 1 \text{ y } Tvm[2,3] = \frac{f(3)-f(2)}{3-2} = 3$$

<u>Ejemplo 2.</u> Entre Jaén y Cádiz hay 360 km por carretera. Si se viaja en automóvil, partiendo de Jaén a las 8 h y llegando a Cádiz a las 12 h, la velocidad media ha sido de 90 km/h. Para calcularla hemos dividido la variación del espacio recorrido (diferencia de distancias) entre la variación del tiempo transcurrido (diferencia de tiempos):

$$Tvm[\text{Jaén, Cádiz}] = \frac{\text{diferencia de distancias}}{\text{diferencia de tiempos}} = \frac{360}{12-8} = 90$$

<u>Ejemplo 3.</u> El índice de precios al consumo (IPC) expresa la variación porcentual de los precios. Esta variación suele darse mensualmente y por años. El IPC de mayo de 2007 fue de 0.3 %. La acumulación de 12 meses seguidos de el IPC interanual, y coincide, aproximadamente, con la tasa de inflaccion del año considerado.

4.- CONCEPTO DE DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO Y DE FUNCIÓN DERIVADA. DERIVADAS LATERALES.

Sea $D \subseteq \mathbb{R}$ un subconjunto de números reales. Llamaremos conjunto de puntos de acumulación[1] de D al conjunto

$$D' = \left\{ x_0 \in \mathbb{R} : \exists E\left(x_0\right) \text{ entorno de } x_0 : \left(E - \left\{x_0\right\}\right) \cap D \neq \varnothing \right\}$$

Si $x_0 \in D'$ diremos que x_0 es un punto de acumulación de D.

Siempre que exista un intervalo abierto de centro a contenido en D se tendrá que $a \in D'$.

Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función real de variable real y $a \in D \cap D'$. Se llama derivada de la función f en el punto a al límite siguiente, si existe y es finito:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f\left(a+h\right) - f\left(a\right)}{h} \qquad [1]$$

Dicho límite, caso de existir, se representa[2] por: $f'\left(a\right) = \dfrac{df\left(a\right)}{dx} = Df\left(a\right) = \dot{f}\left(a\right)$.

Si en la definición anterior hacemos el cambio de variable $a + h = x$, el límite [1] se escribe como sigue:

$$\lim_{x \to a} \frac{f\left(x\right) - f\left(a\right)}{x - a} \qquad [2]$$

Ejercicio 1. Calcula la derivada de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

a) $f\left(x\right) = x^2$ en $a = 1$

b) $f\left(x\right) = 3x^2 - 2x + 1$ en $a = 2$

c) $f\left(x\right) = 3x^2 - 3x + 1$ en $a = 1$

d) $f\left(x\right) = \dfrac{3}{x}$ en $a = 2$

Si $B \subseteq D \cap D'$, diremos que f es derivable en B cuando f sea derivable en todos los puntos de B.

Sea $C = \left\{ a \in D \cap D' : f \text{ es derivable en } a \right\}$. Definimos la función derivada de f por:

$$\begin{aligned} f' &: C \to \mathbb{R} \\ a \in C &\mapsto f'\left(a\right) \end{aligned}$$

[1] El conjunto D' también se llama conjunto derivado.

[2] La notación $\dfrac{d}{dx} f\left(a\right)$ fué introducida por LEIBNIZ (1646-1716), y en ella se entiende que $\dfrac{d}{dx}$ es un operador, y la notación $f'\left(a\right)$ fue introducida por LAGRANGE (1736-1813).

Ejercicio 2. *Calcula la función derivada de* $f(x)=x^2$

Ejercicio 3. *Calcula la función derivada de* $f(x)=x^3-2x+1$ *y como aplicación calcula* $f'(3), f'(-2)$ y $f'(0)$.

Ejercicio 4. *Calcula la función derivada de las funciones siguientes:*

a) $f(x)=2x^3-x^2+3x-1$

b) $f(x)=\dfrac{3}{x}$

Una función $f:D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es

$$\underline{\text{derivable por la izquierda}^3\text{ en } x=a} \Leftrightarrow \exists f'(a-)=\lim_{x\to a-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\in\mathbb{R}$$

$$\underline{\text{derivable por la derecha en } x=a} \Leftrightarrow \exists f'(a+)=\lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\in\mathbb{R}$$

Caracterización:

$$f \text{ derivable en } x=a \Leftrightarrow \exists f'(a-), f'(a+) \text{ y } f'(a-)=f'(a+)$$

Ejercicio 5. *Indica en qué puntos es derivable la siguiente función y halla* $f'(x)$*:*

$$f(x)=\begin{cases} x^2+3x & \text{si } x\le 0 \\ x^3+3x & \text{si } 0<x<2 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x\ge 2 \end{cases}$$

Ejercicio 6. *Halla el valor de* a *para que* $f(x)$ *sea derivable en* $x=1$, *siendo*

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2 & \text{si } x\le 1 \\ ax+1 & \text{si } x>1 \end{cases}$$

Ejercicio 7. *Dada la función*

$$f(x)=\left|1-x^2\right|=\begin{cases} x^2-1 & x<-1 \\ 1-x^2 & -1\le x\le 1 \\ x^2-1 & x>1 \end{cases}$$

Estudiar la continuidad, la derivabilidad y representarla gráficamente.

---

[3] Esta definición es equivalente a la siguiente: Una función $f:D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es

$$\underline{\text{derivable por la izquierda en } x=a} \Leftrightarrow \exists f'(a-)=\lim_{h\to 0-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\in\mathbb{R}$$

$$\underline{\text{derivable por la derecha en } x=a} \Leftrightarrow \exists f'(a+)=\lim_{h\to 0+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\in\mathbb{R}$$

Ejercicio 8. *Consideremos la función* $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & 0<x<b \\ 1-\dfrac{1}{4}x & b\le x \end{cases}$

Se pide:

a) *Determinar el valor de b para que sea continua.*
b) *¿Es derivabe f en el valor de b calculado en el apartado anterior?*

Aunque lo más habitual es que los intervalos donde se estudie la derivabilidad sean abiertos y de hecho es en intervalos abiertos donde se obtienen las mejores propiedades de las funciones derivables, daremos la definición de función derivable en un intervalo cerrado $[a,b]$, que es similar a la que dimos para funciones continuas en un tal intervalo.

Una función $y=f(x)$ es derivable en $[a,b]$ cuando:

- sea derivable en (a,b)
- sea derivable por la derecha en a
- sea derivable por la izquierda en b

5.- PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES DERIVABLES

Propiedad 1: Si una función $f:D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es derivable en un punto x_0, entonces es continua en x_0.

Demostración:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0)+f(x_0)\right)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0)+$$
$$+\lim_{x\to x_0} f(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\lim_{x\to x_0}(x-x_0)+f(x_0)=f'(x_0)\cdot 0+f(x_0)=f(x_0)$$

C.Q.D.

Este resultado también se puede utilizar en sentido negativo:

Si $f(x)$ no es continua en x_0, entonces no puede ser derivable en dicho punto.

En particular, las funciones derivables son continuas, pero no toda función continua es derivable, como muestra el siguiente:

Contraejemplo: La función $f(x)=|x|$ es continua en $x_0=0$ pero no es derivable en dicho punto.

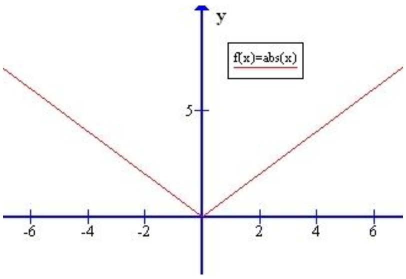
Continuidad en $x_0=0$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0-}|x|=\lim\limits_{x\to 0-}(-x)=0\\ \lim\limits_{x\to 0+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0+}|x|=\lim\limits_{x\to 0+}x=0\end{array}\right\}\Rightarrow \exists\lim_{x\to 0}|x|=0 \quad \text{y} \quad f(0)=|0|=0,\ \text{luego}\ f(x)\ \text{es}$$

continua en $x_0=0$.

Derivabilidad en $x_0=0$:

$$\left.\begin{array}{l} f'(0-)=\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{-x}{x}=-1 \\ f'(0+)=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{x}{x}=1 \end{array}\right\}\Rightarrow$$ no existe $f'(0)$ y por tanto, $y=|x|$ no es derivable en $x_0=0$. □



Resumiendo:

- *f* es continua en 0
- *f* no es derivable en 0
- La gráfica de *f* no tiene recta tangente en 0

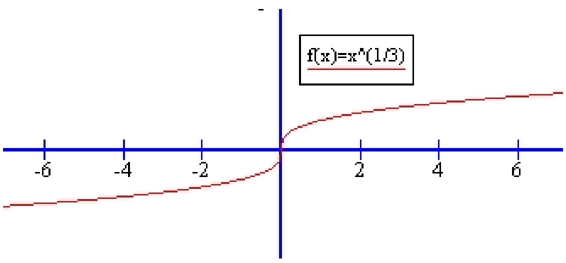
<u>Otro contraejemplo más</u>: La función $y=x^{1/3}$ es continua en $x_0=0$ pero no es derivable en dicho punto.

Continuidad en $x_0=0$:

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} x^{1/3}=0=f(0)$, luego $f(x)$ es continua en $x_0=0$.

Derivabilidad en $x_0=0$:

$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^{1/3}-0}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^{2/3}}=\left[\dfrac{1}{0}\right]=+\infty\Rightarrow\nexists f'(0)$, y por tanto, $y=x^{1/3}$ no es derivable en $x_0=0$.



Resumiendo:

- f es continua en 0
- f no es derivable en 0
- La gráfica de f tiene una recta tangente vertical en 0

<u>Propiedad 2</u>: Si una función $f:D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es derivable en un punto x_0, entonces está acotada[4] en x_0.

<u>Demostración</u>:
Como f es derivable en x_0, entonces por la propiedad 1, f es continua en x_0 y por tanto, tomando $\varepsilon=1$,

[4] Una función $f:D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ está acotada en un punto x_0 sii $\exists M>0:|f(x)|\le M$ $\forall x\in E(x_0)$

$$\exists\delta>0/ \text{ si } x\in\left(x_0-\delta,x_0+\delta\right) \text{ resulta que } f\left(x\right)\in\left(f\left(x_0\right)-\varepsilon, f\left(x_0\right)+\varepsilon\right)=$$
$$=\left(f\left(x_0\right)-1, f\left(x_0\right)+1\right)$$

y así $\left(f\left(x_0\right)-1, f\left(x_0\right)+1\right)$ es un intervalo acotado, es decir, $f\left(x\right)$ está acotada en un entorno $\left(x_0-\delta,x_0+\delta\right)$ de x_0. C.Q.D.

6.- <u>OPERACIONES CON FUNCIONES DERIVABLES</u>

6.1. <u>Suma</u>

La función derivada de una suma de funciones derivables es la suma de las funciones derivadas:

$$\boxed{\left(f+g\right)'\left(x\right)=f'\left(x\right)+g'\left(x\right)}$$

<u>Desmostración</u>:

$$\left(f+g\right)'\left(x_0\right)=\lim_{h\to0}\frac{\left(f+g\right)\left(x_0+h\right)-\left(f+g\right)\left(x_0\right)}{h}=$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f\left(x_0+h\right)+g\left(x_0+h\right)-f\left(x_0\right)-g\left(x_0\right)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0\right)}{h}+$$
$$+\lim_{h\to0}\frac{g\left(x_0+h\right)-g\left(x_0\right)}{h}=f'\left(x_0\right)+g'\left(x_0\right) \quad \text{C.Q.D.}$$

6.2. <u>Producto de una constante por una función</u>

La función derivada del producto de una constante por una función derivable es la constante por la función derivada de la función:

$$\boxed{\left(\alpha f\right)'\left(x\right)=\alpha\cdot f'\left(x\right)}$$

<u>Demostración</u>:

$$\left(\alpha f\right)'\left(x_0\right)=\lim_{h\to0}\frac{\left(\alpha f\right)\left(x_0+h\right)-\left(\alpha f\right)\left(x_0\right)}{h}=$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\alpha f\left(x_0+h\right)-\alpha f\left(x_0\right)}{h}=\alpha\cdot\lim_{h\to0}\frac{f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0\right)}{h}=\alpha\cdot f'\left(x_0\right) \quad \text{C.Q.D.}$$

6.3. <u>Producto de funciones</u>

La función derivada de un producto de funciones derivables es igual a la derivada del primer factor por el segundo sin derivar más el primer factor si derivar por la derivada del segundo factor:

$$\boxed{\left(f\cdot g\right)'\left(x\right)=f'\left(x\right)g\left(x\right)+f\left(x\right)g'\left(x\right)}$$

<u>Demostración</u>:

$$\left(fg\right)'\left(x_0\right)=\lim_{h\to0}\frac{\left(fg\right)\left(x_0+h\right)-\left(fg\right)\left(x_0\right)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f\left(x_0+h\right)g\left(x_0+h\right)-f\left(x_0\right)g\left(x_0\right)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0+h)+f(x_0)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\lim_{h\to 0}g(x_0+h)+\lim_{h\to 0}\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}\lim_{h\to 0}f(x_0)=$$

$$=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0) \qquad \text{C.Q.D.}$$

6.4. Función recíproca de una función

La derivada de la función recíproca de una función derivable viene dada por:

$$\boxed{\left(\frac{1}{f}\right)'(x)=\frac{-f'(x)}{f(x)^2}}$$

Demostración:

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{\left(\frac{1}{f}\right)(x_0+h)-\left(\frac{1}{f}\right)(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{f(x_0+h)}-\frac{1}{f(x_0)}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x_0)-f(x_0+h)}{f(x_0+h)f(x_0)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0)-f(x_0+h)}{h\big(f(x_0)f(x_0+h)\big)}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-\big(f(x_0+h)-f(x_0)\big)}{h}\frac{1}{f(x_0+h)f(x_0)}=-f'(x_0)\frac{1}{f(x_0)f(x_0)}=\frac{-f'(x_0)}{f(x_0)^2}$$

C.Q.D.

6.5. Cociente de dos funciones

La función derivada de un cociente de funciones derivables es igual al cociente de la derivada del numerador por el denominador sin derivar menos el numerador sin derivar por la derivada del denominador, entre el denominador al cuadrado:

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}}$$

Demostración:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\left(f\,\frac{1}{g}\right)'(x_0)=f'(x_0)\frac{1}{g}(x_0)+f(x_0)\frac{-g(x_0)}{g(x_0)^2}=\frac{f'(x_0)}{g(x_0)}-\frac{f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}=$$

$$=\frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2} \qquad \text{C.Q.D.}$$

6.6. Composición de funciones: Regla de la cadena

Sean $f:A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $g:B\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funciones reales de variable real con $f(A)\subseteq B$, y $a\in A\cap A'$. Supongamos que f es derivable en a y que g es derivable en $b=f(a)$. Entonces:

$$\boxed{(g \circ f)'(a) = g'(f(a))\, f'(a)}$$

Aplicando la regla de la cadena obtenemos la siguiente:

<u>Demostración</u>:

Sea $h = g \circ f$. Hay que probar que $\lim_{x \to a} \frac{h(x) - h(a)}{x - a} = g'(b)\, f'(a)$.

Por hipótesis,

$$\lim_{y \to b} \frac{g(y) - g(b)}{y - b} \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = g'(b)\, f'(a)$$

La idea es hacer en esta igualdad la sustitución $y = f(x)$. Definimos

$$\varphi : B \to \mathbb{R}$$

$$\varphi(y) = \begin{cases} \dfrac{g(y) - g(b)}{y - b} & y \neq b \\ g'(b) & y = b \end{cases}$$

que es una función continua.

Se tiene que $\forall x \in A$ con $x \neq a$ $\quad \frac{h(x) - h(a)}{x - a} = \varphi(f(x)) \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad [1]$

y como f es continua en a y φ es continua en $b = f(a)$, se sigue que $\varphi \circ f$ es continua en a, por lo que

$$\lim_{x \to a} \varphi(f(x)) = \varphi(f(a)) = \varphi(b) = g'(b)$$

La igualdad [1] nos dice ahora que

$$\lim_{x \to a} \frac{h(x) - h(a)}{x - a} = g'(b)\, f'(a) \qquad \text{C.Q.D.}$$

6.7. <u>Derivación de la función inversa</u>

Sea $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable en el intervalo I con $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in I$. Entonces:

i) f es una biyección de I sobre el intervalo $J = f(I)$

ii) $f^{-1} : J \to \mathbb{R}$ es derivable en J con

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)} \qquad \forall y \in J$$

<u>Demostración</u>:

Demostremos ii): Teniendo en cuenta que $\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = x \quad \forall x \in I$ y aplicando la regla de la cadena:

$$\left(f^{-1} \circ f\right)'(x) = \left(f^{-1}\right)'(f(x))\, f'(x) = 1 \Rightarrow \left(f^{-1}\right)'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

que se puede escribir en la forma

$$f'(x) = \frac{1}{\left(f^{-1}\right)'(f(x))} \qquad \text{C.Q.D.}$$

7. FUNCIÓN DERIVADA DE LAS FUNCIONES MÁS USUALES

A modo de ejemplo calcularemos las funciones derivadas de algunas funciones elementales. A la vez que practicamos el cálculo de derivadas aplicando la definición, también nos sirve para construir la conocida tabla de derivadas y que esta no aparezca como por arte de magia.

1) La función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=c,$ es derivable en cualquier punto $a\in\mathbb{R}.$ Su derivada viene dada por:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{c-c}{x-a}=0$$

2) La función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x,$ es derivable en cualquier punto $a\in\mathbb{R}$ y su derivada es:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x-a}{x-a}=1$$

3) La función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^n,$ es derivable en cualquier punto $a\in\mathbb{R}.$ Para calcular su función derivada utilizaremos la fórmula del binomio de NEWTON:

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^n-a^n}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{\binom{n}{0}a^n h^0}+\binom{n}{1}a^{n-1}h+\binom{n}{2}a^{n-2}h^2+\ldots+\binom{n}{n-1}ah^{n-1}+\binom{n}{n}a^0h^n-\cancel{a^n}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{na^{n-1}h+\binom{n}{2}a^{n-2}h^2+\ldots+\binom{n}{n-1}ah^{n-1}+\binom{n}{n}ah^n}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}\left[na^{n-1}+\binom{n}{2}a^{n-2}h+\ldots+\binom{n}{n-1}ah^{n-2}+\binom{n}{n}ah^{n-1}\right]}{\cancel{h}}=na^{n-1}$$

4) La función $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{x},$ es derivable en cualquier $a\in(0,+\infty)$. Su derivada es:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)}{(x-a)\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{a}\right)^2}{(x-a)\left(\sqrt{x}-\sqrt{a}\right)}=\lim_{x\to a}\frac{\cancel{(x-a)}}{\cancel{(x-a)}\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)}=\lim_{x\to a}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}=\frac{1}{2\sqrt{a}}$$

5) La función exponencial $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=e^x,$ es derivable en cualquier $a\in\mathbb{R}$.

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{a+h}-e^{a}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{a}\left(e^{h}-1\right)}{h}=e^{a}$$

teniendo en cuenta que

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^{h}-1}{h}=1$$

6) La función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\operatorname{sen} x,$ es derivable en cualquier $a\in\mathbb{R}$.

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(a+h)-\operatorname{sen} a}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2\cos\left(a+\frac{h}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{h}{2}}{h}=\cos a$$

donde hemos tenido en cuenta que $\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}y=2\cos\frac{x+y}{2}\operatorname{sen}\frac{x-y}{2}$ y que

$$\lim_{h\to 0}\frac{sen\, h/2}{h/2}=1$$

7) La función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\cos x,$ es derivable en cualquier $a\in\mathbb{R}$. Su función derivada se puede obtener teniendo en cuenta que $\cos x=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\quad\forall x\in\mathbb{R}$ y aplicando la regla de la cadena:

$$f'(a)=-\cos a$$

8) La función $\begin{aligned}\operatorname{tg}:\mathbb{R}-\left\{k\pi+\frac{\pi}{2}:k\in\mathbb{Z}\right\}&\to\mathbb{R}\\ x&\mapsto\operatorname{tg}x\end{aligned}$ es derivable en cualquier punto de su dominio y su derivada viene dada por:

$$\operatorname{tg}'x=\left(\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}\right)'(x)=\frac{\cos x\cos x-\operatorname{sen}x(-\operatorname{sen}x)}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\operatorname{tg}^2x=\sec^2 x$$

9) La función $\begin{aligned}\log_a:(0,+\infty)&\to\mathbb{R}\\ x&\mapsto\log_a x\end{aligned}$ es derivable en cualquier $x_0\in(0,+\infty)$. Su función derivada viene dada por:

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x_0+h)-\log_a x_0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\log_a\frac{x_0+h}{x_0}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\log_a\left(1+\frac{h}{x_0}\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\frac{x_0}{x_0}\log_a\left(1+\frac{h}{x_0}\right)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{x_0}\log_a\left(1+\frac{h}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{h}}=$$

$$= \frac{1}{x_0}\log_a\left(\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{h}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{h}}\right) = \frac{1}{x_0}\log_a\left(\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{1}{\frac{x_0}{h}}\right)^{\frac{x_0}{h}}\right) = \frac{1}{x_0}\log_a e$$

En particular la función $\begin{array}{c}\log_e : (0,+\infty) \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \log_e x \equiv \ln x\end{array}$ es derivable en cualquier $x_0 \in (0,+\infty)$, y su derivada viene dada por: $\ln' x = \frac{1}{x}$

Tabla de derivadas

Función	**Derivada**	**Función**	**Derivada**
$y = c$ con $c \in \mathbb{R}$	$y' = 0$	$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$
$y = x$	$y' = 1$	$y = \text{sen } x$	$y' = \cos x$
$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$	$y = \cos x$	$y = -\text{sen } x$
$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$y = \text{tg } x$	$y' = 1 + \text{tg}^2 x$
$y = \sqrt[n]{x}$	$y' = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$y = \text{arcsen } x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = a^x$ con $a > 0$	$y' = a^x \ln a$	$y = \arccos x$	$y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = e^x$	$y' = e^x$	$y = \text{arctg } x$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$
$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x}\log_a e$		

<u>Ejercicio 9.</u> *Calcula la derivada de las siguientes funciones:*

1) $f(x) = 7x^5 - 2x^3 + 3x^2 - 4$
2) $f(x) = 5x^4 + 3x^2 + 2x - 7$
3) $f(x) = (3x-1)(5x^2 + 3x - 2)$
4) $f(x) = \frac{4x^2+1}{7x+1}$
5) $f(x) = x - \frac{1}{x} + \sqrt[3]{x}$
6) $f(x) = (x - \sqrt{x})(x + \sqrt{x})$
17) $f(x) = \text{tg } x \,\text{sen } x$
18) $f(x) = \cos x \,\text{tg } x$
19) $f(x) = e^x \,\text{tg } x$
20) $f(x) = 2^x \ln x$
21) $f(x) = e^x \log_{10} x$
22) $f(x) = \log_5 x \cos x$

7) $f(x)=\dfrac{(3x-1)(2x+3)}{x^2+7}$

8) $f(x)=(5x^2-3x+1)\dfrac{2x}{5x+3}$

9) $f(x)=\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt[5]{x^3}+\sqrt{x^5}$

10) $f(x)=\dfrac{(3x-1)^2-(3x+1)^2}{2-x^2}$

11) $f(x)=\dfrac{1}{3x^2-5x+2}$

12) $f(x)=\dfrac{1}{5x-3}(3x^2-x+2)$

13) $f(x)=(x^2+3x)\operatorname{sen} x$

14) $f(x)=3^x$

15) $f(x)=\dfrac{x\operatorname{tg} x}{x+1}$

16) $f(x)=5^x$

23) $f(x)=\dfrac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x}$

24) $f(x)=\dfrac{2^x}{\ln x}$

25) $f(x)=\dfrac{x^2}{\ln x}$

26) $f(x)=\operatorname{sen} x\cos x$

27) $f(x)=\operatorname{sen} x+e^x\operatorname{sen} x$

28) $f(x)=\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x+\cos x}$

29) $f(x)=\dfrac{3^x\operatorname{sen} x}{2x+e^x}$

30) $f(x)=\log_5 x\log_7 x$

31) $f(x)=e^x\operatorname{sen} x$

32) $f(x)=\dfrac{(x^2-3x+2)\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{tg} x}$

Aplicando la regla de la cadena, obtenemos la siguiente tabla de derivadas para funciones compuestas:

Tabla de derivadas, para funciones compuestas:

Función	Derivada	Función	Derivada
$y=f(x)^n$	$y'=nf(x)^{n-1}f'(x)$	$y=\operatorname{sen} f(x)$	$y'=f'(x)\cos f(x)$
$y=\sqrt{f(x)}$	$y'=\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$	$y=\cos f(x)$	$y=-f'(x)\operatorname{sen} f(x)$
$y=\sqrt[n]{f(x)}$	$y'=\dfrac{f'(x)}{n\cdot\sqrt[n]{f(x)^{n-1}}}$	$y=\operatorname{tg} f(x)$	$y'=f'(x)[1+\operatorname{tg}^2 f(x)]$
$y=a^{f(x)}$ con $a>0$	$y'=f'(x)a^{f(x)}\ln a$	$y=\operatorname{arcsen} f(x)$	$y'=\dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}$
$y=e^{f(x)}$	$y'=f'(x)e^{f(x)}$	$y=\arccos f(x)$	$y'=\dfrac{-f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}$
$y=\log_a f(x)$	$y'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}\log_a e$	$y=\operatorname{arctg} f(x)$	$y'=\dfrac{f'(x)}{1+f(x)^2}$
$y=\ln f(x)$	$y'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$		

Ejercicio 10. *Calcula la derivada de las siguientes funciones:*

1) $f(x)=\text{sen}\left(2x^2-3x\right)$
2) $f(x)=\ln(3x+1)$
3) $f(x)=e^{5x}$
4) $f(x)=\text{tg}\,(2-3x)$
5) $f(x)=\left(x^2-5x+2\right)^7$
6) $f(x)=e^{\text{sen}\,x}$
7) $f(x)=3^{1+\text{sen}\,x+\cos x}$
8) $f(x)=\log_7(4+\text{sen}\,x)$
9) $f(x)=\text{sen}^2 x$
10) $f(x)=\text{tg}^3 x$
11) $f(x)=3^{x^2+2}\,\text{sen}\,x$
12) $f(x)=\left(3x^2-2\right)\text{sen}\,(5x)$
13) $f(x)=\left(x^2+1\right)^5$
14) $f(x)=\text{sen}^3 x$
15) $f(x)=\text{sen}\left(x^3\right)$
16) $f(x)=\text{sen}^2 x\cos^2 x$
17) $f(x)=\dfrac{\text{sen}\,(5x+2)}{\cos(3x-1)}$
18) $f(x)=e^{\text{sen}\,x}\cos x$
19) $f(x)=\log_5(3x+1)$
20) $f(x)=\ln(\text{tg}\,x)$
21) $f(x)=\text{sen}\,(\cos(3x))$
22) $f(x)=\sqrt{5x^2-3x+2}$
23) $f(x)=\sqrt[3]{\left(3-2x^2\right)^2}$
24) $f(x)=\sqrt[4]{x^2-3x+1}$

Ejemplos: de aplicación de la fórmula de derivación de la función inversa

- Calcular la derivada de la función $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\ln x$ en un punto $a\in(0,+\infty)$:

  Consideramos la función $f^{-1}(x)=e^x$. Teniendo en cuenta la fórmula de derivación de la función inversa:

$$f'(a)=\frac{1}{\left(f^{-1}\right)'\left(f(a)\right)}=\frac{1}{e^{f(a)}}=\frac{1}{e^{\ln a}}=\frac{1}{a}$$

- Calcular la derivada de la función $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\arccos x$ en un punto $a\in(-1,1)$:

  Consideramos la función $f^{-1}(x)=\text{sen}\,x$. Teniendo en cuenta la fórmula de derivación de la función inversa:

$$f'(a)=\frac{1}{\left(f^{-1}\right)'\left(f(a)\right)}=\frac{1}{\cos^2 f(a)}=\frac{1}{\sqrt{1-\text{sen}^2 f(a)}}=\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}$$

Ejercicio 11. *Calcula la función derivada de las funciones trigonométricas inversas (arcoseno y arcotangente) y comprueba los resultados obtenidos con los dados en la tabla anterior.*

8. DERIVADA LOGARÍTMICA DE UNA FUNCIÓN

Si $f:D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ es derivable en $a\in D\cap D'$, la función $g:D\to\mathbb{R}$ definida por $g(x)=\ln f(x)$ es derivable en a con

$$\boxed{g'(a)=\frac{f'(a)}{f(a)}}$$

Si $f:D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{+}$ y $g:D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ son derivables en un punto $a\in D\cap D'$, la función $h:D\to\mathbb{R}^{+}$ definida por $h(x)=f(x)^{g(x)}\quad\forall x\in D$ es derivable en a con:

$$\boxed{h'(a)=h(a)\left[g'(a)\ln f(a)+g(a)\frac{f'(a)}{f(a)}\right]}$$

Ejercicio 12. Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x)=x^{x}$

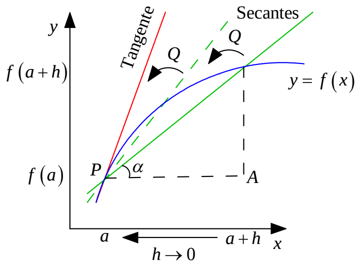
b) $f(x)=x^{5x^2-2}$

c) $f(x)=\operatorname{tg} x^{x}$

d) $f(x)=\sqrt[x]{1+x}$

El uso de la derivada logarítmica es indispensable para derivar funciones potenciales-exponenciales, y muy aconsejable para derivar funciones dadas por una expresión algebraica complicada.

9. INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA



Sea $f:D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función continua y $P=(a,f(a))$, $Q=(a+h,f(a+h))$ dos puntos de su gráfica. Geométricamente se tiene que

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\operatorname{tg}\alpha=m_{\text{secantes}}$$

que es el valor que mide la pendiente de la recta secante en los puntos P y Q a la curva.

Tomando límites en la igualdad anterior resulta:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\operatorname{tg}\alpha=\lim_{h\to 0}m_{\text{sec antes}}\Leftrightarrow f'(a)=\operatorname{tg}\alpha=m_{\text{recta tangente}}$$

es decir, *la derivada de una función en un punto es igual a la pendiente de la recta tangente*[5] *a la función en ese punto.*

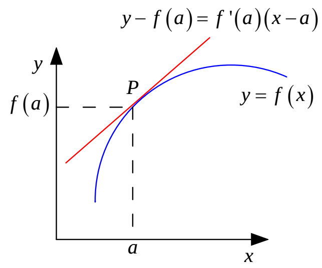
---

[5] Sea f una función continua en x_0. La recta tangente a la gráfica de f en el punto $P(x_0,f(x_0))$ es:

i) la recta que pasa por P y tiene pendiente $m(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ si este límite existe.

ii) la recta $x=x_0$ si $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\infty$

Aclaración: Esta definición proviene del hecho de que la recta tangente a una función en un punto x_0 es el límite de la recta secante a la función, cuando el otro punto de de corte de la recta secante y la función tiende a x_0.



Como <u>consecuencia</u>:

<u>Ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en $(a, f(a))$:</u>

$$\boxed{y - f(a) = f'(a)(x - a)}$$

<u>Ecuación de la recta normal a la curva $y = f(x)$ en $(a, f(a))$:</u>

$$\boxed{y - f(a) = \frac{-1}{f'(a)}(x - a)}$$

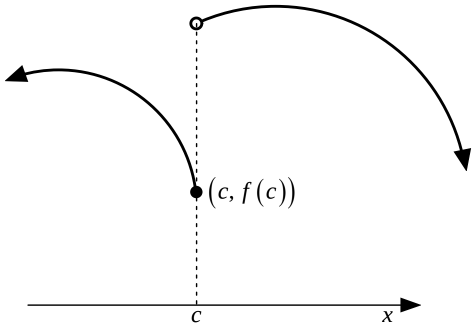
<u>Ejercicio 13.</u> Halla la ecuación de la recta tangente a $f(x) = x^3$ *en el punto de abscisa* $x = -1$.

<u>Ejercicio 14.</u> Calcula las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la función $f(x) = \dfrac{4}{x^2}$ *en el punto de abscisa* $x = 2$.

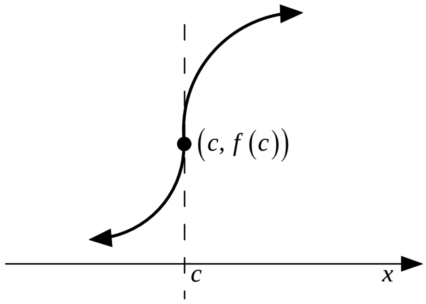
<u>Ejercicio 15.</u> Halla la ecuación de la recta tangente a $f(x) = 2x^3 - x^2$ *en el punto de abscisa* $x = 3$.

<u>Ejercicio 16.</u> Dada $f(x) = x^2 - 10x + 9$, *halla el punto en el que la recta tangente a la gráfica de* f *es paralela al eje de abscisas.*

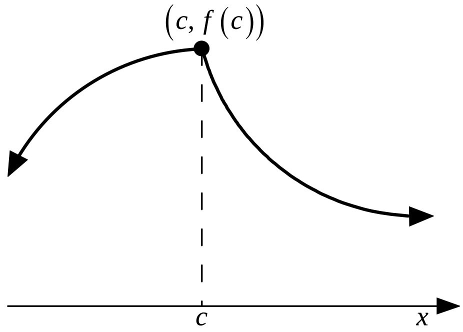
Gráficamente las *<u>situaciones en las que una función no es derivable</u>* en un punto son:



f no es continua en $c \Rightarrow f$ no es derivable en c



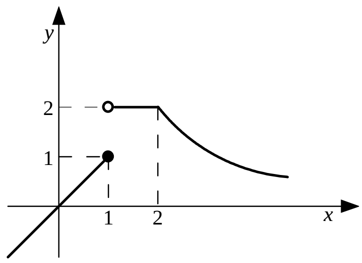
f es continua en *c*, pero la gráfica de f tiene una recta tangente vertical en c $\Rightarrow$ f no es derivable en *c*

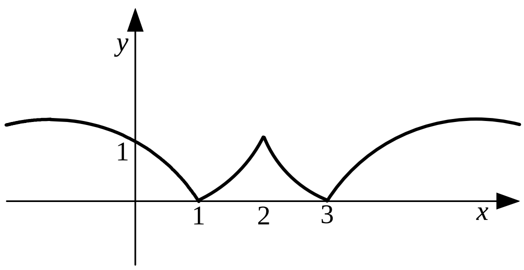


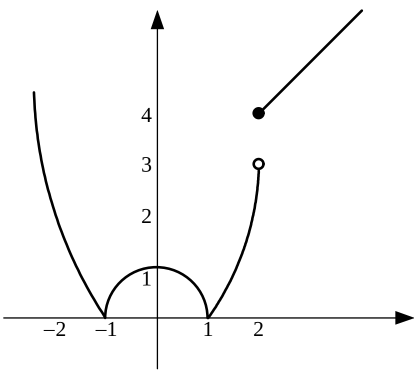
f es continua en *c*, pero la gráfica de f no tiene recta tangente en c (ya que tiene un pico) $\Rightarrow$ f no es derivable en *c*

10. EJERCICIOS

Ejercicio 17. *Señala en qué puntos no son derivables las siguientes funciones:*







Ejercicio 18. *Indica los puntos en los que las siguientes funciones no son derivables:*

a) $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{si } x>0 \\ x+1 & \text{si } x\le 0 \end{cases}$

c) $f(x)=|\text{sen } x|$

b) $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } x>0 \\ -x+1 & \text{si } x\le 0 \end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases} |x^2-1| & \text{si } x<2 \\ x+2 & \text{si } x\ge 2 \end{cases}$

<u>Ejercicio 19.</u> Calcula la función derivada de las siguientes funciones, aplicando la regla de la cadena (una o varias veces) cuando sea necesario.

1) $f(x)=3+7x^5-6x^4$
2) $f(x)=\sqrt{x}$
3) $f(x)=x^{\frac{1}{5}}$
4) $f(x)=(\text{sen }x)^{\text{tg }x}$
5) $f(x)=8x^3$
6) $f(x)=8x^3-7$
7) $f(x)=-7\text{ sen }x$
8) $f(x)=\text{sen}^2(3x^5)$
9) $f(x)=2x^3+3x+2$
10) $f(x)=(x+1)^2$
11) $f(x)=x^3+x^2+x+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}$
12) $f(x)=x^3\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x}$
13) $f(x)=4x^{-\frac{2}{3}}$
14) $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2+x$
15) $f(x)=\ln(x-1)$
16) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$
17) $f(x)=\ln e^x$
18) $f(x)=\ln\dfrac{1}{x}$
19) $f(x)=\log_2 x^2$
20) $f(x)=\log_2 x^2$
21) $f(x)=\ln[(x-1)(x+1)]\cdot(x^2-1)$
22) $f(x)=3^x+2^x+\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$
23) $f(x)=3^{x^2+2}$
26) $f(x)=(x^2+x)^{\ln x}$
27) $f(x)=\log_2 x$
28) $f(x)=3^x$
29) $f(x)=x^{\frac{1}{2}}x^2$
30) $f(x)=7x^2\cdot x^2$
31) $f(x)=\text{sen}(x^3)$
32) $f(x)=2x^3\text{sen }x$
33) $f(x)=\dfrac{x-\text{sen }x}{x^3}$
34) $f(x)=\dfrac{(x-1)^2(x+1)^2}{x^2-1}$
35) $f(x)=\dfrac{x\cdot\sqrt{x}-1}{x-1}$
36) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}\cdot(x-1)}{\sqrt{x}+1}$
37) $f(x)=\dfrac{x^3}{\sqrt{x}}\dfrac{\sqrt{x}}{x^2}$
38) $f(x)=\cos(\ln x^2)$
39) $f(x)=\dfrac{(x-1)^2}{x^2-2x+1}$
40) $f(x)=\log_a a^x$
41) $f(x)=x\cdot\log_2 4$
42) $f(x)=\dfrac{\log_2 4}{\sqrt{4}}$
43) $f(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+x}\right)$
44) $f(x)=\ln(\ln x)$
45) $f(x)=\ln\left(\dfrac{x^2+3x}{2x+1}\right)$
46) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$
47) $f(x)=\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^x}$
48) $f(x)=2^{-\frac{x}{2}}$

24) $f(x)=2^{\ln x}$

25) $f(x)=\dfrac{3^x}{2^x}$

51) $f(x)=\operatorname{sen}\left(x^2+2x\right)$

52) $f(x)=\cos x\cdot\operatorname{sen} x$

53) $f(x)=\operatorname{sen}^2 x+(\operatorname{sen} x)^2+\operatorname{sen}\left(x^2\right)$

54) $f(x)=\operatorname{tg}^2 x+1$

55) $f(x)=\sec^2 x\cdot\operatorname{cosec}^2 x$

56) $f(x)=x^{sen\,x}$

57) $f(x)=(\ln x)^{\cos x}$

58) $f(x)=\sqrt{x}^{\sqrt{x}}$

59) $f(x)=\left(x^2+1\right)^{2x+3}$

60) $f(x)=\ln(\operatorname{sen} x)$

61) $f(x)=\dfrac{\ln x\cdot 2^x}{\operatorname{sen} x}$

62) $f(x)=\dfrac{x^2+3x+4}{x-1}$

49) $f(x)=2^{-\frac{x}{2}}$

50) $f(x)=e^{\ln x}$

63) $f(x)=2\operatorname{sen} x+\operatorname{sen}(2x)$

64) $f(x)=\operatorname{tg} x\cdot\cos x$

65) $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x}}{\cos x}$

66) $f(x)=\dfrac{\operatorname{tg}^2 x+1}{\cos x}$

67) $f(x)=\dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{cotg} x}$

68) $f(x)=2^{x+3}$

69) $f(x)=3(\operatorname{sen} x)^{\ln x}$

70) $f(x)=\left(x^2+3x+2\right)^{x+1}$

71) $f(x)=[\operatorname{sen}(2x)]^{\cos(2x)}$

72) $f(x)=\sec x\cdot\operatorname{cotg} x$

73) $f(x)=\sec^2\left(x^4\right)$

74) $f(x)=\operatorname{tg}\left(x^2+3x\right)$

<u>Ejercicio 20.</u> *Halla la ecuación de la recta tangente a cada una de las siguientes curvas en los puntos indicados:*

a) $y=\ln x$ en $x=e$ *b)* $y=\cos x$ en $x=0$

<u>Ejercicio 21.</u> *¿En qué punto la derivada de* $y=x^2+3x+1$ *toma el valor cero? ¿Cómo será la recta tangente a esta curva en dicho punto?*

<u>Ejercicio 22.</u> *Halla* a y b *en la función* $y=x^2+ax+b$*, sabiendo que* $f(0)=1$ *y* $f'(0)=1$.

<u>Ejercicio 23.</u> *Dada la función* $y=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x}{3}$*:*

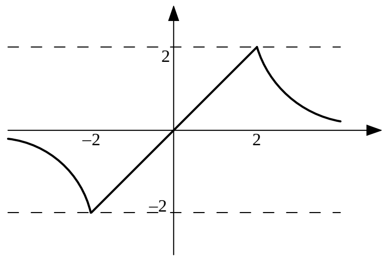
a) Calcula la ecuación de la recta secante a su gráfica que pasa por los puntos $x=-1$ y $x=3$.

b) Resuelve el problema gráficamente.

c) ¿Qué representa la pendiente de esta recta?

<u>Ejercicio 24.</u> *¿En qué punto la recta tangente a la gráfica de la función* $f(x)=x^2-5x+6$ *es paralela a la bisectriz del segundo cuadrante?*

Ejercicio 25. *Indica en qué puntos no es derivable la función cuya gráfica es la siguiente:*



Como en el intervalo $\left[-2,2\right]$ *la función es la recta que une los puntos* $\left(-2,-2\right)$ *y* $\left(2,2\right)$*, ¿qué puedes decir de su derivada?*

11. DERIVADAS SUCESIVAS

Sea I un intervalo y f una función derivable en I. Si $f\,'$ es derivable en $a\in I$, a la derivada $\left(f\,'\right)'\left(a\right)$ se le llama derivada segunda de f en a y se designa por $f\,''\left(a\right)$.

Si $\forall x\in I$ existe $f\,''\left(x\right)$, la función $x\mapsto f\,''\left(x\right)$ se llama función derivada segunda de f en I .

En general, definidas las funciones $f\,',\ldots,f^{\,n-1)}:I\to\mathbb{R}$, de tal modo que $f^{\,k)}=\left(f^{\,k-1)}\right)'$, para $k=2,\ldots,n-1$, diremos que $f^{\,k)}$ es la función derivada k-ésima (o derivada de orden k) de f en I .

12. ESTUDIO GLOBAL Y LOCAL DE FUNCIONES

12.1. Monotonía de una función

Una función $f:D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es estrictamente creciente en x_0 si $\exists E\left(x_0\right)$ tal que si

$$\left.\begin{array}{l} x<x_0 \quad \Rightarrow \quad f\left(x\right)<f\left(x_0\right) \\ x>x_0 \quad \Rightarrow \quad f\left(x\right)>f\left(x_0\right) \end{array}\right\}$$

Una función $f:D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es estrictamente decreciente en x_0 si $\exists E\left(x_0\right)$ tal que si

$$\left.\begin{array}{l} x<x_0 \quad \Rightarrow \quad f\left(x\right)>f\left(x_0\right) \\ x>x_0 \quad \Rightarrow \quad f\left(x\right)<f\left(x_0\right) \end{array}\right\}$$

1er criterio: Cociente incremental

Si $f:D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es estrictamente creciente en x_0 se tiene que

$$\left.\begin{array}{l} x<x_0 \quad \text{y} \quad f\left(x\right)<f\left(x_0\right) \\ x>x_0 \quad \text{y} \quad f\left(x\right)>f\left(x_0\right) \end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l} x-x_0<0 \quad \text{y} \quad f\left(x\right)-f\left(x_0\right)<0 \\ x-x_0>0 \quad \text{y} \quad f\left(x\right)-f\left(x_0\right)>0 \end{array}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow signo\left(x-x_0\right)=signo\left(f\left(x\right)-f\left(x_0\right)\right)$$

y análogamente si $f:D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es estrictamente decreciente en x_0, luego:

$$f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ es estrictamente } \begin{cases} \text{creciente en } x_0 \Leftrightarrow \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0 \\ \text{decreciente en } x_0 \Leftrightarrow \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} < 0 \end{cases}$$

2º criterio: De la derivada primera

Si $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es derivable en x_0, y:

$$f'(x_0) \begin{cases} > 0 \Rightarrow f \text{ es estrictamente creciente en } x_0 \\ < 0 \Rightarrow f \text{ es estrictamente decreciente en } x_0 \end{cases}$$

Por tanto, estudiar la monotonía de una función es estudiar el signo de f'.

Ejercicio 26. Estudia la monotonía de las siguientes funciones:

a) $y = x^6 + 5$ *b)* $y = \dfrac{x^2}{x-1}$ *c)* $y = 2x + 1$ *d)* $y = \dfrac{-1}{x}$

Ejercicio 27. Dibuja una función que sea:

a) Creciente en todo $\mathbb{R}$

b) Creciente en $(-\infty, -2)$ *y decreciente en* $(0, +\infty)$.

12.2. Extremos relativos

Se dice que $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tiene un máximo (resp. mínimo) relativo en x_0 si $\exists E(x_0)$: $x \in E(x_0) \Rightarrow f(x) \le f(x_0)$ (resp. $f(x) \ge f(x_0)$).

Condición necesaria para la existencia de extremos relativos en funciones derivables:

Sea $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable en x_0 y supongamos que f tiene un extremo relativo en x_0. Entonces: $f'(x_0) = 0$

Contraejemplo: El recíproco no es cierto.

La función $f(x) = x^3$ es derivable y $f'(0) = 0$ y sin embargo no tiene un extremo relativo en el origen, ya que es siempre creciente.

Condición necesaria y suficiente para que una función derivable posea un extremo relativo en un punto

Sea $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable en x_0 y supongamos que

1) $f'(x_0) = 0$

2) $f''(x_0) \ne 0$

Entonces, $f(x)$ posee un extremo relativo en x_0, que es un $\begin{cases} \text{máximo si } f''(x_0) < 0 \\ \text{mínimo si } f''(x_0) > 0 \end{cases}$.

Ejercicio 28. *Halla los extremos relativos de las funciones del ejercicio 23.*

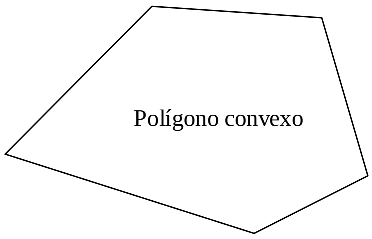
Ejercicio 29. *Estudia los intervalos de monotonía y los extremos relativos de las siguientes funciones:*

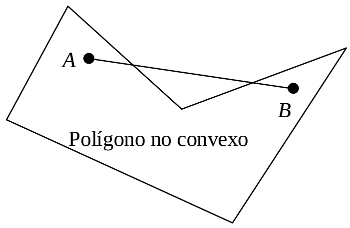
a) $f(x)=x^4-2x^2$ *c)* $f(x)=2x^3-3x^2-12x$

b) $f(x)=x^3-3x$ *d)* $f(x)=x^4-5x^2+4$

12.3. Curvatura de una función: puntos de inflexión

Una figura o región del plano es convexa si al tomar dos puntos cualesquiera de ella, el segmento que los une está completamente incluido en la figura. En caso contrario se dice que la figura o región es cóncava.





Una función es convexa[6] en un intervalo si la tangente a dicha función en cualquier punto del intervalo queda por debajo de la gráfica; Si queda por encima se dirá que la función es cóncava[7].

Los puntos en los que la tangente a la gráfica atraviesa a la función se llaman puntos de inflexión.

1^er criterio:

Sea $f: D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función dos veces derivable en $x_0\in D\cap D'$.

$$Si\ f''(x_0)\begin{cases} >0 \Rightarrow f \text{ es convexa en } x_0 \text{ (tangente por debajo de la gráfica en } E(x_0)) \\ <0 \Rightarrow f \text{ es cóncava en } x_0 \text{ (tangente por encima de la gráfica en } E(x_0)) \end{cases}$$

2º criterio:

Condición necesaria: Si f es dos veces derivable y x_0 es un punto de inflexión, entonces $f''(x_0)=0$.

Condición necesaria y suficiente: Si f es tres veces derivable en $x_0\in D\cap D'$, $f''(x_0)=0$ y $f'''(x_0)\neq 0$, entonces f tiene un punto de inflexión en x_0.

[6] **¡¡Ojo!! Al consultar la bibliografía es posible encontrar libros donde llaman función cóncava a lo que nosotros llamamos función convexa.**

[7] La definición formal de función convexa es:

Una función $f: I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, donde I es un intervalo, es convexa sii para cualesquiera $x_1,x_2\in I$ con $x_1<x_2$ y para todo $\lambda\in\,]0,1[$ se verifica que $f\left[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\right]\le\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$.

Por tanto, estudiar la curvatura de una función es estudiar el signo de f''.

Ejercicio 30. *Estudia la curvatura (concavidad y convexidad) de las siguientes funciones:*

a) $y = x^6 + 5$

b) $y = \dfrac{x^2}{x-1}$

Ejercicio 31. *Halla los puntos de inflexión de las funciones del ejercicio anterior.*

13. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES

Para representar gráficamente una función seguiremos los siguientes pasos:

1º) DOMINIO Y RECORRIDO

Dom (f) = {números x para los que $f(x)$ tiene sentido}

Img (f) = $\{y : \exists x \text{ de forma que } y = f(x)\}$

2º) SIMETRÍAS

a) **Función par**: $f(-x) = f(x) \Leftrightarrow f(x)$ es simétrica respecto del eje OY

b) **Función impar**: $f(-x) = -f(x) \Leftrightarrow f(x)$ es simétrica respecto del origen, es decir, si giramos 180º la gráfica obtenemos la misma función.

3º) PERIODICIDAD

$y = f(x)$ es periódica de período $T \Leftrightarrow f(x+T) = f(T)$ y T es el menor de los números que cumplen dicha condición.

4º) PUNTOS DE CORTE CON LOS EJES

a) **Corte(s) con el eje *OX***

$y = 0 \Rightarrow f(x) = 0$ → Ninguno, uno o más puntos

b) **Corte con el eje** OY

$x = 0 \Rightarrow f(0) = y$ → Ninguno o un punto

5º) REGIONES DE EXISTENCIA

a) **Intervalos de positividad**

$f(x) > 0 \Rightarrow$ gráfica por encima del eje OX

b) **Intervalos de negatividad**

$f(x) < 0 \Rightarrow$ gráfica por debajo del eje OX

Para determinar las regiones de existencia de la función $y = f(x)$ hay que estudiar el signo de $f(x)$.

6º) ASÍNTOTAS

a) **Asíntotas verticales**

La recta $x = a$ es una asíntota vertical de $y = f(x)$ si existe alguno de los siguientes límites:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x \to a+} f(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x \to a-} f(x) = \pm\infty$$

Observaciones:

(1) Una función puede tener infinitas asíntotas verticales.
(2) La gráfica de la función no puede cortar a las asíntotas verticales.

b) **Asíntotas horizontales**

La recta $y = k$ es una asíntota horizontal de $f(x)$ si existe alguno de los siguientes límites:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = k \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = k$$

Observaciones:

(1) Una función tiene corno máximo dos asíntotas horizontales.
(2) La gráfica de la función puede cortar a las asíntotas horizontales.

c) **Asíntotas oblicuas**

La recta $y = mx + n$, $m \neq 0$, es una asíntota oblicua de $f(x)$ si existe alguno de los siguientes límites:

$$\lim_{x \to -\infty} \left(f(x) - mx - n\right) = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - mx - n\right) = 0$$

en cuyo caso $m = \lim_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x}$ y $n = \lim_{x \to \infty} \left(f(x) - mx\right)$

Observaciones:

(1) Una función puede tener como máximo dos asíntotas oblicuas.
(2) Si una función tiene asíntota oblicua no tiene asíntota horizontal y recíprocamente.
(3) La gráfica de la función puede cortar a las asíntotas oblicuas en uno o varios puntos.

7º) PUNTOS DE DISCONTINUIDAD

$f(x)$ es continua en $x = a$ cuando $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, y por tanto la función $f(x)$ presenta discontinuidad en un punto cuando o no existe el límite de la función en dicho punto o cuando ese límite no coincide con el valor que toma la función en él.

8º) MONOTONÍA

a) **Intervalos de crecimiento**: $f'(x) > 0$ para todos los x del intervalo

b) **Intervalos de decrecimiento**: $f'(x) < 0$ para todos los x del intervalo

c) **Puntos críticos**:

$x = a$ es un posible máximo o mínimo de $f(x)$ si $f'(a) = 0$

Si $f''(a) > 0,$ entonces $f(x)$ tiene en $x = a$ un mínimo
Si $f''(a) < 0,$ entonces $f(x)$ tiene en $x = a$ un máximo

Para determinar la monotonía de la función hay que estudiar el signo de $f'(x)$.

9º) CURVATURA

a) **Intervalos de convexidad**: $f''(x) > 0$ para todos los x del intervalo
b) **Intervalos de concavidad**: $f''(x) < 0$ para todos los x del intervalo
c) **Puntos de inflexión**:
$x = a$ es un posible punto de inflexión de $f(x)$ si $f''(a) = 0$

Si $f'''(a) > 0$, entonces $f(x)$ tiene en $x = a$ un punto de inflexión cóncavo-convexo

Si $f'''(a) < 0$, entonces $f(x)$ tiene en $x = a$ un punto de inflexión convexo-cóncavo

Para determinar la curvatura de la función hay que estudiar el signo de $f''(x)$.

Ejercicio 32. *Realiza, estudiando todas sus propiedades, la gráfica de $y = x^3$, y a partir de ella, obtén la gráfica de:*

a) $y = x^3 + 1$ *b)* $y = (x-2)^3$ *c)* $y = (x-2)^3 + 1$

Ejercicio 33. *Estudia y representa las gráficas de las funciones:*

a) $y = \dfrac{x-2}{x-1}$ *b)* $y = x^4$

Ejercicio 34. *Estudia y representa las siguientes funciones:*

1) $y = x^3 - 4x^2 + 4x$
2) $y = x^3 - x$
3) $y = \dfrac{x^2}{x^2+1}$
4) $y = \dfrac{x}{x^2+1}$
5) $y = \ln\left(\sqrt{x^2+1}\right)$
6) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-1}$
7) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-9}$
8) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x+1}$
9) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+4}$
10) $y = x^3 - x^2$
11) $y = x^5$
12) $y = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$
13) $y = \dfrac{4x}{2x+5}$
14) $y = e^x + x$
15) $f(x) = \dfrac{x^2+3x}{x-2}$
16) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-5x+6}$
17) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$
18) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x}$

14. OPTIMIZACIÓN DE FUNCIONES

Optimizar una función es obtener el valor o valores de la variable independiente que maximizan o minimizan la función objeto de estudio.

Ejercicio 35. *Halla las dimensiones del rectángulo de área máxima que se puede inscribir en una circunferencia de radio 5 cm.*

Ejercicio 36. *Halla dos números que sumados den 20 y que su producto sea máximo.*

Ejercicio 37. *Halla dos números tales que el cuadrado de uno multiplicado por el otro sea máximo, si la suma de dichos números es 40.*

Ejercicio 38. *Cuáles son las dimensiones de un campo rectangular de 3 600 m^2 de superficie, para poderlo cercar con una valla de longitud mínima.*

Ejercicio 39. *Con 1 m^2 de cartón cómo construirías una caja del mayor volumen posible.*

Ejercicio 40. *Una hoja de papel debe contener 18 cm^2 de texto impreso. Los márgenes superior e inferior deben ser de 2 cm y los laterales de 1 cm. ¿Cuáles deben ser las dimensiones para que resulten hojas con un coste mínimo?*

Ejercicio 41. *Un agricultor sabe que si vende hoy su cosecha podrá recoger 50 000 kg, que le pagarán al precio de 20 céntimos por kg. Por cada día que espere, la cosecha disminuirá en 800 kg, pero el precio aumentará en 3 céntimos por kg. ¿Cuántos días deberá esperar para obtener el mayor beneficio?*

Ejercicio 42. *Un vendedor de bolígrafos ha observado que si vende sus bolígrafos a 15 céntimos, es capaz de vender 1 000 unidades diarias, pero que por cada céntimo que aumente el precio, disminuye en 100 unidades la venta diaria de bolígrafos. Por otra parte a él le cuesta 7.5 céntimos fabricar un bolígrafo. Averiguar qué precio ha de poner para obtener el máximo beneficio.*

Ejercicio 43. *Se desea construir el marco para una ventana rectangular de 6 m^2 de superficie. EL metro lineal de tramo horizontal cuesta 24 euros y el tramo vertical 40 euros.*

a) Calcula las dimensiones de la ventana para que el coste del marco sea mínimo.

b) Determinar el coste del marco.

Ejercicio 44. *En una oficina de correos sólo admiten paquetes con forma de paralelepípedo rectangular, tales que la anchura sea igual a la altura y, además, la suma de sus tres dimensiones debe ser de 72 cm. Halla las dimensiones del paralelepípedo para que el volumen sea máximo.*

En los siguientes problemas nos piden optimizar funciones pero en intervalos cerrados del tipo $\left[a,b\right]$. Para abordar este tipo de problemas con éxito es conveniente tener en cuenta las siguientes consideraciones:

- Los extremos del intervalo: a y b
- Los $x\in\left(a,b\right)$: $f'\left(x\right)=0$ (posibles extremos relativos)
- Los x en los que no existe $f'\left(x\right)$

Ejercicio 45. *Se considera la función* $f(x)=3x^4+4x^3-12x^2+1$. *Se pide:*

a) Pendiente de la recta tangente a la grafica de la función en el punto de abscisa $x = -1$.

b) Escribe los intervalos en donde la función es creciente y en donde sea decreciente

c) Determina los valores de x *en los que la función alcanza máximos y mínimos relativos.*

d) Valor mínimo que toma la función en el intervalo [- 1, 2].

<u>*Ejercicio 46.*</u> *Se considera la función* $f(x) = x^3 - 3x - 2$. Se pide:

a) Pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = -\frac{1}{2}$.

b) Escribe los intervalos en donde la función sea creciente y en donde sea decreciente.

c) Determina los valores de x en los que la función alcanza máximos y mínimos relativos.

d) Calcular los extremos absolutos de dicha función en el intervalo $[1, 4]$.