GEOMETRÍA DEL TRIÁNGULO

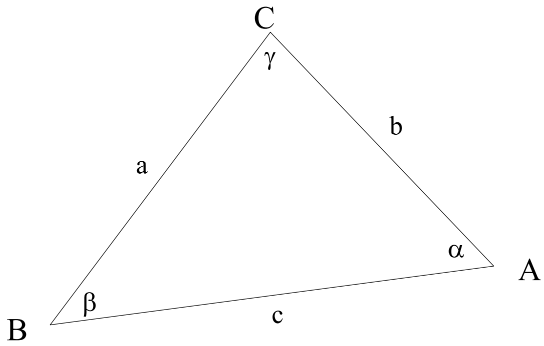
♦ Definición de triángulo

Se llama triángulo a un conjunto $\{A, B, C\}$ de tres puntos no alineados del plano.

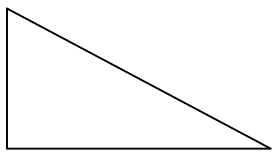
Los puntos A, B y C reciben el nombre de vértices del triángulo.

Los segmentos (o en algunos casos las rectas) $\overline{AB}, \overline{AC}$ y $\overline{BC}$ se llaman lados del triángulo y se denotan con la letra minúscula del vértice que no pertenece al mismo.

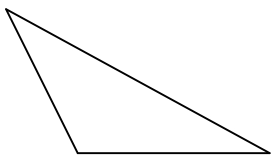
Los ángulos formados por los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$, por $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, o por $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ se llaman ángulos del triángulo, y se denotan por $\hat{A}, \hat{B}$ y $\hat{C}$.



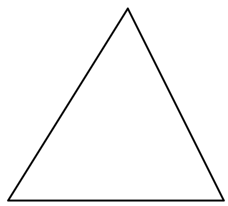
♦ Clasificación de los triángulos según sus ángulos



Triángulo Rectángulo
(tiene un ángulo de 90º)

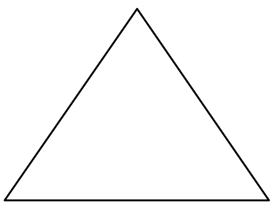


Triángulo Obtusángulo
(tiene un ángulo $>90º$)

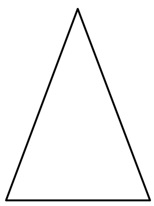


Triángulo Acutángulo
(todos los ángulos $<90º$)

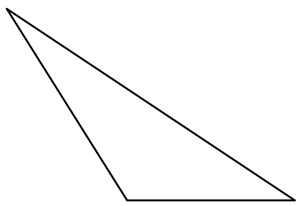
♦ Clasificación de los triángulos según sus lados



Triángulo Equilátero
(los tres lados son iguales)



Triángulo Isósceles
(tiene dos lados iguales)



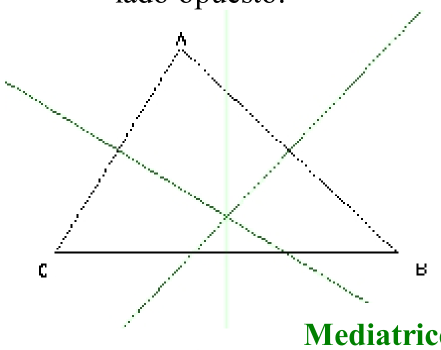
Triángulo escaleno
(tiene los tres lados desiguales)

♦ Elementos notables de un triángulo

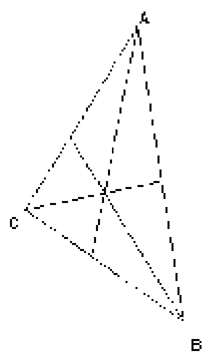
Sean A, B y C los vértices de un triángulo T.

(A) Rectas notables (I)

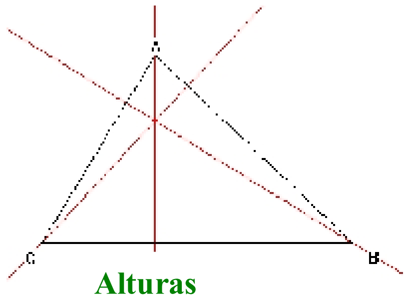
Se llaman mediatrices de T las rectas que son perpendiculares a los lados en sus puntos medios.
Se llaman bisectrices interiores de T las rectas que dividen a cada uno de los ángulos en dos partes iguales.
Se llaman bisectrices exteriores de T las rectas que dividen en dos partes iguales el ángulo formado por un lado y la prolongación de otro.
Se llaman paralelas medias de T las rectas que unen los puntos medios de dos de los lados.
Se llaman medianas de T las rectas que contienen a un vértice y al punto medio del lado opuesto.
Se llaman alturas de T las rectas que conteniendo a un vértice son perpendiculares al lado opuesto.



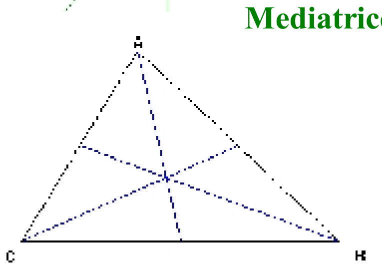
Mediatrices



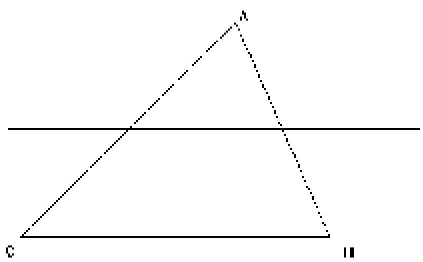
Bisectrices Interiores



Alturas



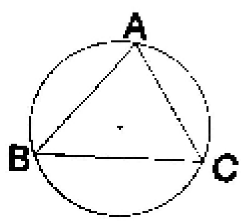
Medianas



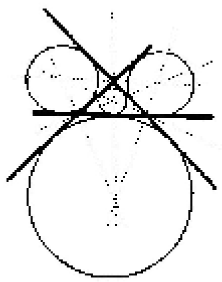
Paralela Media

(B) Circunferencias notables

Sea T un triángulo de vértices A, B, C y S una circunferencia.
Se dice que S está circunscrita a T (o que T está circunscrita a S) sii S es tangente a $\overline{AB}, \overline{AC}$ y $\overline{BC}$, y el centro de S es interior al triángulo.
Se dice que S está exinscrita a T sii S es tangente a $\overline{AB}, \overline{AC}$ y $\overline{BC}$, y el centro de S es exterior al triángulo.



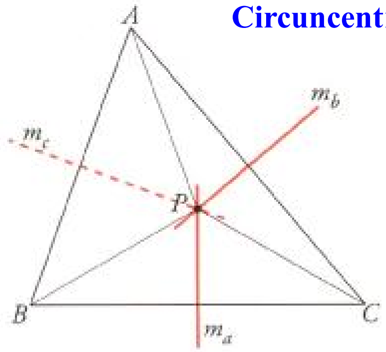
Circunferencia Circunscrita



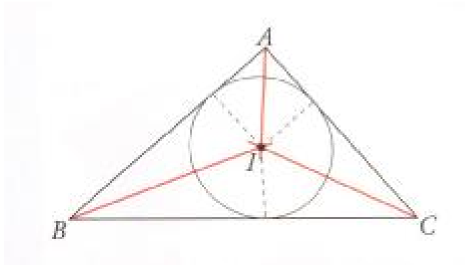
Circunferencias Inscritas y Exinscritas

(C) Puntos notables

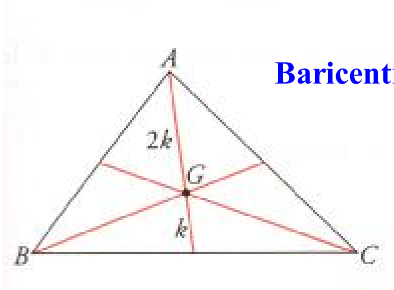
Sea T un triángulo de vértices A, B, C.
Se llama circuncentro de T al punto donde se cortan las tres mediatrices de T.
Se llama incentro de T al centro de una circunferencia inscrita a T (también es el punto donde se cortan las tres bisectrices).
Se llama exincentro de T al centro de una circunferencia exinscrita a T.
Se llama baricentro de T al punto donde se cortan las tres medianas de T.
Se llama ortocentro de T al punto donde se cortan sus tres alturas.



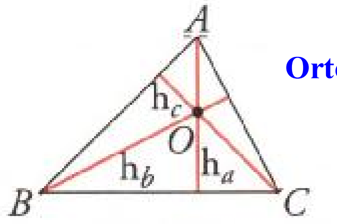
Circuncentro



Incentro



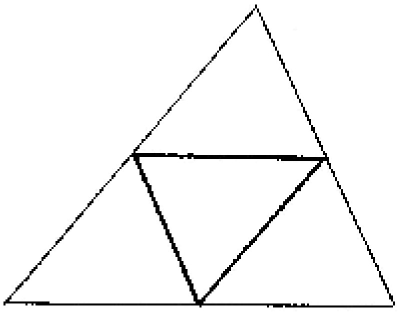
Baricentro



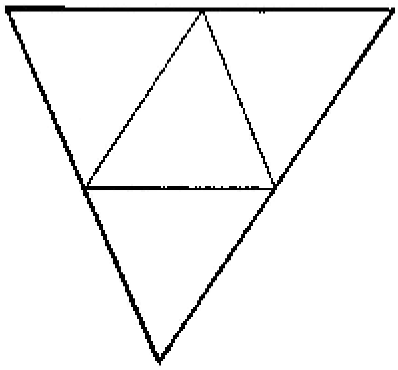
Ortocentro

(D) Triángulos notables

Sea T un triángulo de vértices A, B, C.
Se llama triángulo mediano del triángulo T al triángulo cuyos vértices son los puntos medios de los lados de T.
Se llama triángulo asociado a T al triángulo que se obtiene trazando por cada vértice una paralela lado opuesto.



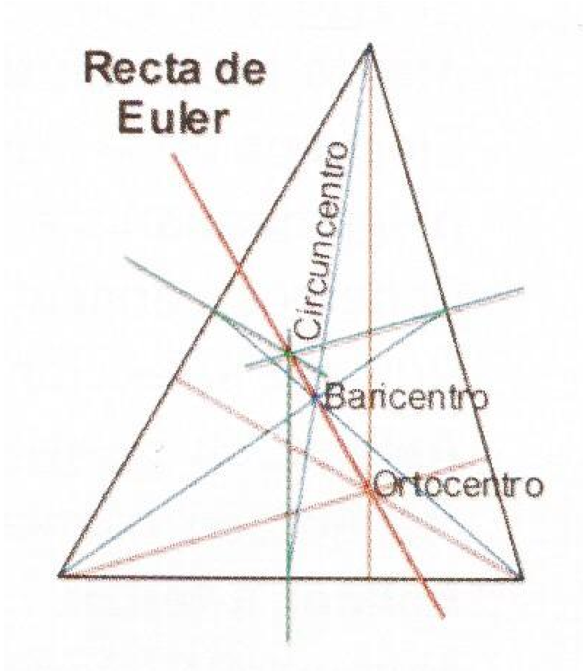
Triángulo Mediano



Triángulo Asociado

(E) Rectas notables (II)

Sean A, B, C los vértices de un triángulo T. Se llama recta de EULER a la recta definida por el ortocentro, el baricentro y el circuncentro del triángulo T.



♦ Área de un triángulo

Sean a,b,c las longitudes de los lados del triángulo T.

(i) Semiperímetro del triángulo

$$p=\frac{a+b+c}{2}$$

(ii) Área del triángulo conocidos dos lados y el ángulo que forman

$$S=\frac{1}{2}bc\sin\hat{A}$$

(iii) Área del triángulo conocidos un lado y dos ángulos

$$S=\frac{c\sin\hat{A}\sin\hat{B}}{2\sin\left(\hat{A}+\hat{B}\right)}$$

(iv) Área del triángulo conocidos los tres lados (Fórmula de HERÓN)

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

(v) Área del triángulo conocidos tres lados y el radio de la circunferencia circunscrita

$$S=\frac{abc}{4R}$$

$$\left(\text{en particular } R=\frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}\right)$$

(vi) Área del triángulo conocidos tres lados y el radio de la circunferencia inscrita

$$S=abcr$$

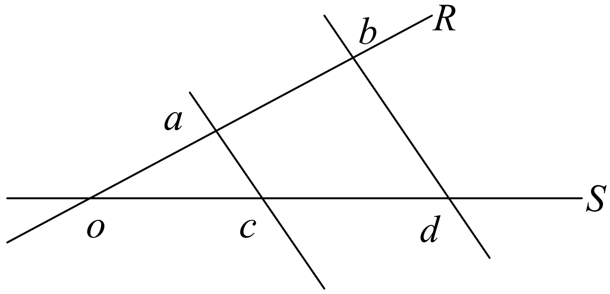
$$\left(\text{en particular } r=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}\right)$$

♦ Teorema clásico de TALES (S. VI a.C.)

Sean $R, S \subset A$ dos rectas secantes del plano, $\{o\} = R \cap S$ y $a, b \in R \setminus \{o\}$; $c, d \in S \setminus \{o\}$. Entonces:

$$\langle a, c \rangle || \langle c, d \rangle \Leftrightarrow (o, a, b) = (o, c, d)$$

donde $(x, y, z) = \dfrac{\overline{xy}}{\overline{xz}}$.



♦ Criterios de semejanza de triángulos

Teorema Fundamental de la semejanza de triángulos:

Sea A, B, C un triángulo y sean $B' \in \overline{AB}$, $C' \in \overline{AC}$ con $\langle B', C' \rangle || \langle B, C \rangle$. Entonces, los triángulos A, B, C y A', B', C' son semejantes.

Primer criterio de semejanza de triángulos:

Sean A, B, C y A', B', C' dos triángulos con $\hat{A} = \hat{A}', \hat{B} = \hat{B}'$. Entonces los triángulos A, B, C y A', B', C' son semejantes.

Segundo criterio de semejanza de triángulos:

Sean A, B, C y A', B', C' dos triángulos con $\hat{A} = \hat{A}'$ y $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$. Entonces los triángulos A, B, C y A', B', C' son semejantes.

Tercer criterio de semejanza de triángulos:

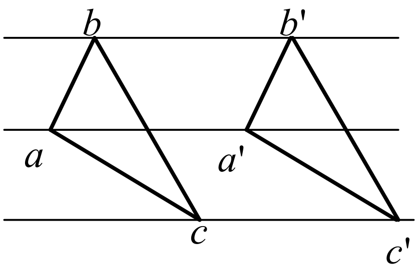
Sean A, B, C y A', B', C' dos triángulos con $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$. Entonces los triángulos A, B, C y A', B', C' son semejantes.

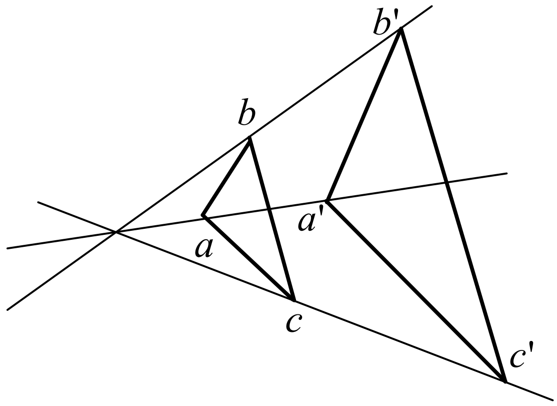
Caracterización de la semejanza de triángulos:

Dos triángulos del plano son semejantes si, y sólo si, existe una traslación o una homotecia que transforma uno en otro.

Teorema de DESARGUES (1648):

Si dos triángulos sin vértices comunes son semejantes, entonces las tres rectas que unen los vértices correspondientes son o paralelas o concurrentes.



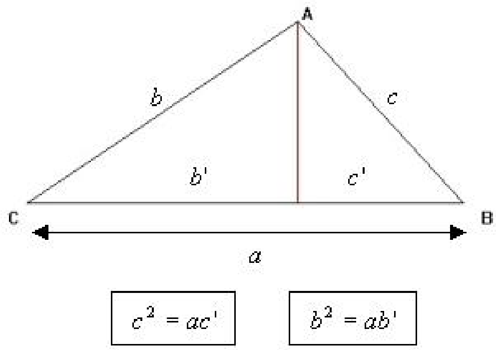


♦Algunos teoremas importantes sobre triángulos rectángulos:

Teorema del cateto:

Sea A,B,C un triángulo rectángulo en A y H la proyección de A sobre $\overline{BC}$. Entonces:

$$d(A,C)^2 = d(B,C)d(B,H)$$



Teorema de PITÁGORAS:

Sea A,B,C un triángulo rectángulo en A. Entonces:

$$d(A,B)^2 + d(A,C)^2 = d(B,C)^2$$

Teorema de la altura:

Sea A,B,C un triángulo rectángulo en A y H la proyección de A sobre $\overline{BC}$. Entonces:

$$d(A,H)^2 = d(B,H)d(C,H)$$