Cipri Santiago Zaragoza

Departamento de Matemáticas
10/06/2002

LOS CUATERNIOS DE HAMILTON

Primera forma de construirlos

Se define el conjunto $\mathbb{H} := \mathbb{R}^4$ y llamamos $1 = (1,0,0,0)\,, i = (0,1,0,0)\,, j = (0,0,1,0)\,, k =$ $= (0,0,0,1)$. Se tiene que cualquier elemento de $\mathbb{H}$ es de la forma $a + bi + cj + dk$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Se define en $\mathbb{H}$ la suma usual y el producto de forma que verifique las siguientes relaciones:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, ij = k, ji = -k, ik = -j, ki = j, jk = i, kj = -i$$

$\curvearrowright$	i	j	k
i	-1	k	$-j$
j	$-k$	-1	i
k	j	$-i$	-1

Más exactamente, se definen:

$$\begin{aligned}
(a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) + (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) &= (a_1 + a_2) + i\,(b_1 + b_2) + \\
&\quad + j\,(c_1 + c_2) + k\,(d_1 + d_2) \\
(a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k)\,(a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) &= (a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2) + \\
&\quad + (a_1 b_2 + b_1 a_2 + c_1 d_2 - d_1 c_2)\,i + \\
&\quad + (a_1 c_2 - b_1 d_2 + c_1 a_2 + d_1 b_2)\,j + \\
&\quad + (a_1 d_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2 + d_1 a_2)\,k
\end{aligned}$$

Se define además la conjugación "cuaterniónica" por

$$\overline{a + bi + cj + dk} = a - bi - cj - dk$$

Se tiene que $(\mathbb{H}, +, \cdot)$ es un cuerpo no conmutativo, llamado cuerpo de cuaternios de Hamilton.

Segunda forma de construirlos

Consideramos el conjunto $\mathbb{H} := \{z + jw : z, w \in \mathbb{C}\}$, donde $j \notin \mathbb{C}$ y definimos las siguientes operaciones:

$$\begin{aligned} (z_1 + jz_2) + (w_1 + jw_2) &: = (z_1 + w_1) + j(z_2 + w_2) \\ (z_1 + jz_2)(w_1 + jw_2) &: = (z_1 w_1 - \overline{z}_2 w_2) + j(\overline{z}_1 w_2 + z_2 w_1) \end{aligned}$$

$\forall (z_1 + jz_2), (w_1 + jw_2) \in \mathbb{H}$.

Se tiene que $(\mathbb{H}, +, \cdot)$ es un cuerpo no conmutativo.

Además, $j^2 = -1$ y $\mathbb{C} << \mathbb{H}$, es decir, $\mathbb{H}$ contiene a $\mathbb{C}$ como subcuerpo.

Tercera forma de construirlos

Consideramos $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\} \cong \mathbb{C}$ (es decir, estamos considerando $\mathbb{C}$ como las transformaciones lineales de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$). Entonces, se tiene que

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{C} \right\} \cong \mathbb{H}$$

(proceso de Caley-Dixon).

Teorema final de la Aritmética

Este teorema nos dice que el único cuerpo conmutativo que es un $\mathbb{R}-$ espacio vectorial de dimensión finita es $\mathbb{C}$. Por tanto, si se quiere construir un cuerpo que sea $\mathbb{R}-$ espacio vectorial de dimensión finita es preciso buscarlo entre los cuerpos no conmutativos.

Los cuaternios de Hurwitz

Los elementos del conjunto

$$\mathbb{H}_1 := \{a + bi + cj + dk : a, b, c, d \in \mathbb{Z}\}$$

se llaman cuaternios de Hurwitz.