COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO DE LAS SOLUCIONES DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL

Cipri Santiago Zaragoza
Departamento de Matemáticas
Febrero de 2004

CASO DE COEFICIENTES VARIABLES

Sea $x' = A(t)\,x$ con $A \in C\left(]\alpha, +\infty[\,, \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\right), -\infty \leq \alpha < +\infty.$
* Se dice que $x' = A(t)\,x$ es convergente sii $\forall x$ solución se tiene que $|x(t)| \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
* Se dice que $x' = A(t)\,x$ es acotado sii $\forall x$ solución $\exists M, c > 0 \ / \ |x(t)| \leq c, \forall t \geq M$
Caracterización:
Sea $\Phi(t)$ una m.f. de $x' = A(t)\,x$. Entonces:
i) $x' = A(t)\,x$ es convergente $\Leftrightarrow \|\Phi(t)\| \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
ii) $x' = A(t)\,x$ es acotado $\Leftrightarrow \exists M, c > 0 \ // \ \|\Phi(t)\| \leq c, \forall t \geq M$

CASO DE COEFICIENTES CONSTANTES

Sea $x' = Ax$ con $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y supongamos que $A = PJP^{-1}$. Entonces:

$$x' = Ax \text{ acotado } \Leftrightarrow \left\|e^{Jt}\right\| \text{ acotado}$$

Notaciones: $\lambda \in \sigma(A)$
$m(\lambda)$ =multiplicidad de λ
$\nu(\lambda) = m(\lambda) + 1 - \dim\ker(A - \lambda I)$
$\mu = máx\left\{\operatorname{Re}\lambda \ /\lambda \in \sigma(A)\right\}$

Caracterización:
a) $\mu < 0 \Rightarrow x' = Ax$ convergente
b) $\mu = 0$ y $\forall\ \lambda \in \sigma(A)$ con $\operatorname{Re}\lambda = 0$, $\nu(\lambda) = 1 \Rightarrow x' = Ax$ acotado
c) En otro caso, $x' = Ax$ no es ni convergente ni acotado

CASO DE COEFICIENTES PERIÓDICOS

Sea $x' = A(t)\,x$ con $A \in C_T\left(\mathbb{R}, \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\right), T > 0.$
Notación: $\sigma = máx\left\{|\rho| \ / \ \rho \text{ es multiplicador característico de } x' = A(t)\,x\right\}$
Caracterización:
a) $\sigma < 1 \Rightarrow x' = A(t)\,x$ convergente
b) $\sigma > 1 \Rightarrow x' = A(t)\,x$ acotado
Consecuencia:
Si $\int_0^T trA(s)\,ds > 0 \Rightarrow x' = A(t)\,x$ no acotado

CASO DE COEFICIENTES PERTURBADOS

Sea $x' = (A + B(t))\, x$ con $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y $B \in C\left(]\alpha, +\infty[\,, \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\right).$

Caracterización:

a) Si B cumple

$(H1)$ $\lim\limits_{t \to +\infty} \|B(t)\| = 0$

$(H2)$ $\|B(t)\| \in L^1(\beta, +\infty)$, $\forall \beta > \alpha$

y $x' = Ax$ es convergente$\Rightarrow$ $x' = (A + B(t))\, x$ es convergente

b) Si B cumple $(H2)$ y $x' = Ax$ es acotado $\Rightarrow$ $x' = (A + B(t))\, x$ es acotado